

SUJET MATHLAND 2013

Sujet d'entraînement au DNB

Stéphane PASQUET

<http://www.mathweb.fr>

La présentation et la rédaction sont notées sur 4 points.

Exercice 1 (5 points)

Louis doit effectuer l'ascension d'une montagne, puis redescendre par le même chemin.

Il part à 8h27min du pied de la montagne et arrive au sommet à 11h55min.

- 1 (a) Calculer la durée de l'ascension en secondes.
(b) Le flanc de la montagne mesure 2 760 mètres.
Calculer la vitesse moyenne de Louis, en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, lors de l'ascension.
- 2 Lors de la descente, la vitesse moyenne de Louis est égale à $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Combien de temps, en minutes et secondes, Louis met-il pour redescendre de la montagne?
- 3 Calculer la vitesse moyenne du trajet « ascension + descente » en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Arrondir le résultat au millième.
- 4 Louis souhaite calculer la vitesse moyenne du trajet « ascension + descente » à l'aide d'une formule trouvée sur Internet :

$$v = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

où :

- v_1 et v_2 représentent deux vitesses
- v représente la moyenne des deux vitesses

Appliquer cette formule pour trouver la vitesse moyenne voulue par Louis, puis comparer avec le résultat de la question précédente.

- 5 Convertir $0,384 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice 2 (4 points)

Dans la vidéothèque de Julie, il y a des Blu-ray et des DVD. Elle compte en tout 180 boîtiers.

Elle a toujours payé ses films aux plus bas prix : 15 € pour un Blu-ray et 10 € pour un DVD. Elle estime que le prix total de tous ses films est 2 075 €.

Calculer le nombre de Blu-ray et de DVD.

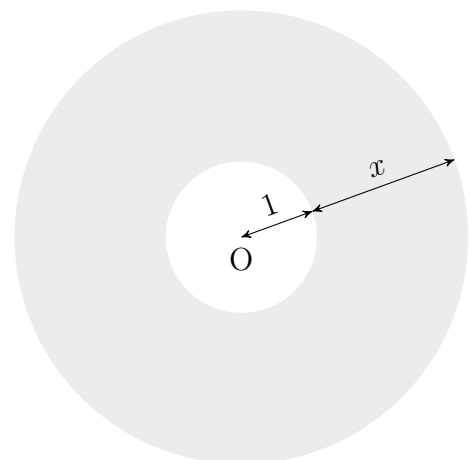
Exercice 3 (6 points)

Toutes les longueurs seront exprimées en centimètres.

Une « couronne » est la partie grise de la figure ci-contre.

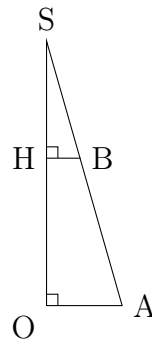
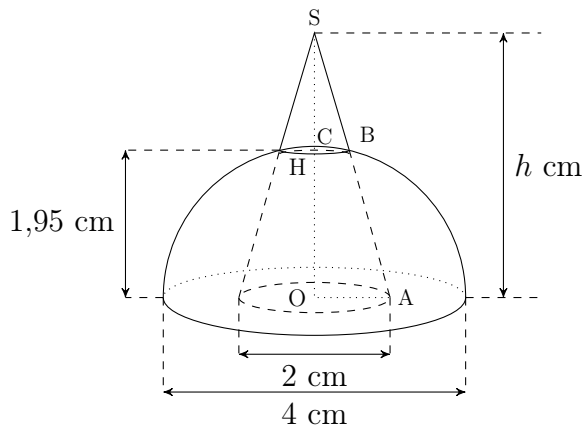
La largeur de la couronne est x .

- 1 Montrer que l'aire de la couronne est égale à $\pi x(x + 2)$.
- 2 Montrer que chercher le nombre x pour que l'aire de la couronne soit égale à celle du disque central revient à résoudre l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$.
- 3 (a) On pose $A = -1 + \sqrt{2}$ et $B = -1 - \sqrt{2}$.
Calculer $A \times B$ et $A + B$.
(b) Développer l'expression : $(x - A)(x - B)$.
(c) En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire de la couronne est égale à celle du disque central.



Exercice 4 (6 points)

Un objet est obtenu à partir d'une demi-boule de diamètre 4 cm en lui enlevant une partie de cône de révolution de hauteur h cm et de base de diamètre 2 cm, comme indiqué par la figure ci-dessous.



Tous les résultats seront arrondis au centième.

- 1 À l'aide des informations portées sur les schémas ci-dessus, calculer HB.
- 2 Calculer alors SH.
- 3 Calculer le volume du grand cône de révolution ainsi que celui du cône de révolution qui dépasse de la demi-boule.
- 4 Calculer le volume de la demi-boule pleine (donc sans tenir compte du trou).
- 5 La partie de la demi-boule au-dessus de la base du petit cône de révolution a un volume qui se calcule avec la formule :

$$\frac{\pi}{3} \times HC^2 \times (3R - HC)$$

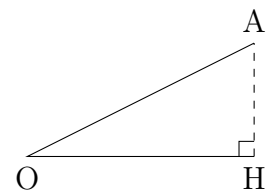
où R représente le rayon de la demi-boule.
Calculer ce volume.

- 6 En déduire le volume de l'objet troué.

Exercice 5 (5 points)

La pente p d'une route est le rapport de la hauteur à laquelle nous nous trouvons (par rapport à celle à laquelle nous sommes partis) par la distance horizontale parcourue. Elle se mesure en pourcentage.

$$p = \frac{AH}{OH} \times 100$$



- 1 Une route fait un angle de 4° avec l'horizontale.
Expliquer pourquoi sa pente est à peu près 7 %.
- 2 Sur une deuxième route, pour une distance horizontale de 8 778 mètres, la différence de hauteur est 924 mètres.

(a) Calculer le PGCD de 8 778 et 924.

(b) Montrer alors que la pente de cette route est égale à $\frac{200}{19}$.

(c) Quel est l'angle que fait cette route avec l'horizontale ?

Exercice 6 (4 points)

Une urne, notée U1, contient 3 boules rouges et 2 boules vertes.

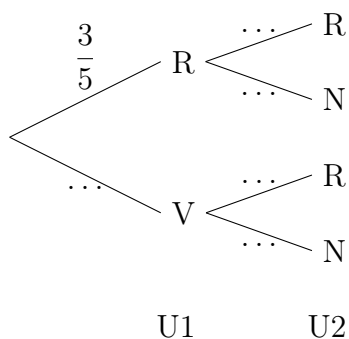
Une autre urne, notée U2, contient 2 boules rouges et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule dans U1 et une autre dans U2.

On note :

- R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
- V l'événement : « la boule tirée est verte » ;
- N l'événement : « la boule tirée est noire ».

1 Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2 Calculer la probabilité d'avoir deux boules rouges.

3 En déduire la probabilité de ne pas avoir deux boules rouges.

Exercice 7 (6 points)

Nous avons interrogé 1 200 personnes sur le nombre de paires de chaussures qu'elles possédaient. Nous avons reporté dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus :

Nombre de paires de chaussures	1	2	3	4	5	6
Effectif	140	220	230	280	140	

- 1 Combien de personnes possèdent 6 paires de chaussures ?
- 2 Calculer le nombre moyen de paires de chaussures que possède une personne de ce groupe.
- 3 Déterminer le nombre médian de paires de chaussures.
- 4 Calculer les premier et troisième quartile de la série statistique.
- 5 On choisit au hasard une personne parmi ces 1 200.
Quelle est la probabilité pour qu'elle possède au moins 3 paires de chaussures ?

CORRECTION

Exercice 1 (5 points)

- 1 (a) De 8h27min à 11h27min, il y a 3 heures, soit $3 \times 3\,600 = 10\,800$ secondes.
De 27 min à 55 min, il y a 28 min, soit $28 \times 60 = 1\,680$ secondes.
Ainsi, l'ascension a duré 12 480 secondes.

- (b) Une vitesse moyenne v est donnée par la formule :

$$v = \frac{d}{t}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\,760}{12\,480} \\ v &\approx 0,22 \end{aligned}$$

La vitesse moyenne de l'ascension est donc égale à $0,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 2 D'après la formule $v = \frac{d}{t}$, on a :

$$\begin{aligned} 1,5 &= \frac{2\,760}{t} \\ t &= \frac{2\,760}{1,5} \\ t &= 1\,840 \end{aligned}$$

Donc Louis met 1 840 secondes.

Or, $1\,840 = 60 \times 30 + 40$.

Ainsi, la descente dure 30 minutes et 40 secondes.

- 3 Le trajet total comporte $2 \times 2\,760 = 5\,520$ mètres et est parcouru en $12\,480 + 1\,840 = 14\,320$ secondes.

$$\begin{aligned} v &= \frac{5\,520}{14\,320} \\ v &\approx 0,38547486 \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse moyenne du trajet total est à peu près égale à $0,385 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 4 Remplaçons dans la formule les lettres par leur valeur :

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{\frac{1}{0,22} + \frac{1}{1,5}} \\ v &\approx 0,384 \end{aligned}$$

Avec la formule, on trouve une vitesse moyenne d'à peu près $0,384 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On ne trouve pas exactement la même chose qu'à la question précédente, mais ceci est dû aux multiples approximations que l'on a faites avant la question précédente.

5 $0,384 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ signifie que l'on parcourt 0,384 mètre en 1 seconde. Il y a 3 600 secondes en 1 heure.

$$3\,600 \times 0,384 = 1\,382,4$$

Donc, on parcourt 1 382,4 mètres en 1 heures, c'est-à-dire 1,3824 km en 1 heure.

Ainsi, $0,384 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 1,38 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice 2 (4 points)

Notons :

- x le nombre de DVD
- y le nombre de Blu-ray

Alors, le nombre total de boîtiers s'exprime par : $x + y$. Ainsi, $x + y = 180$.

De plus, le prix total s'exprime par : $10x + 15y$, donc $10x + 15y = 2\,075$. En divisant par 5 cette dernière équation, on a : $2x + 3y = 415$. On a donc le système :

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ 2x + 3y = 415 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}$$
$$\begin{cases} x = 180 - y \\ y = 55 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 - L_1 \end{matrix}$$

On peut donc affirmer qu'il y a 125 DVD et 55 Blu-ray.

Exercice 3 (6 points)

- 1** L'aire de la couronne se calcule en soustrayant l'aire du petit disque (de rayon 1) à celle du grand (de rayon $x + 1$) :

$$\begin{aligned} & \pi \times (x + 1)^2 - \pi \times 1 \\ &= \pi [(x + 1)^2 - 1] \\ &= \pi [(x + 1 - 1)(x + 1 + 1)] \\ &= \pi x(x + 2) \end{aligned}$$

L'aire de la couronne est donc égale à $\pi x(x + 2)$.

- 2** Si l'aire de la couronne est égale à celle du disque central, alors :

$$\pi x(x + 2) = \pi \times 1$$

En divisant les deux membres de cette équation par π , on obtient :

$$x(x + 2) = 1$$

ou encore, en développant :

$$x^2 + 2x = 1$$

On a donc bien l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$.

3 (a) • $A \times B = (-1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2})$
 $= (-1)^2 - (\sqrt{2})^2$
 $= 1 - 2$
 $= -1$

Ainsi, $A \times B = -1$.

• $A + B = -1 + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$
 $= -2$

Ainsi, $A + B = -2$.

(b) $(x - A)(x - B) = x^2 - B \times A - A \times x + A \times B$
 $= x^2 - (B + A)x + A \times B$
 $= x^2 - (-2)x - 1$ (d'après la question précédente)
 $= x^2 + 2x - 1$

(c) D'après la question précédente, l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$ est équivalente à l'équation $(x - A)(x - B) = 0$.

Or, *un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul*.

Ainsi, $x - A = 0$ ou $x - B = 0$.

Autrement dit, $x = A$ ou $x = B$.

Or, $B = -1 - \sqrt{2} < 0$ donc B ne convient pas car x est une longueur (donc positive ou nulle) et $A > 0$.

Ainsi, l'aire de la couronne est égale à celle du disque central quand $x = -1 + \sqrt{2}$.

Exercice 4 (6 points)

1 Le triangle OBH est rectangle en H. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

$$2^2 = 1,95^2 + HB^2$$

$$HB^2 = 4 - 3,8025$$

$$HB^2 = 0,1975$$

$$HB = \sqrt{0,1975}$$

$$\mathbf{HB \approx 0,44 \text{ cm}}$$

2 Dans le triangle OAS, (HB) et (OA) sont parallèles. Ainsi, d'après le théorème de Thalès :

$$\begin{aligned}\frac{SH}{SO} &= \frac{HB}{OA} \\ \frac{SH}{SH + 1,95} &= \frac{0,44}{1} \\ SH &= 0,44(SH + 1,95) \\ SH &= 0,44SH + 0,44 \times 1,95 \\ SH - 0,44SH &= 0,858 \\ 0,56SH &= 0,858 \\ SH &= \frac{0,858}{0,56} \\ \mathbf{SH} &\approx \mathbf{1,53 \text{ cm}}\end{aligned}$$

3 La hauteur du grand cône de révolution est :

$$h = 1,95 + 1,53 = 3,48$$

Donc son volume est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 3,48 \\ \mathbf{\mathcal{V}_1} &\approx \mathbf{3,64 \text{ cm}^3}\end{aligned}$$

Le volume du petit cône de révolution est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_2 &= \frac{1}{3} \times \pi \times 0,44^2 \times 1,53 \\ \mathbf{\mathcal{V}_2} &\approx \mathbf{0,31 \text{ cm}^3}\end{aligned}$$

4 Le volume de la demi-boule est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_3 &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 \\ \mathbf{\mathcal{V}_3} &\approx \mathbf{16,76 \text{ cm}^3}\end{aligned}$$

5 Le volume de la partie au-dessus de la base du petit cône est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_4 &= \frac{\pi}{3} \times 0,05^2 \times (3 \times 2 - 0,05) \\ \mathbf{\mathcal{V}_4} &\approx \mathbf{0,02 \text{ cm}^3}\end{aligned}$$

6 Le volume de l'objet troué est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \mathcal{V}_3 - (\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2) - \mathcal{V}_4 \\ &\approx 16,76 - 3,64 + 0,31 - 0,02 \\ \mathbf{\mathcal{V}} &\approx \mathbf{13,41 \text{ cm}^3}\end{aligned}$$

Exercice 5 (5 points)

- 1 Par définition, la pente de la route est $p = \frac{AH}{OH} \times 100$ dans le triangle OAH rectangle en H.

$$\text{Or, } \frac{AH}{OH} = \tan \widehat{HOA}.$$

$$\text{Ainsi, } p = 100 \tan \widehat{HOA}.$$

$$p = 100 \tan 4^\circ$$

$$p \approx 100 \times 0,069926812$$

$$p \approx 7$$

Ainsi, la pente est environ égale à 7%.

- 2 (a) Calculons $\text{pgcd}(8\,778; 924)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$8\,778 = 9 \times 924 + 462$$

$$924 = 2 \times 462 + 0$$

Ainsi, **$\text{pgcd}(8\,778; 924) = 462$.**

- (b) La pente de la route est :

$$p = \frac{924}{8\,778} \times 100$$

$$p = \frac{\cancel{462} \times 2}{\cancel{462} \times 19} \times 100$$

$$\mathbf{p = \frac{200}{19}}$$

- (c) Notons α l'angle que fait cette route avec l'horizontale. Alors :

$$\tan \alpha = \frac{2}{19}$$

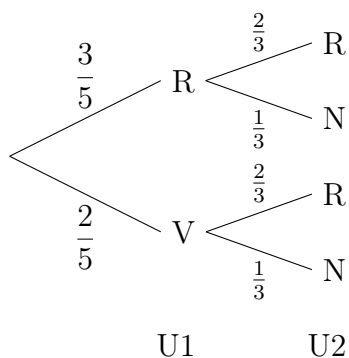
$$\alpha = \arctan\left(\frac{2}{19}\right)$$

$$\alpha \approx 6^\circ$$

Ainsi, la route fait un angle de 6° avec l'horizontale.

Exercice 6 (4 points)

- 1 L'arbre complété est le suivant :



- 2** La probabilité d'avoir deux boules rouges est, d'après l'arbre précédent :

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

La probabilité d'avoir deux boules rouges est égale à $\frac{2}{5}$.

- 3** L'événement « ne pas obtenir deux boules rouges » est le contraire de « obtenir deux boules rouges ».

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Ainsi, la probabilité de ne pas avoir deux boules rouges est égale à $\frac{3}{5}$.

Exercice 7 (6 points)

- 1** Le nombre total des effectifs doit être égal à 1 200.

$$140 + 220 + 230 + 280 + 140 = 1\,010$$

$$1\,200 - 1\,010 = 190$$

Il y a donc 70 personnes qui possèdent 6 paires de chaussures.

- 2** Calculons la moyenne de la série statistique :

$$\begin{aligned} m &= \frac{140 \times 1 + 220 \times 2 + 240 \times 3 + 280 \times 4 + 140 \times 5 + 190 \times 6}{1\,200} \\ &= \frac{4\,260}{1\,200} \\ &= 3,55 \end{aligned}$$

Une personne possède donc en moyenne 3,55 paires de chaussures.

- 3** La médiane est la valeur du caractère qui partage la série en deux séries de même effectif. La moitié de l'effectif total est $\frac{1\,200}{2} = 600$.

La 600^e valeur est « 4 » et la 601^e valeur aussi donc la médiane est égale à 4.

Le nombre médian de paires de chaussures est égal à 4.

- 4** Le quart de 1 200 est 300. La 300^e valeur est « 2 » donc **le premier quartile est égal à 2**.
Les trois quarts de 1 200 sont égaux à 900 et la 900^e valeur est « 5 » donc **le troisième quartile est égal à 5**.

- 5** Il y a $140 + 220 = 360$ personnes qui possèdent moins de 3 paires de chaussures, donc $1\,200 - 360 = 840$ personnes qui possèdent au moins 3 paires de chaussures.

$$\frac{840}{1\,200} = 0,7 = \frac{7}{10}$$

Ainsi, la probabilité pour que la personne choisie au hasard ait au moins trois paires de chaussures est $\frac{7}{10}$.