

SUJET PONDICHÉRY 2013

Stéphane PASQUET
<http://www.mathweb.fr>

La présentation et la rédaction sont notées sur 4 points.

Exercice 1 (5 points)

Quatre affirmations sont données ci-dessous :

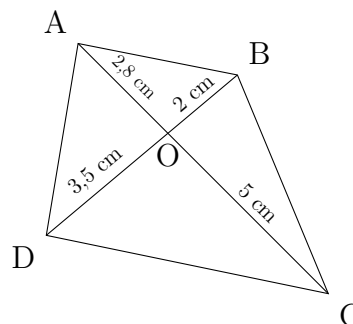
Affirmation 1 : $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$ est un nombre entier.

Affirmation 2 : 4 n'admet que deux diviseurs.

Affirmation 3 : Un cube, une pyramide à base carrée et un pavé droit totalisent 17 faces.

Affirmation 4 :

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse en argumentant la réponse.

Exercice 2 (8 points)

Un professeur de SVT demande aux 29 élèves d'une classe de sixième de faire germer des graines de blé chez eux.

Le professeur donne un protocole expérimental à suivre :

- mettre en culture sur du coton dans une boîte placée dans une pièce éclairée, de température entre 20° et 25°C ;
- arroser une fois par jour ;
- il est possible de couvrir les graines avec un film transparent pour éviter l'évaporation de l'eau.

Le tableau ci-dessous donne les tailles des plantules (petites plantes) des 29 élèves à 10 jours après la mise en germination.

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2	4	2	2	3	3	4	4	2

- 1 Combien de plantules ont une taille qui mesure au plus 12 cm ?
- 2 Donner l'étendue de cette série.
- 3 Calculer la moyenne de cette série. Arrondir au dixième près.
- 4 Déterminer la médiane de cette série et interpréter le résultat.
- 5 On considère qu'un élève a bien respecté le protocole si la taille de la plantule à 10 jours est supérieure ou égale à 14 cm.
Quel pourcentage des élèves de la classe a bien respecté le protocole ?
- 6 Le professeur a fait lui-même la même expérience en suivant le même protocole. Il a relevé la taille obtenue à 10 jours de germination.
Prouver que, si on ajoute la donnée du professeur à cette série, la médiane ne changera pas.

Exercice 3 (6 points)

Le poids d'un corps sur un astre dépend de la masse et de l'accélération de la pesanteur.

On peut montrer que la relation est $P = mg$ où :

- P est le poids (en Newton) d'un corps sur un astre (c'est-à-dire la force que l'astre exerce sur le corps),
- m la masse (en kg) de ce corps,
- g l'accélération de la pesanteur de cet astre.

1 Sur la terre, l'accélération de la pesanteur de la Terre g_T est environ de 9,8. Calculer le poids (en Newton) sur Terre d'un homme ayant une masse de 70 kg.

2 Sur la lune, la relation $P = mg$ est toujours valable.

On donne le tableau ci-dessous de correspondance poids-masse sur la Lune :

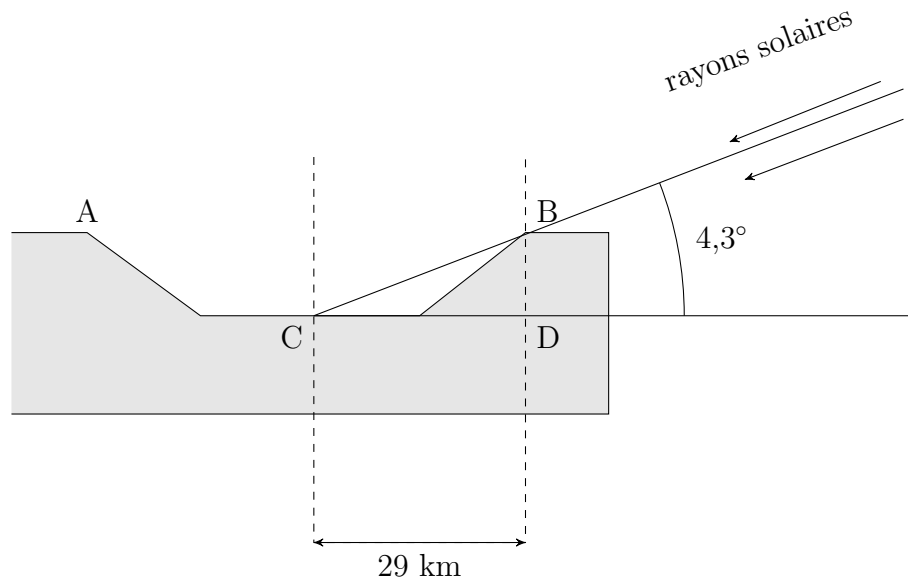
Masse (kg)	3	10	25	40	55
Poids (N)	5,1	17	42,5	68	93,5

(a) Est-ce que le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité ?

(b) Calculer l'accélération de la pesanteur sur la lune noté g_L

(c) Est-il vrai que l'on pèse environ 6 fois moins lourd sur la lune que sur la Terre ?

3 Le dessin ci-dessous représente un cratère de la lune. BCD est un triangle rectangle en D.



(a) Calculer la profondeur BD du cratère. Arrondir au dixième de km près.

(b) On considère que la longueur CD représente 20 % du diamètre du cratère. Calculer la longueur AB du diamètre du cratère.

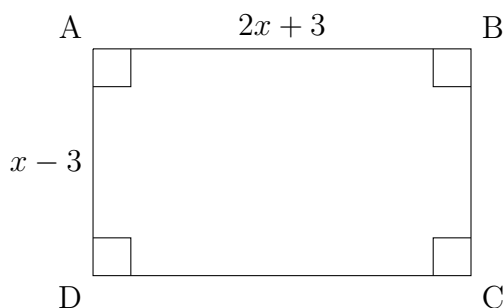
Exercice 4 (4 points)

On donne la feuille de calcul ci-contre.

La colonne B donne les valeurs de l'expression $2x^2 - 3x - 9$ pour quelques valeurs de x de la colonne A.

- 1 Si on tape le nombre 6 dans la cellule A 17, quelle valeur va-t-on obtenir dans la cellule B 17 ?
- 2 À l'aide du tableur, trouver 2 solutions de l'équation : $2x^2 - 3x - 9 = 0$.
- 3 L'unité de longueur est le cm.

Donner une valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle ci-dessous est égale à 5 cm^2 . Justifier.



	A	B
	x	$2x^2 - 3x - 9$
1	-2,5	11
2	-2	5
3	-1,5	0
4	-1	-4
5	-0,5	-7
6	0	-9
7	0,5	-10
8	1	-10
9	1,5	-9
10	2	-7
11	2,5	-4
12	3	0
13	3,5	5
14	4	11
15	4,5	18
16	5	26
17		

Exercice 5 (7 points)

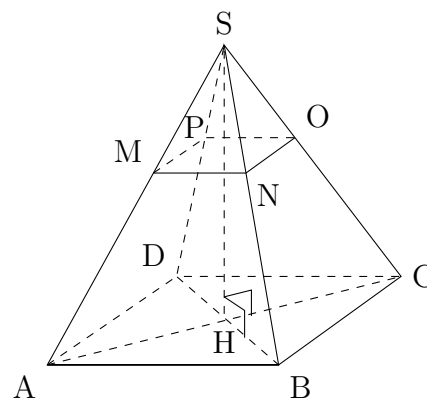
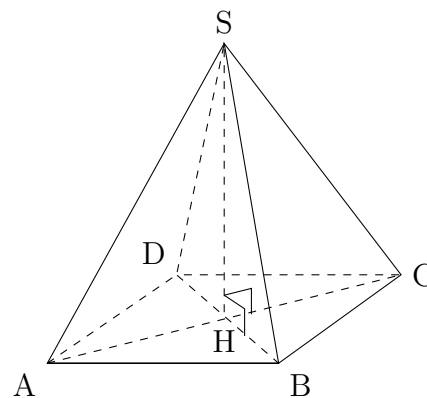
Une pyramide régulière de sommet S a pour base le carré ABCD telle que son volume V est égal à 108 cm^3 .

Sa hauteur [SH] mesure 9 cm.

Le volume d'une pyramide est donné par la relation :

$$\text{Volume d'une pyramide} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$

- 1 Vérifier que l'aire de ABCD est bien 36 cm^2 .
En déduire la valeur de AB.
Montrer que le périmètre du triangle ABC est égal à $12 + 6\sqrt{2} \text{ cm}$.
- 2 SMNOP est une réduction de la pyramide SABCD.
On obtient alors la pyramide SMNOP telle que l'aire du carré MNOP soit égale à 4 cm^2 .
 - (a) Calculer le volume de la pyramide SMNOP.
 - (b) **Pour cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.**
Élise pense que pour obtenir le périmètre du triangle MNO, il suffit de diviser le périmètre du triangle ABC par 3.
Êtes-vous d'accord avec elle ?



Exercice 6 (6 points)

Lancé le 26 novembre 2011, le Rover Curiosity de la NASA est chargé d'analyser la planète Mars, appelée aussi planète rouge.

Il a atterri sur la planète rouge le 6 août 2012, parcourant ainsi une distance d'environ 560 millions de km en 255 jours.

- 1 Quelle a été la durée en heures du vol ?
- 2 Calculer la vitesse moyenne du Rover en km/h. Arrondir à la centaine près.
- 3 *Pour cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation*
Via le satellite Mars Odyssey, des images prises et envoyées par le Rover ont été retransmises au centre de la NASA.
Les premières images ont été émises de Mars à 7 h 48 min le 6 août 2012.
La distance parcourue par le signal a été de 248×10^6 km à une vitesse moyenne de 300 000 km/s environ (vitesse de la lumière).
À quelle heure ces premières images sont-elles parvenues au centre de la NASA ? (On donnera l'arrondi à la minute près).

CORRECTION

Exercice 1 (5 points)

Affirmation 1 :

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) &= (\sqrt{5})^2 - 1^1 \\ &= 5 - 1 \\ &= 4.\end{aligned}$$

Ainsi, l'affirmation 1 est VRAIE.

Affirmation 2 :

Les diviseurs de « 4 » sont : 1, 2 et 4. Il y en a donc 3.

L'affirmation 2 est donc FAUSSE.

Affirmation 3 :

Un cube a 6 faces, une pyramide à base carrée en a 5 et un pavé droit en a 6. Il y a donc, en tout, 17 faces.

Ainsi, l'affirmation 3 est VRAIE.

Affirmation 4 :

Nous avons ici une configuration croisée de Thalès :

- A, O, C sont alignés dans cet ordre ;
- B, O, D sont alignés dans cet ordre ;

De plus,

$$\frac{OB}{OD} = \frac{2}{3,5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

et

$$\frac{OA}{OC} = \frac{2,8}{5} = \frac{28}{50} = \frac{14}{25}$$

Donc :

$$\frac{OB}{OD} \neq \frac{OA}{OC}$$

Ainsi, d'après la contraposée du théorème de Thalès, (AB) n'est pas parallèle à (DC).

L'affirmation 4 est donc FAUSSE.

Exercice 2 (8 points)

- 1** « Au plus 12 cm » signifie que le plantule a une taille inférieure ou égale à 12 cm. On compte alors :

$$1 + 2 + 2 = 5$$

Il y a donc 5 plantules dont la taille est au plus égale à 12 cm.

- 2** L'étendue de cette série est :

$$e = 22 - 0$$

Donc l'étendue de cette série est égale à 22.

3 La moyenne de cette série est : $m = \frac{0 \times 1 + 8 \times 2 + 12 \times 2 + 14 \times 4 + \dots + 22 \times 2}{1 + 2 + 2 + 4 + \dots + 2}$

$$= \frac{481}{29}$$

$$\approx 16,5862\dots$$

La moyenne est donc à peu près égale à 16,6 cm.

4 $\frac{29}{2} = 14,5$ donc la médiane est la 15^e valeur de la série, c'est-à-dire « 18 ».

Cela signifie que 50% des plantules ont une taille inférieure à 18 cm.

5 Il y a 5 plantules dont la taille est strictement inférieure à 14 cm, donc 24 plantules mesurent au moins 14 cm.

$$\frac{24}{29} \times 100 \approx 82,76$$

Il y a donc 82,76% des élèves qui ont bien respecté le protocole.

6 Deux cas sont possibles :

- La taille du plantule du professeur est strictement inférieure à la médiane actuelle (à savoir 18 cm).
Dans ce cas, l'effectif cumulé croissant correspondant à 17 est égal à 14. Or, $14 < 15$ (« 15 » étant la moitié de l'effectif total de la nouvelle série). Donc la médiane est toujours égale à 18.

- La taille du plantule du professeur est supérieure ou égale à la médiane actuelle (à savoir 18 cm).

Dans ce cas, la 15^e et 16^e valeur sont égales à 18, donc la médiane est aussi égale à 18.

Dans les deux cas, la médiane vaut 18.

Exercice 3 (6 points)

1 Sur la Terre, pour $m = 70$, on a :

$$P = 70 \times 9,8 \implies P = 686$$

Ainsi, le poids d'un homme dont la masse est 70 kg vaut 686 N.

2 (a) On a :

$$\frac{5,1}{3} = \frac{17}{10} = \frac{42,5}{25} = \frac{68}{40} = \frac{93,5}{55} = 1,7$$

Ainsi, ce tableau est bien un tableau de proportionnalité.

(b) g_L est le coefficient de proportionnalité pour passer de la masse au poids, donc $g_L = 1,7$.

(c) Dire que l'on pèse 6 fois moins lourd sur la Lune que sur la Terre signifierait que le poids sur la Lune (que je vais noter P_L) est égal au sixième de celui sur la Terre (noté P_T).

Or,

$$P_L = 1,7m \quad \text{et} \quad P_T = 9,1m$$

Donc :

$$\frac{P_T}{P_L} = \frac{9,8m}{1,7m} = \frac{9,8}{1,7} \approx 5,76 \approx 6$$

On peut donc en effet dire que nous pesons 6 fois moins sur la Lune que sur la Terre.

- 3** (a) Dans le triangle BCD rectangle en D :

$$\tan \widehat{BCD} = \frac{BD}{CD}$$

$$\tan(4,3^\circ) = \frac{BD}{29}$$

$$BD = 29 \times \tan(4,3^\circ)$$

$$BD \approx 2,18052 \dots$$

Ainsi, la profondeur du cratère est à peu près égale à 2,2 km.

- (b) 29 km représentent 20% de AB, soit le cinquième.

$$29 \times 5 = 145$$

Ainsi, AB = 145 km.

Exercice 4 (4 points)

Posons $f(x) = 2x^2 - 3x - 9$.

- 1** Dans la cellule B17, on verra apparaître l'image de 6 par la fonction f .

$$\begin{aligned} f(6) &= 2 \times 6^2 - 3 \times 6 - 9 \\ &= 72 - 18 - 9 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Ainsi, on verra la valeur 27 dans la cellule B17.

- 2** On cherche dans la colonne B les « 0 » : il sont obtenus pour $x = 3$ et $x = -1,5$.
Ainsi, les solutions de l'équation sont 3 et -1,5.

- 3** L'aire du rectangle ABCD est :

$$(2x + 3)(x - 3) = 2x^2 - 6x + 3x - 9 = 2x^2 - 3x - 9 = f(x).$$

On doit donc chercher dans la colonne B la valeur « 5 » : on trouve qu'elle est atteinte pour $x = 3,5$ et $x = -2$.

Or, si $x = -2$, $x - 3 = -5 < 0$ et un côté ne peut pas avoir une mesure négative.

Ainsi, pour $x = 3,5$, l'aire de ABCD est égale à 5 cm².

Exercice 5 (7 points)

- 1** D'après la formule, on a :

$$108 = \frac{\text{aire de ABCD} \times 9}{3}$$

Donc :

$$108 = 3 \times \text{aire de ABCD}$$

Ainsi,

$$\text{aire de ABCD} = \frac{108}{3} = 36$$

L'aire de ABCD est bien égale à 36 cm^2 .

L'aire d'un carré est égale au carré de la mesure d'un côté donc :

$$AB^2 = 36 \implies AB = \sqrt{36} = 6$$

Ainsi, $AB=6 \text{ cm}$.

Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$

$$AC^2 = 2 \times 6^2$$

$$AC = \sqrt{2 \times 6^2}$$

$$AC = 6\sqrt{2}$$

Donc, le périmètre du triangle ABC est :

$$6\sqrt{2} + 6 + 6 = 12 + 6\sqrt{2}.$$

Le périmètre est bien égal à $12 + 6\sqrt{2} \text{ cm}$.

2 (a) L'aire A_1 de MNOP est 4 cm^2 . L'aire A_2 de ABCD est 36 cm^2 .

Or, on sait que si k est le facteur de réduction, alors $A_1 = k^2 A_2$. D'où :

$$k^2 = \frac{A_1}{A_2}$$

$$k^2 = \frac{4}{36}$$

$$k = \sqrt{\frac{4}{36}}$$

$$k = \frac{2}{6}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

De plus, si V_1 est le volume de SMNOP et V_2 celui de SABCD, alors $V_1 = k^3 V_2$. Ainsi,

$$V_1 = \frac{1}{3^3} \times 108$$

$$V_1 = \frac{108}{27}$$

$$V_1 = 4$$

Ainsi, le volume de SMNOP est égal à 4 cm^3 .

(b) Le triangle MNO est une réduction de facteur $\frac{1}{3}$ du triangle ABC. Ainsi, les mesures de MNO sont égales au tiers de celles de ABC.

Élise a donc raison.

Exercice 6 (6 points)

- 1 Il y a 24 heures en 1 jour.

$$255 \times 24 = 6\,120$$

La durée de vol a donc été de 6 120 heures.

- 2 La vitesse moyenne est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{560\,000\,000}{6\,120} \\ &\approx 91\,503,267973856 \end{aligned}$$

Ainsi, la vitesse moyenne du Rover a été de 91 500 km/h.

- 3 On doit ici calculer la durée de la transmission.

$$\begin{aligned} 300\,000 &= \frac{248\,000\,000}{t} \\ t &= \frac{248\,000\,000}{300\,000} \\ t &\approx 827 \text{ s} \end{aligned}$$

Or, $827 = 13 \times 60 + 47$. Donc $827 \text{ s} = 13 \text{ min } 47 \text{ s}$.

$$\begin{array}{r} 7 \text{ h } 48 \text{ min } 00 \text{ s} \\ + \quad \quad 13 \text{ min } 47 \text{ s} \\ \hline 8 \text{ h } 01 \text{ min } 47 \text{ s} \end{array}$$

Les premières images sont donc arrivées à 8 h 01 min 47 s.