

Sujet d'entraînement

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

DNB 2015

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2015

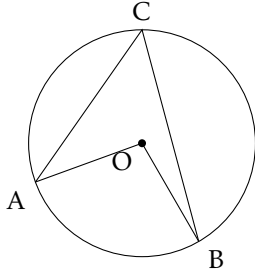
Exercice 1

Cet exercice est un QCM.

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste.

Sur votre copie, indiquer le numéro de la question et recopier l'affirmation juste.

On ne demande pas de justifier.

Questions	A	B	C	D
1. Si $f(x) = (2x - 1)^2 - 16$, alors $f(x) =$	$(2x - 5)(2x + 3)$	$(2x + 5)(2x - 3)$	$4x^2 - 17$	$4x^2 - 15$
2. Sur la figure suivante, $\widehat{AOB} = 100^\circ$. Que vaut alors $\widehat{ACB}$? 	200°	100°	50°	25°
3. Si $A(x) = 3x + 10$ et $B(x) = 8 + 5x$, alors $A(x) \geq B(x)$ pour $x =$	$x \leq 1$	$x \geq -1$	$x \geq 1$	$x > 1$

Exercice 2

On considère deux fonctions f et g pour lesquelles on a utilisé un tableur afin de construire un tableau de valeurs :

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-3	-2	-1	0	1	2
2	f(x)	9	7	5		1	-1
3	g(x)						

- On sait que f est une fonction affine.
 - D'après les valeurs du tableau ci-dessus, donner l'expression de $f(x)$.
 - Calculer la valeur manquante dans la cellule E2.
 - Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = -5$?
- On sait que $g(x) = x^2 + 1$.
 - Quelle formule doit-on entrer dans la cellule B3 pour qu'en la recopiant de gauche à droite, le tableur affiche sur la ligne 3 les images des valeurs de x de la ligne 1 ?
 - Qu'afficherait alors le tableur dans la cellule D3 ?

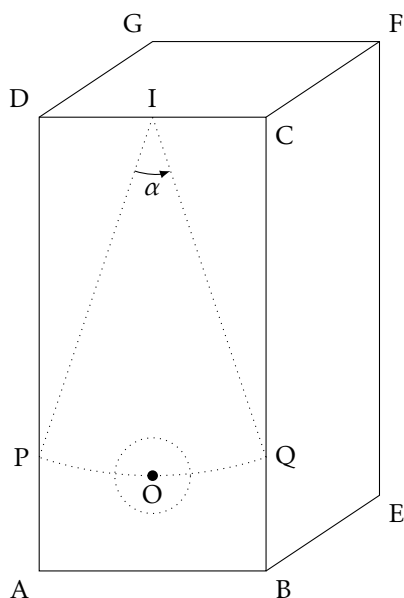
Exercise 3

Dans un collège, le principal a organisé un tournoi de culture générale. 119 filles et 85 garçons se sont inscrits. Le principal souhaite construire des équipes ayant le même nombre de filles et de garçons.

1. Peut-il faire 5 équipes?
2. Combien d'équipes au maximum pourra-t-il faire?
Combien y aura-t-il alors de garçons et de filles dans chaque équipe?

Exercise 4

Un fabricant d'emballages souhaite réaliser la boîte parallélépipédique en carton suivante :



On donne :

$AB = 6 \text{ cm.}$

$AD = 12 \text{ cm.}$

$BE = 6 \text{ cm.}$

$PA = 3,3 \text{ cm.}$

I est le milieu de $[DC]$.

O est au milieu de l'arc de cercle $\widehat{PQ}$ de centre I .

Le cercle de centre O a un rayon égal à 2 cm.

$$\alpha = \widehat{PIQ}.$$

Les traits en pointillés sont destinés à délimiter les parties qui pourront être facilement déchirées manuellement (le client peut appuyer sur le cercle de centre O et tirer la partie PIQ).

1. Volume de la boîte.

- Calculer le volume de cette boîte, exprimé en cm^3 .
- Convertir ce volume en litres.

2. Aire de la boîte.

Calculer l'aire de la surface de carton nécessaire à la fabrication d'une boîte, exprimée en cm^2 .

Afin de mieux voir les parties détachables de la boîte, le fabricant souhaite mettre une couleur différente sur ces parties (à l'intérieur des pointillés). Il veut donc calculer l'aire de la surface à colorier.

3. Aire de la partie à l'intérieur des pointillés.

- Calculer la mesure approchée au degré près de l'angle $\widehat{DIP}$.
En déduire celle de l'angle α .
- Calculer la longueur PI . Vous donnerez la valeur approchée au dixième.
- Déduire des questions 3.a et 3.b l'aire du secteur angulaire PIQ à l'intérieur des pointillés. Vous arrondirez au dixième le résultat.
- Même si ce n'est pas totalement exact, il estime que l'aire du demi-disque inférieur de centre O est égale à la moitié de l'aire du disque plein.
Donner une valeur approchée à 0,1 près de cette aire.
- Donner alors une valeur approchée à 0,1 près de l'aire de la surface à l'intérieur des pointillés.

4. Coût de fabrication de la boîte.

1 m² de carton coûte au fabricant 1,20 €.

À cela viennent s'ajouter les frais de colorisation :

- Il colorie en bleu la partie la plus importante ; cela lui coûte 1,80 € pour 1 m².
- Il colorie en violet la partie à l'intérieur des pointillés ; cela lui coûte 1,90 € pour 1 m².

Combien lui coûte la fabrication d'une boîte ?

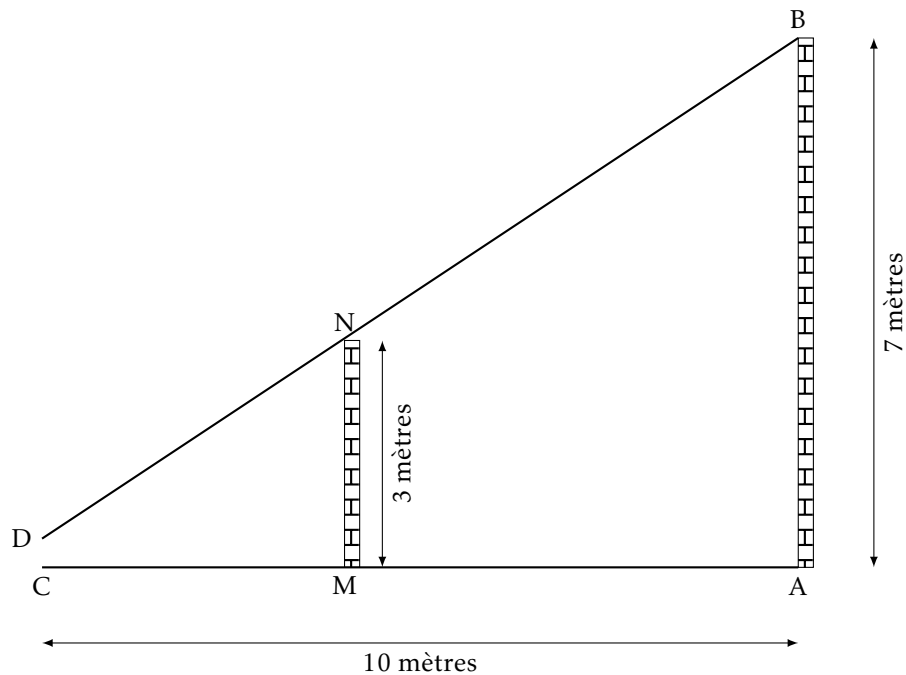
5. Réduction des coûts.

Estimant que cela est trop cher, il réduit les dimensions de 10%.

Quel est alors le nouveau coût de fabrication d'une boîte ?

Exercice 5

Un système automatisé (représenté en coupe ci-dessous) permet, à l'aide de rails, de bouger [MN] de sorte que [BD] puisse monter ou descendre.



Le point M peut aller de C à A et de A à C.

1. Lorsque M est en A, D est confondu avec C. Calculer alors la valeur exacte de BD.
2. Lorsque M bouge de A vers C, à quelle distance de C se trouve M pour que [BD] commence à se lever ? Arrondir au millimètre près.
3. À quelle hauteur se trouve D lorsque M est à 3 mètres de C ?
Pour cette question, on n'hésitera pas à prendre des initiatives et à compléter le schéma pour trouver des longueurs non représentées.

Exercice 6

L'équation des gaz parfaits est l'égalité :

$$PV = nRT,$$

où :

- P représente la pression, exprimée en Pa (Pascal) ;
- V représente le volume, exprimé en m^3 ;
- n représente la quantité de matière, exprimée en mol ;
- R est la constante des gaz parfaits ;
- T représente la température, exprimée en degrés Kelvin ($^{\circ}\text{K}$).

On rappelle que si C représente une température en degrés Celsius et K une température en degrés Kelvin, alors :

$$K = T + 273,15.$$

1. Sachant que pour un volume égal à 1,5 litre et soumis à une pression de 1,013 Pa, à température de 20°C , la quantité de matière est égale à $n = 6,234 \times 10^{-2}$ mol, montrer que $R = 8,314$.
2. Calculer la quantité de matière pour un volume de 30 m^3 , une pression de 3 Pa et une température de 300°K .

Corrigés

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

DNB 2015

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2015

Exercice 1

1. $f(x) = (2x - 1)^2 - 16$
 $= (2x - 1)^2 - 4^2$
 $= [(2x - 1) - 4][(2x - 1) + 4]$
 $= (2x - 1 - 4)(2x - 1 + 4)$ (les parenthèses à l'intérieur des crochets ne servent à rien, donc on peut les enlever)
 $= (2x - 5)(2x + 3)$

Il fallait donc répondre A.

2. $\widehat{AOB}$ est un angle au centre du cercle et $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit. Ils interceptent tous les deux le petit arc $\widehat{AB}$ donc $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$. Par conséquent, si $\widehat{AOB} = 100^\circ$, alors la mesure de $\widehat{ACB}$ sera égale à sa moitié. Donc $\widehat{ACB} = 50^\circ$.

Il fallait donc répondre C.

3. $A(x) \geq B(x) \iff 3x + 10 \geq 8 + 5x$
 $\iff 10 - 8 \geq 5x - 3x$
 $\iff 2 \geq 2x$
 $\iff \frac{2}{2} \geq x$
 $\iff x \leq 1.$

Il fallait donc répondre A.

Exercice 2

1. (a) On sait que $f(x) = ax + b$, car f est une fonction affine.
On sait aussi que $f(1) = 1$ donc $a \times 1 + b = 1$, soit $a + b = 1$.
On sait de plus que $f(2) = -1$ donc $a \times 2 + b = -1$, soit $2a + b = -1$.
On doit donc résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b &= 1 \\ 2a + b &= -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -a - b &= -1 \\ 2a + b &= -1 \end{cases} && \text{En multipliant la première ligne par } (-1) \\ &\iff \begin{cases} -a - b &= -1 \\ a &= -2 \end{cases} && \text{En ajoutant les deux égalités} \\ &\iff \begin{cases} -(-2) - b &= -1 \\ a &= -2 \end{cases} && \text{En remplaçant } a \text{ par } -2 \text{ dans la première égalité} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} -b &= -1 - 2 = -3 \\ a &= -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b &= 3 \\ a &= -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on arrive à : $f(x) = -2x + 3$.

(b) La valeur manquante dans la cellule E2 est $f(0) = -2 \times 0 + 3 = 3$.

(c) $f(x) = -5 \Leftrightarrow -2x + 3 = -5$

$$\Leftrightarrow -2x = -5 - 3$$

$$\Leftrightarrow -2x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8}{-2} = 4$$

Ainsi, pour $x = 4$, on a $f(x) = -5$.

2. (a) La formule à entrer dans la cellule B3 est :

$$=B1*B1+1$$

ou

$$=B1^2+1$$

(b) Dans la cellule D3, il y aurait $g(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Exercice 3

1. Le principal ne peut pas faire 5 équipes car le nombre 119 n'est pas divisible par 5. S'il faisait 5 équipes, le nombre de filles dans chaque équipe ($119 \div 5$) ne serait pas un nombre entier, ce qui n'est pas possible.
2. Pour savoir combien d'équipe au maximum le principal peut faire, calculons $\text{pgcd}(119; 85)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$119 = 1 \times 85 + 34$$

$$85 = 2 \times 34 + 17$$

$$34 = 2 \times 17 + 0$$

Ainsi, $\text{pgcd}(119; 85) = 17$. Le principal peut donc faire au maximum 17 équipes.

$119 \div 17 = 7$ et $85 \div 17 = 5$ donc dans chaque équipe, il y aura 7 filles et 5 garçons.

Exercice 4

1. (a) Le volume d'un parallélépipède rectangle est donné par la formule : $V = L \times \ell \times h$.

Ici, $V = 6 \times 6 \times 12 = 432 \text{ cm}^3$.

(b) On sait que $1 \text{ litre} = 1 \text{ dm}^3$ et $1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$.

Donc $432 \text{ cm}^3 = 432 \times 0,001 \text{ dm}^3 = 0,432 \text{ dm}^3$.

Le volume de la boîte est donc égal à 0,432 litre.

2.
 - L'aire de la face ABCD est égale à $6 \times 12 = 72 \text{ cm}^2$;
 - L'aire de la face BEFC est égale à $6 \times 12 = 72 \text{ cm}^2$;
 - L'aire de la face DCFG est égale à $6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$;

Donc l'aire de la boîte est : $(72 + 72 + 36) \times 2 = 360 \text{ cm}^2$.

3. (a) Dans le triangle DIP rectangle en D, $\tan \widehat{DIP} = \frac{DP}{DI} = \frac{12 - 3,3}{3} = 2,9$.

Donc $\widehat{DIP} \approx 71^\circ$.

Pour des raisons de symétrie, $\widehat{QIC} = \widehat{DIP}$ donc $\alpha = 180 - 2 \times 71 = 38^\circ$.

(b) Dans le triangle DIP rectangle en D, le théorème de Pythagore donne :

$$PI^2 = DI^2 + DP^2$$

$$PI^2 = 3^2 + (12 - 3,3)^2$$

$$PI^2 = 9 + 75,69$$

$$PI^2 = 84,69$$

$$PI = \sqrt{84,69}$$

$$PI \approx 9,2 \text{ cm.}$$

(c) L'aire d'un disque de rayon R est donnée par la formule πR^2 . En prenant $R = PI = 9,2$, on obtient : $\pi \times 9,2^2 = 84,69\pi \approx 266,1 \text{ cm}^2$.

Cette aire est obtenue pour un disque plein, donc pour un angle au centre de 360° . Pour obtenir l'aire correspondant à un angle de 71° , on utilise la proportionnalité :

360°	71°
$266,1 \text{ cm}^2$	$x \text{ cm}^2$

$$x = \frac{266,1 \times 71}{360} \approx 52,5$$

L'aire du secteur angulaire est donc à peu près égale à $52,5 \text{ cm}^2$.

(d) L'aire du disque de centre O est : $\pi \times 2^2 \approx 12,6 \text{ cm}^2$.

Donc l'aire du demi-disque inférieur est environ $6,3 \text{ cm}^2$.

(e) En ajoutant les deux aires des questions précédentes, on arrive à une aire de $52,5 + 6,3 = 58,8 \text{ cm}^2$.

L'aire à l'intérieur des pointillés est donc à peu près égale à $58,8 \text{ cm}^2$.

4. (a) • $360 \text{ cm}^2 = 0,036 \text{ m}^2$ et $1,20 \times 0,036 = 0,0432$.

La boîte coûte donc en carton $0,0432 \text{ €}$.

• $58,8 \text{ cm}^2 = 0,00588 \text{ m}^2$ et $1,90 \times 0,00588 = 0,011172$.

Donc la colorisation en violet coûte $0,011172 \text{ €}$.

• $360 - 58,8 = 301,2 \text{ cm}^2 = 0,03012 \text{ m}^2$ et $1,80 \times 0,03012 = 0,054216$.

La colorisation en bleu coûte donc $0,054216 \text{ €}$.

La boîte coûte donc au total $0,0432 + 0,011172 + 0,054216 \approx 0,11 \text{ €}$.

5. Si les dimensions sont réduites de 10% , alors elles sont multipliées par $0,9$ ($= 1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100} = 0,9$).

Si le facteur de réduction est égal à $0,9$, alors les aires sont multipliées par $0,9^2 = 0,81$.

Il faut donc multiplier l'ancien coût par $0,81$: $0,11 \times 0,81 \approx 0,09$.

Le nouveau coût de fabrication de la boîte est donc $0,09 \text{ €}$.

Exercice 5

1. Le triangle ABC (ou ABD) est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$BD^2 = 10^2 + 7^2$$

$$BD^2 = 149$$

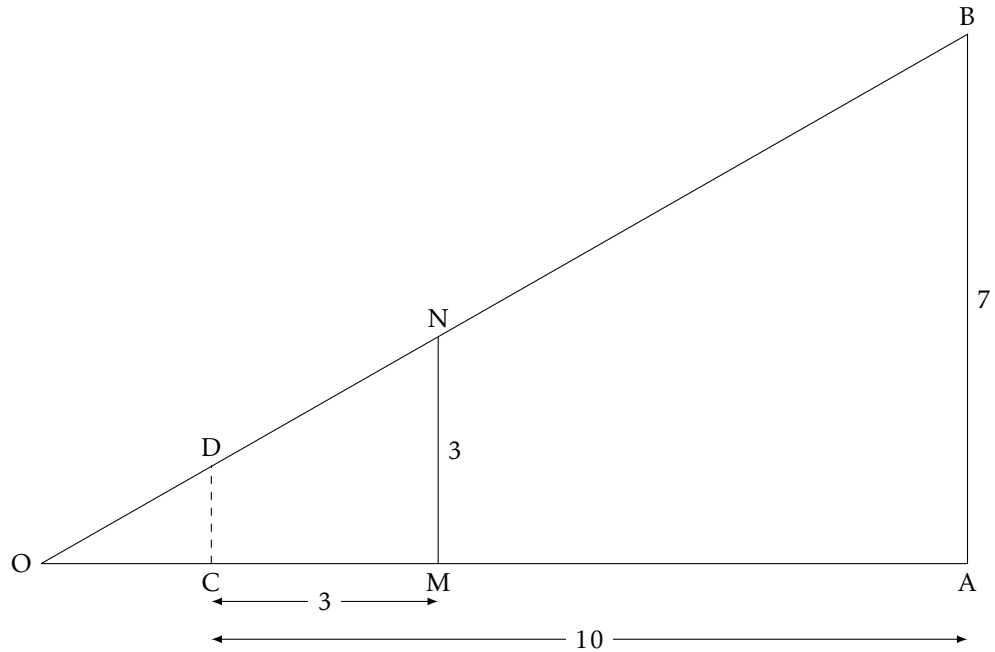
$$BD = \sqrt{149}$$

2. On nous demande ici à partir de quelle position le point N touche-t-il [BD]. Dans cette configuration, [MN] et [AB] sont parallèles, $M \in [AD]$ et $N \in [BD]$ donc on peut utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{DM}{DA} = \frac{MN}{AB} \iff \frac{DM}{10} = \frac{3}{7} \iff DM = \frac{10 \times 3}{7} = \frac{30}{7} \approx 4,286.$$

[DC] commencera à se lever lorsque M sera à $4,286$ mètres de C.

3. Complétons le schéma :



D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OM}{OA} = \frac{MN}{AB} \iff \frac{OC+3}{OC+10} = \frac{3}{7} \iff 7(OC+3) = 3(OC+10) \iff 7OC+21 = 3OC+30 \iff 4OC = 9$$

soit : $OC = \frac{9}{4}$.

Toujours d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OC}{OM} = \frac{DC}{MN} \iff \frac{\frac{9}{4}}{3+\frac{9}{4}} = \frac{DC}{3} \iff \frac{\frac{9}{4}}{\frac{21}{4}} = \frac{DC}{3} \iff \frac{9}{4} \times \frac{4}{21} = \frac{DC}{3} \iff \frac{3}{7} = \frac{DC}{3} \iff DC = \frac{3 \times 3}{7} = \frac{9}{7}.$$

Donc si M se trouve à 3 mètres de C, le point D se trouvera à 1,29 mètres du sol environ.

Exercice 6

1. On remplace P , V et T par leur valeur :

$$1,013 \times 1\,500 = 6,234 \times 10^{-2} \times R \times (20 + 273,15)$$

soit :

$$R = \frac{1,013 \times 1\,500}{0,06234 \times 293,15} = 8,314.$$

2. $n = \frac{PV}{RT}$ d'après la formule donc ici :

$$n = \frac{3 \times 30}{8,314 \times 300} \approx 3,61 \times 10^{-2}.$$