DIPLÔME NATIONAL DU BREVET
SESSION 2018

MATHEMATIQUES

Série générale

Durée de l'épreuve : 2 h 00 — 100 points

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de la **page 1 sur 6** à la **page 6 sur 6**.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

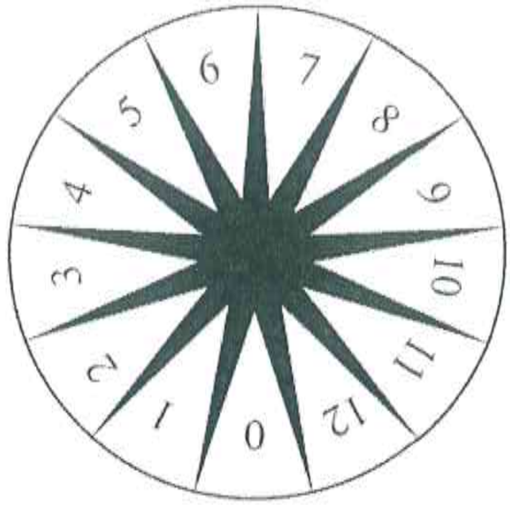
Le sujet est constitué de sept exercices indépendants.
Le candidat peut les traiter dans l'ordre qui lui convient.

Exercice n° 1	13 points
Exercice n° 2	9 points
Exercice n° 3	9 points
Exercice n° 4	18 points
Exercice n° 5	20 points
Exercice n° 6	15 points
Exercice n° 7	16 points

L'évaluation prend en compte la clarté et la précision des raisonnements ainsi que, plus largement, la qualité de la rédaction. Elle prend en compte les essais et les démarches engagées, même non aboutis.

Exercice 1 **(13 points)**

On considère un jeu composé d'un plateau tournant et d'une boule. Représenté ci-contre, ce plateau comporte 13 cases numérotées de 0 à 12.



On lance la boule sur le plateau. La boule finit par s'arrêter au hasard sur une case numérotée.

La boule a la même probabilité de s'arrêter sur chaque case.

1. Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur la case numérotée 8 ?

2. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur lequel la boule s'arrête soit un nombre impair ?

3. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur lequel la boule s'arrête soit un nombre premier ?

4. Lors des deux derniers lancers, la boule s'est arrêtée à chaque fois sur la case numérotée 9. A-t-on maintenant plus de chances que la boule s'arrête sur la case numérotée 9 plutôt que sur la case numérotée 7 ? Argumenter à l'aide d'un calcul de probabilités.

Exercice 2 **(9 points)**

Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.
Le motif pied-de-coq est représenté par le polygone ci-dessous à droite (figure 2) qui peut être réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

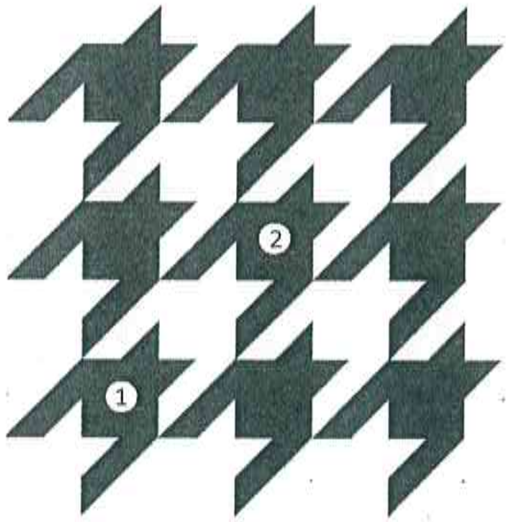


Figure 1

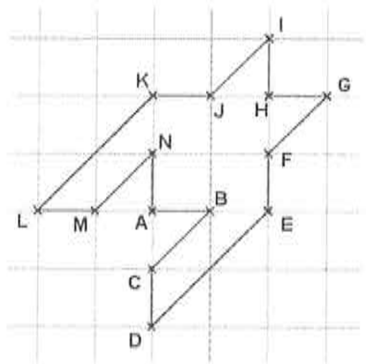


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?

2. Dans cette question, on considère que : AB = 1 cm (figure 2).
   Déterminer l'aire d'un motif pied-de-coq.

3. Marie affirme « si je divise par 2 les longueurs d'un motif, son aire sera aussi divisée par 2 ».
   A-t-elle raison ? Expliquer pourquoi.

Exercice 3 (9 points)

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées et une seule est exacte. Une réponse fausse ou absente n'enlève pas de point.

Pour chacune des trois questions, écrire sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la bonne réponse.

		Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
1	$2{,}53 \times 10^{15} =$	2,530 000 000 000 000 00	2 530 000 000 000 000	253 000 000 000 000 000	37,95
2	La latitude de l'équateur est :	0°	90° Est	90° Nord	90° Sud
3	$\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{7} =$	$\dfrac{3}{14}$	$\dfrac{1}{9}$	0,214 285 714	0,111 111 111

Exercice 4 (18 points)

Programme A	Programme B
• Choisir un nombre • Soustraire 3 • Calculer le carré du résultat obtenu	• Choisir un nombre • Calculer le carré de ce nombre • Ajouter le triple du nombre de départ • Ajouter 7

1. Corinne choisit le nombre 1 et applique le programme A. Expliquer en détaillant les calculs que le résultat du programme de calcul est 4.

2. Tidjane choisit le nombre -5 et applique le programme B. Quel résultat obtient-il ?

3. Lina souhaite regrouper le résultat de chaque programme à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous. Quelle formule, copiée ensuite à droite dans les cellules C3 à H3, a-t-elle saisie dans la cellule B3 ?

B2 =(B1-3)^2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Résultat du programme A	36	25	16	9	4	1	0
3	Résultat du programme B	7	5	5	7	11	17	25

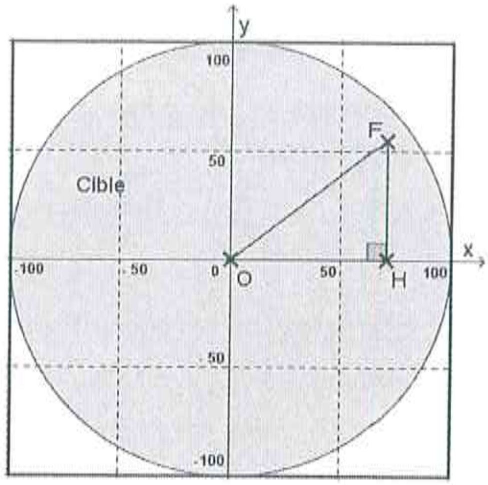
4. Zoé cherche à trouver un nombre de départ pour lequel les deux programmes de calcul donnent le même résultat. Pour cela, elle appelle x le nombre choisi au départ et exprime le résultat de chaque programme de calcul en fonction de x.

   a. Montrer que le résultat du programme A en fonction de x peut s'écrire sous forme développée et réduite : $x^2 - 6x + 9$.

   b. Écrire le résultat du programme B en fonction de x.

   c. Existe-t-il un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnent le même résultat ? Si oui, lequel ?

Exercice 5 (20 points)



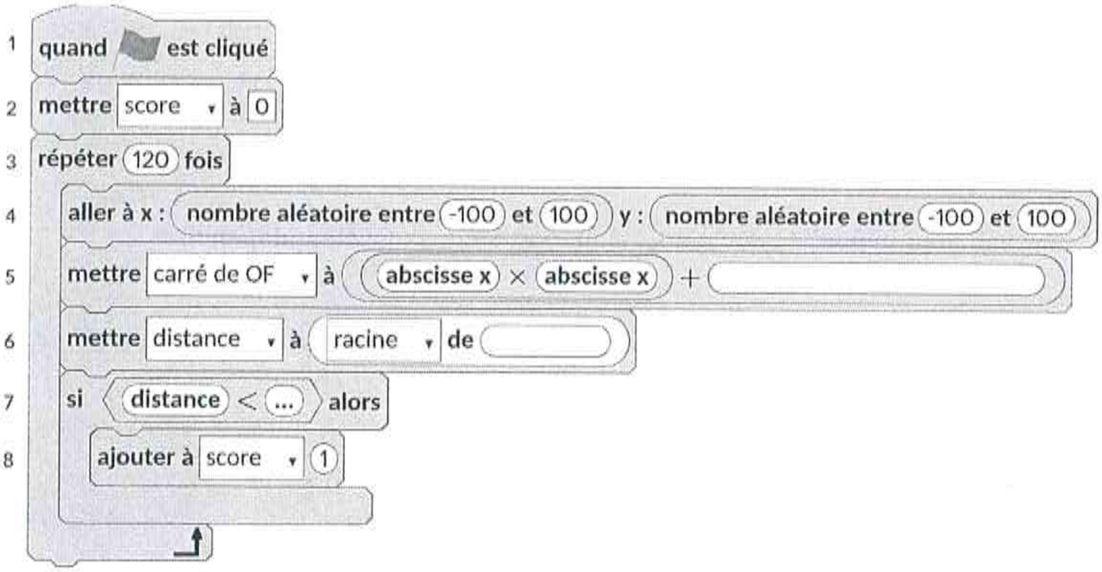
Dans tout l'exercice, l'unité de longueur est le mm.

On lance une fléchette sur une plaque carrée sur laquelle figure une cible circulaire (en gris sur la figure). Si la pointe de la fléchette est sur le bord de la cible, on considère que la cible n'est pas atteinte.

On considère que cette expérience est aléatoire et l'on s'intéresse à la probabilité que la fléchette atteigne la cible.

- La longueur du côté de la plaque carrée est 200.
- Le rayon de la cible est 100.
- La fléchette est représentée par le point F de coordonnées $(x\,;y)$ où x et y sont des nombres aléatoires compris entre -100 et 100.

1. Dans l'exemple ci-dessus, la fléchette F est située au point de coordonnées (72 ; 54).
   Montrer que la distance OF, entre la fléchette et l'origine du repère, est 90.
2. D'une façon générale, quel nombre ne doit pas dépasser la distance OF pour que la fléchette atteigne la cible ?
3. On réalise un programme qui simule plusieurs fois le lancer de cette fléchette sur la plaque carrée et qui compte le nombre de lancers atteignant la cible. Le programmeur a créé trois variables nommées : **carré de OF**, **distance** et **score**.



   a. Lorsqu'on exécute ce programme, combien de lancers sont simulés ?

   b. Quel est le rôle de la variable **score** ?

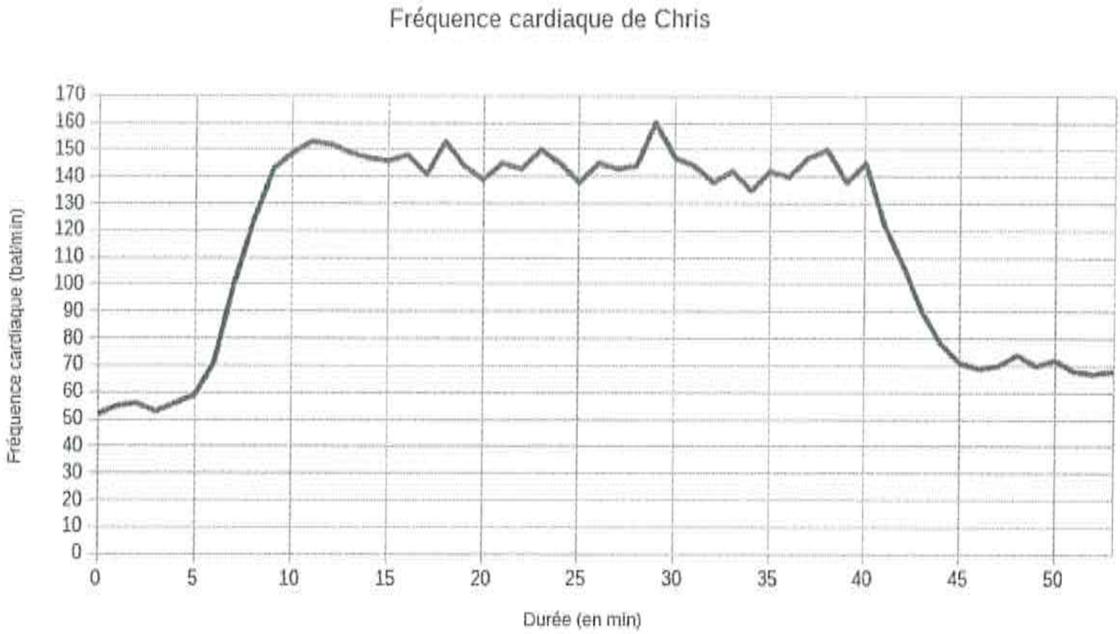
   c. Compléter et recopier sur la copie uniquement les lignes 5, 6 et 7 du programme afin qu'il fonctionne correctement.

   d. Après une exécution du programme, la variable **score** est égale à 102. A quelle fréquence la cible a-t-elle été atteinte dans cette simulation ? Exprimer le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

4. On admet que la probabilité d'atteindre la cible est égale au quotient : aire de la cible divisée par aire de la plaque carrée. Donner une valeur approchée de cette probabilité au centième près.

Exercice 6 (15 points)

Chris fait une course à vélo tout terrain (VTT). Le graphique ci-dessous représente sa fréquence cardiaque (en battements par minute) en fonction du temps lors de la course.



1. Quelle est la fréquence cardiaque de Chris au départ de sa course ?

2. Quel est le maximum de la fréquence cardiaque atteinte par Chris au cours de sa course ?

3. Chris est parti à 9 h 33 de chez lui et termine sa course à 10 h 26. Quelle a été la durée, en minutes, de sa course ?

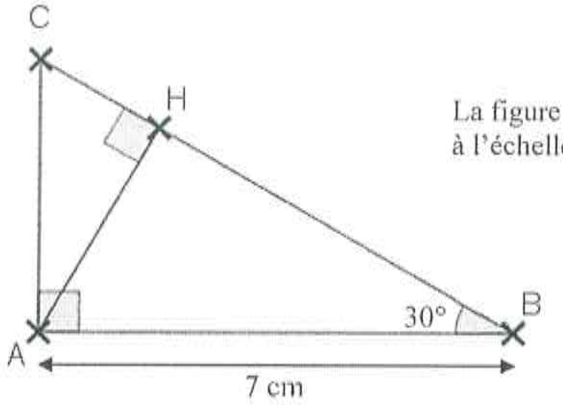
4. Chris a parcouru 11 km lors de cette course. Montrer que sa vitesse moyenne est d'environ 12,5 km/h.

5. On appelle FCM (Fréquence Cardiaque Maximale) la fréquence maximale que peut supporter l'organisme. Celle de Chris est FCM = 190 battements par minute. En effectuant des recherches sur des sites internet spécialisés, il a trouvé le tableau suivant.

Effort	léger	soutenu	tempo	seuil anaérobie
Fréquence cardiaque mesurée	Inférieur à 70 % de la FCM	70 à 85 % de la FCM	85 à 92 % de la FCM	92 à 97 % de la FCM

Estimer la durée de la période pendant laquelle Chris a fourni un effort soutenu au cours de sa course.

Exercice 7 (16 points)



La figure ci-contre n'est pas à l'échelle

On considère ci-dessus un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 30°$ et AB = 7 cm. H est le pied de la hauteur issue de A.

1. Tracer la figure en vraie grandeur sur la copie. Laisser les traits de construction apparents sur la copie.

2. Démontrer que AH = 3,5 cm.

3. Démontrer que les triangles ABC et HAC sont semblables.

4. Déterminer le coefficient de réduction permettant de passer du triangle ABC au triangle HAC.

Correction

Pondichéry - Mai 2018 - Mathématiques

Ce document est une correction commentée du sujet de brevet. Les commentaires ne font pas partie de la rédaction demandée lors de l'épreuve. Pour certains exercices plusieurs solutions sont proposées. Au brevet une seule solution est demandée et parfois même sans justification quand c'est précisé dans le sujet !

Exercice 1 : la roue à 13 cases

Connaissances :
- Probabilité, expérience aléatoire à une épreuve

1. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.
Il y a **13 cases** numérotées de 0 à 12 (et oui cela fait 13 !... on ne compte bien que depuis 1).
Il n'y a bien sûr qu'une seule case numérotées 8.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir un 8 est } \frac{1}{13} \approx 0,077 \approx 7,7\%}$

2. Entre 0 et 12 il y a 6 nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9, et 11.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir un nombre impair est } \frac{6}{13} \approx 0,462 \approx 46,2\%}$

3. Entre 0 et 13 il y a 6 nombres premiers : 2, 3, 5, 7 et 11 (attention 1 n'est pas premier).

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir un nombre premier est } \frac{5}{13} \approx 0,385 \approx 38,5\%}$

4. La probabilité d'obtenir une case parmi 13 est $\frac{1}{13}$. Le hasard n'a pas de mémoire, le fait d'obtenir 9 plusieurs fois de suite n'a pas d'influence sur les tirages suivants.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 7 ou 9 est donc la même : 1 chance sur 13}}$

Exercice 2 : le pavage pied de coq

Connaissances :
- Translation
- Aire
- Agrandissement/réduction

1. $\boxed{\text{C'est une translation.}}$

2. Chaque carré du quadrillage mesure 1 cm de côté et a donc une aire de 1 cm^2.
Il faut compter le nombre de carré contenu dans la figure.
Il y a 4 carrés complets et 8 demi-carrés soit 4 carrés complets.

$\boxed{\text{Le motif a une aire de 8 } cm^2}$

3. On sait que si on divise les longueurs d'une figure par 2 alors les aires sont divisées par $2^2 = 4$
On peut ici constater que si un carré de 1 cm a son côté divisé par 2, alors il mesure $0,5\ cm$ et son aire $0,5\ cm \times 0,5\ cm = 0,25\ cm^2$.
Ce qui confirme le résultat vu en classe exprimé précédemment !

$\boxed{\text{Marie à donc tort !}}$

Exercice 3 : QCM

Connaissances :
- Écriture scientifique
- Latitude
- Fractions

Aucune justification n'est demandée dans l'énoncé. Nous allons néanmoins donner les détails des calculs !

1. $2,53 \times 10^{15} = 2,53 \times 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 2\ 530\ 000\ 000\ 000\ 000$

$\boxed{\text{1.b}}$

2. $\boxed{\text{La latitude de l'équateur est } 0^o \text{ donc 2.a}}$

3. $\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{7} = \frac{\frac{4}{6}+\frac{5}{6}}{7} = \frac{\frac{9}{6}}{7} = \frac{9}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$

$\boxed{\text{3.a}}$

Exercice 4 : Deux programmes de calcul et un tableur

Connaissances :
- programme de calcul,
- tableur,
- développement,
- équation.

1. Dans le programme A en partant de 1 on obtient successivement :
$1-3=-2$ puis $(-2)^2=4$

$\boxed{\text{On obtient bien 4}}$

2. Dans le programme B en partant de -5 on obtient successivement :
$(-5)^2=25$ puis $25+3\times(-5)=25-15=10$ et enfin $10+7=17$

$\boxed{\text{On obtient 17}}$

3. $\boxed{=B1^2+3*B1+7}$

4.a En prenant x comme nombre de départ dans le programme A on obtient successivement :
$x-3$ puis $(x-3)^2$

$(x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2-3x-3x+9 = x^2-6x+9$

$\boxed{\text{On obtient donc } x^2-6x+9}$

Bien que les identités remarquables ne soient plus au programme du cycle 4 on pouvait les utiliser dans ce cas !

4.b En prenant x comme nombre de départ dans le programme B on obtient successivement :
x^2 puis x^2+3x et enfin x^2+3x+7

$\boxed{\text{On obtient donc } x^2+3x+7}$

4.c En observant le tableur on ne voit pas un tel nombre !
On peut faire des essais supplémentaires, mais la méthode la plus experte consiste à résoudre l'équation suivante où x désigne le nombre de départ (on utilise les expressions des questions **4.a** et **4.b**).

$$x^2-6x+9 = x^2+3x+7$$

Le terme en x^2 est commun au deux membres de l'équation, on peut donc l'enlever.

$$-6x+9 = 3x+7$$
$$-6x-3x = 7-9$$
$$-9x = -2$$
$$x = \frac{-2}{-9}$$
$$x = \frac{2}{9}$$

Le nombre $\frac{2}{9}$ est le seul qui permet d'obtenir le même résultat avec les programmes A et B.

Exercice 5 : Les flèchettes

Connaissances :
- coordonnées,
- théorème de Pythagore,
- cercle et rayon,
- Scratch.

Cet exercice est assez difficile, il utilise sans le dire et même en le démontrant dans un cas particulier, la distance euclidienne dans le plan dont la connaissance relève du programme de seconde !

1. Dans le triangle OHF rectangle en H nous avons $OH = 72$ et $HF = 54$.
D'après **le théorème de Pythagore** on a :

$$HO^2 + HF^2 = OF^2$$
$$72^2 + 54^2 = OF^2$$
$$OF^2 = 5\ 184 + 2\ 916$$
$$OF^2 = 8\ 100$$
$$OF = \sqrt{8\ 100}$$
$$OF = 90$$

Donc la distance entre la flèche et le centre du repère est 90

2. OF ne peut pas dépasser le rayon du cercle.

OF doit être inférieure à 100.

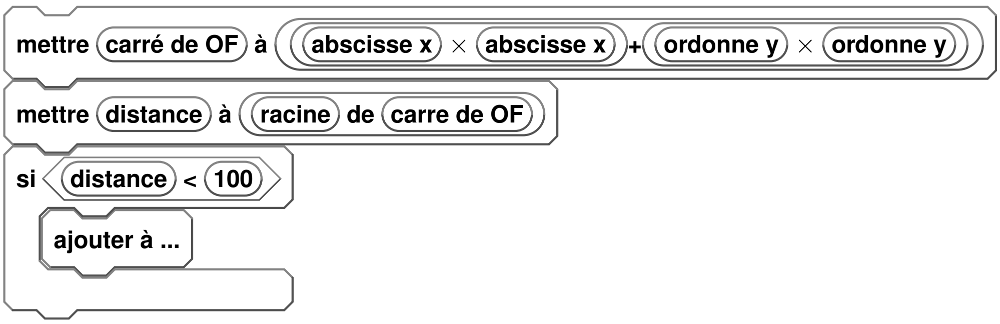
3.a Il est écrit :

L'expérience est donc répétée 120 fois.

3.b La variable **score** permet de compter le nombre de flèche dans la cible sur les 120 expériences.

3.c *Cette question est difficile même si on peut y répondre par imitation.*

Dans la question **1.** nous avons calculé la distance OF en partant d'un point de coordonnée $(72;54)$
Nous avons obtenu : $OF^2 = 72^2 + 54^2$ c'est à dire $OF^2 = abscisse \times abscisse + ordonne \times ordonne$
Puis nous avons calculé la racine carrée de OF^2.
Enfin à la question **2.** nous avons prouvé que la distance de la fléchette au centre doit être inférieure à 100
D'où la réponse suivante :



3.d Si score=102 cela signifie que sur 120 lancers, 102 sont arrivés dans la cible.

$\boxed{\text{La fréquence cherchée est } \frac{102}{120} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20} \text{ soit } 0,85 = 85\%}$

4. Il faut calculer l'aire du carré et l'aire du disque. L'aire d'un carré s'obtient en multipliant la longueur du côté par lui-même. L'aire d'un disque de rayon r s'obtient en calculant $\pi \times r^2$

Aire du carré : $200^2 = 40\,000$
Aire du disque : $\pi \times 100^2 = 10\,000\pi \approx 31416$

La probabilité cherchée est donc la fréquence : $\frac{31\,416}{40\,000} = 0,7854$

$\boxed{\text{Au centième prés la probabilité cherchée vaut } 0,79}$

C'est relativement proche de l'expérience menée avec Scratch !

Exercice 6 : la fréquence cardiaque

Connaissances :
- lecture graphique ;
- heures ;
- vitesse ;
- pourcentages.

1. $\boxed{\text{La fréquence cardiaque au départ est environ 52 battements par minute}}$

2. $\boxed{\text{Le maximum est environ 160 battements par minute}}$

3. Il part à 9 h 33 et arrive à 10 h 26. Il y a 27 min jusque 10 h puis 26 min de plus.

$\boxed{\text{Il a courru 53 } min}$

4. Il a parcouru 11 km en 53 min. On peut utiliser un tableau de proportionnalité ou l'expression $v = \frac{d}{t}$

Comme 1 $h = 60$ min on peut écrire le tableau de proportionnalité suivant :

Distance	11 km	$\dfrac{60\ min \times 11\ km}{53\ min} \approx 12,5\ km$
Temps	53 min	$1\ h = 60\ min$

En utilisant l'expression $v = \frac{d}{t}$ on obtient $\frac{11\ km}{53\ min} \approx 0,207\ km/min$
Comme 1 $h = 60$ min reste à calculer $0,207\ km \times 60 \approx 12,4\ km$
Ce calcul est très sensible aux arrondis !

$\boxed{\text{Sa vitesse moyenne est bien } 12,5\ km/h}$

5. Un effort soutenu correspond à une fréquence cardiaque comprise entre 70% et 85% de la fréquence cardiaque maximale.
$190 \times \frac{70}{100} = 133$ et $190 \times \frac{85}{100} = 161,5$

Par lecture graphique on voit qu'il dépasse les 130 battements entre la cinquième et la dixième minute et qu'il repasse en dessous des 130 entre la quarantième et quarante-cinquième minute. La fréquence cardiaque ne dépasse jamais les 161,5.
Plus précisement on peut dire qu'il dépasse les 133 à partir de 8 min et passe en dessous à partir de 41 min

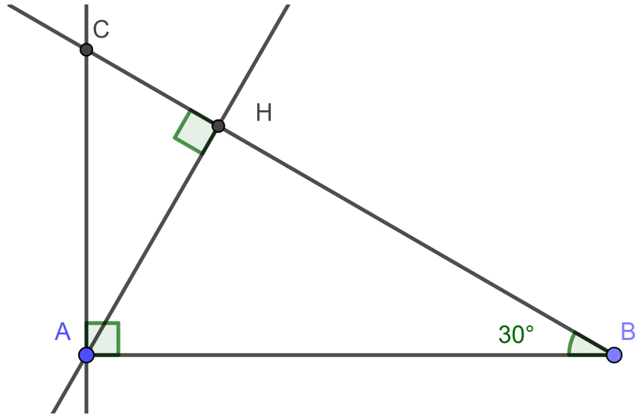
$\boxed{\text{Il a fourni un effort soutenu pendant environ 33 } min.}$

Exercice 7 : les triangles rectangles semblables

Connaissances :
- tracé géométrique ;
- trigonométrie ;

— triangles semblables ;
— coefficient d'agrandissement réduction.

1. Pour construire cette figure, on commence par tracer le segment $[AB]$, puis la demi-droite d'origine B constituant un angle de 30^o avec la demi-droite $[BA)$. On trace la perpendiculaire à (AB) passant par A, elle coupe la demi-droite précédente en C. Reste à tracer la perpendiculaire à (BC) passant par A, elle coupe (BC) en H.



2. C'est un raisonnement de trigonométrie.
Dans le triangle AHB rectangle en H
On connaît l'hypoténuse du triangle qui mesure 7 cm et on cherche le côté opposé à l'angle à 30^o.
On va donc utiliser le sinus de l'angle à 30^o.
$sin\ 30^o = \frac{AH}{7\ cm}$ d'où $AH = 7\ cm \times sin 30^o = 3,5\ cm$

$\boxed{AH = 3,5\ cm}$

3. Pour démontrer que les deux triangles sont semblables nous allons prouver que leurs trois angles sont égaux.
Dans le triangle ABC rectangle en A les angles aigus $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBA}$ sont complémentaires.
Ainsi $\widehat{ACB} = 90^o - 30^o = 60^o$

Le triangle ABC est constitué de trois angles mesurant respectivement 90^o, 60^o et 30^o.

Dans le triangle AHC rectangle en H les angles aigus $\widehat{ACH}$ et $\widehat{HAC}$ sont complémentaires.
Ainsi comme $\widehat{ACH} = \widehat{ACB} = 60^o$ on a $\widehat{HAC} = 90^o - 60^o = 30^o$

Le triangle AHC est constitué de trois angles mesurant respectivement 90^o, 60^o et 30^o.

$\boxed{\text{Les triangles } ABC \text{ et } AHC \text{ ont les mêmes angles : ils sont semblables !}}$

4. Il faut observer les angles à 30^o dans chacun des deux triangles.
Dans ABC l'angle à 30^o est composé du côté de l'angle droit $AB = 7\ cm$ et de l'hypoténuse BC.
Dans AHC l'angle à 30^o est l'angle $\widehat{HAC}$ constitué du côté de l'angle droit $AH = 3,5\ cm$ et de l'hypoténuse AC.

Le coefficient de réduction cherché permet de donc de passer de la longueur AB à la longueur AH.
Il s'agit du nombre k vérifiant :

$$7\ cm \times k = 3,5\ cm$$

$$k = \frac{3,5\ cm}{7\ cm} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$\boxed{\text{Le coefficient de réduction est } 0,5. \text{ Il est inférieur à 1, c'est bien une réduction !}}$