

Préparation au DNB

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Exercices

par
Stéphane PASQUET

19 juin 2014

Sommaire

Énoncés	2
1 Des vélos et des voitures	2
2 La société Electrix (inspiré du PISA 2012)	2
3 Débit d'une perfusion (PISA 2012)	2
4 La grande roue (inspiré de PISA 2012)	3
5 L'héritage	3
6 L'étagère	4
7 L'œuvre d'art	4
8 Les aménagements	5
9 De la musique	6
10 Baptiste le cycliste	7
11 Le calcul astucieux	7
12 Le pré d'Amédée	8
13 La tortue verte	8
Correction	10
1 Des vélos et des voitures	10
2 La société Electrix (inspiré du PISA 2012)	10
3 Débit d'une perfusion (PISA 2012)	11
4 La grande roue (inspiré de PISA 2012)	11
5 L'héritage	12
6 L'étagère	12
7 L'œuvre d'art	13
8 Les aménagements	14
9 De la musique	15
10 Baptiste le cycliste	16
11 Le calcul astucieux	17
12 Le pré d'Amédée	18
13 La tortue verte	20

Énoncés

1 Des vélos et des voitures

Le richissime monsieur Icks possède dans son garage des vélos et voitures.

On peut ainsi compter en tout 16 moyens de locomotion pour 58 roues.

Combien de voitures possède-t-il ?

2 La société Electrix (inspiré du PISA 2012)

La société Electrix fabrique deux types d'appareils électroniques : des lecteurs audio et des lecteurs vidéo. À la fin d'une journée de production, les lecteurs sont testés et ceux qui sont défectueux sont retirés et envoyés en réparation.

Le tableau suivant indique le nombre moyen de lecteurs de chaque type qui sont fabriqués par jour ainsi que le pourcentage moyen de lecteurs défectueux par jour.

Type de lecteur	Nombre moyen de lecteurs fabriqués par jour	Pourcentage moyen de lecteurs défectueux par jour
Lecteurs vidéo	2 000	5 %
Lecteurs audio	6 000	3 %

1. Voici trois affirmations sur la production d'une journée chez Electrix. Ces affirmations sont-elles correctes ?

- (a) Un tiers des lecteurs produits chaque jour sont des lecteurs vidéo.
- (b) Dans chaque lot de 100 lecteurs vidéo fabriqués, exactement 5 sont défectueux.
- (c) Si un lecteur audio est choisi au hasard parmi la production de la journée, la probabilité qu'il aura besoin d'être réparé est de 0,035.

2. L'un des testeurs affirme ceci :

« En moyenne, il y a plus de lecteurs vidéo envoyés chaque jour en réparation que de lecteurs audio envoyés chaque jour en réparation. »

Déterminez si le testeur a raison ou tort. Donnez un argument mathématique pour justifier votre réponse.

3 Débit d'une perfusion (PISA 2012)

Les infirmières doivent calculer le débit D d'une perfusion en gouttes par minute. Elles utilisent la formule :

$$D = \frac{dv}{60n}$$

où :

- d est le facteur d'écoulement en gouttes par millilitre (ml) ;
- v est le volume (en ml) de la perfusion ;
- n est le nombre d'heures que doit durer la perfusion.

1. Une infirmière veut doubler la durée de perfusion .

Décrivez avec précision la façon dont D change si n est doublé et si d et v ne changent pas.

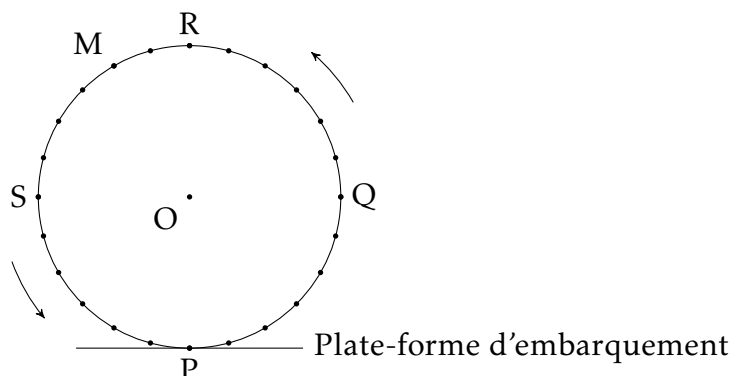
2. Les infirmières doivent aussi calculer le volume v de la perfusion en fonction du débit de perfusion D .

Une perfusion d'un débit de 50 gouttes par minute doit être administrée à un patient pendant 3 heures. Pour cette perfusion, le facteur d'écoulement est de 25 gouttes par millilitre.

Quel est le volume en ml de cette perfusion ?

4 La grande roue (inspiré de PISA 2012)

On a schématisé ci-dessous une grande roue.



Les points mis sur le cercle sont régulièrement espacés.

Le diamètre de la roue est 140 mètres.

La roue tourne à une vitesse constante dans le sens indiqué par les flèches et effectue un tour complet en 40 minutes.

1. Hugo embarque au niveau du point P.
 - (a) Où se trouvera-t-il une demie-heure plus tard ?
 - (b) Combien de temps lui faut-il pour passer du point P au point M ? On donnera le résultat en minutes et secondes.
2.
 - (a) Quelle est la nature du triangle QPR ?
 - (b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{PRQ}$, puis celle de l'angle $\widehat{PMQ}$?
3. Calculer le périmètre du carré PQRS. Arrondir au mètre près.

5 L'héritage

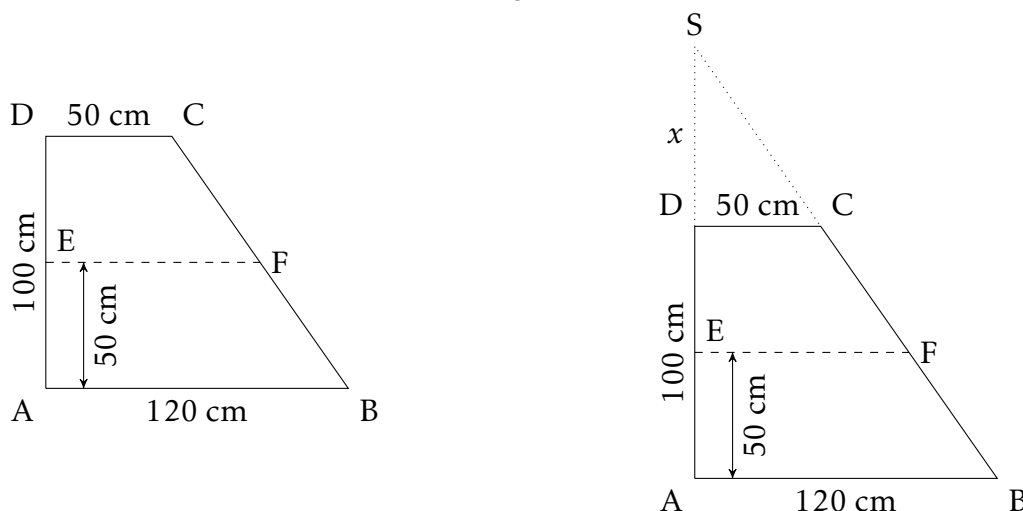
Madame Ygraic souhaite léguer son capital à ses enfants. Elle prépare pour cela son testament.

Elle veut répartir de façon équitable entre ses garçons la somme de 87 500 € et entre ses filles la somme de 62 500 € de sorte à donner le maximum à chacun et à ce que chacun de ses enfants ait la même somme d'argent.

1. Calculer la somme qu'hériterait chaque enfant.
2. Calculer le nombre de garçons et de filles qu'a madame Ygraic.

6 L'étagère

Arthur vient d'acheter une maison. Dans l'une des pièces se trouve, dans un mur, un espace creux en forme de trapèze dans lequel il souhaite mettre à mi-hauteur une étagère comme indiqué sur le schéma ci-dessous (schéma de gauche) :



Afin de déterminer la longueur EF de l'étagère, il s'aide du schéma de droite, où $x = SD$.

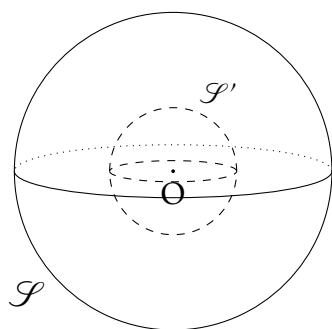
1. Montrer que $\frac{x}{x+100} = \frac{5}{12}$.

En déduire alors la valeur de x sous forme fractionnaire.

2. Calculer la valeur de EF.

7 L'œuvre d'art

Une œuvre d'art est constituée d'une sphère en verre $\mathcal{S}$ au centre de laquelle se trouve une autre sphère en verre $\mathcal{S}'$ qui est une réduction de $\mathcal{S}$. On l'a schématisé ci-dessous :



Partie A

1. L'artiste a souhaité que le volume de $\mathcal{S}'$ soit les huit cent-vingt-cinquièmes du volume de $\mathcal{S}$.

Que représente le rayon de $\mathcal{S}'$ par rapport à celui de $\mathcal{S}$?

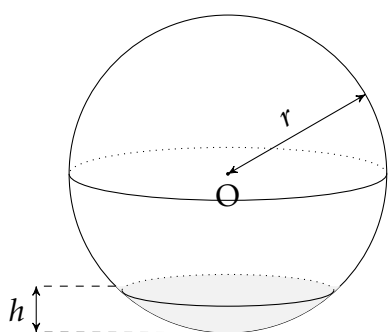
2. L'espace entre les deux sphères est rempli d'eau.

Sachant que le rayon de $\mathcal{S}$ est égal à 20 cm, calculer le volume d'eau contenu dans cette œuvre d'art, arrondi au cm^3 puis en litres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que le volume d'une calotte sphérique (partie grise du schéma ci-dessous) de hauteur h est donnée par la formule :

$$\mathcal{V}_{\text{calotte}} = \frac{\pi}{3} \times h^2(3r - h)$$



On note $f(h)$ le volume d'eau (en litres) dans l'œuvre d'art pour une hauteur de h cm en partant du bas.

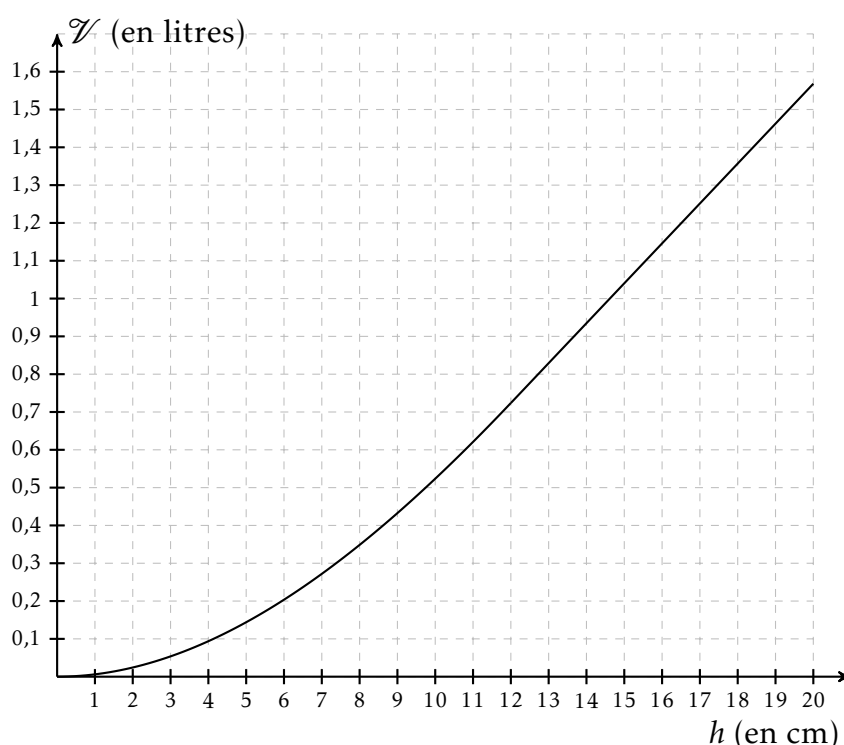
1. Pour quelles valeurs de h la fonction f est-elle définie ?
2. Justifier que pour $0 \leq h \leq 12$, $f(h) = \frac{\pi}{3\,000} \times h^2(60 - h)$.
3. Justifier que pour $12 \leq h \leq 20$,

$$f(h) = \frac{\pi}{3\,000} \left[h^2(60 - h) - (h - 12)^2(36 - h) \right],$$

puis :

$$f(h) = \pi(0,336h - 1,728).$$

On a représenté ci-dessous la fonction f pour $0 \leq h \leq 20$:



4. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
 - (a) Quel est le volume d'eau, en litres, contenu dans l'œuvre d'art pour une hauteur de 6 cm ?
 - (b) Pour quelle valeur de h le volume d'eau est-il égal à 1,3 litre ?
5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans la note finale.
 À partir de la question 4.a, déterminer le volume d'eau contenu dans cette œuvre d'art pour une hauteur de 34 cm. Arrondir au litre le plus proche.

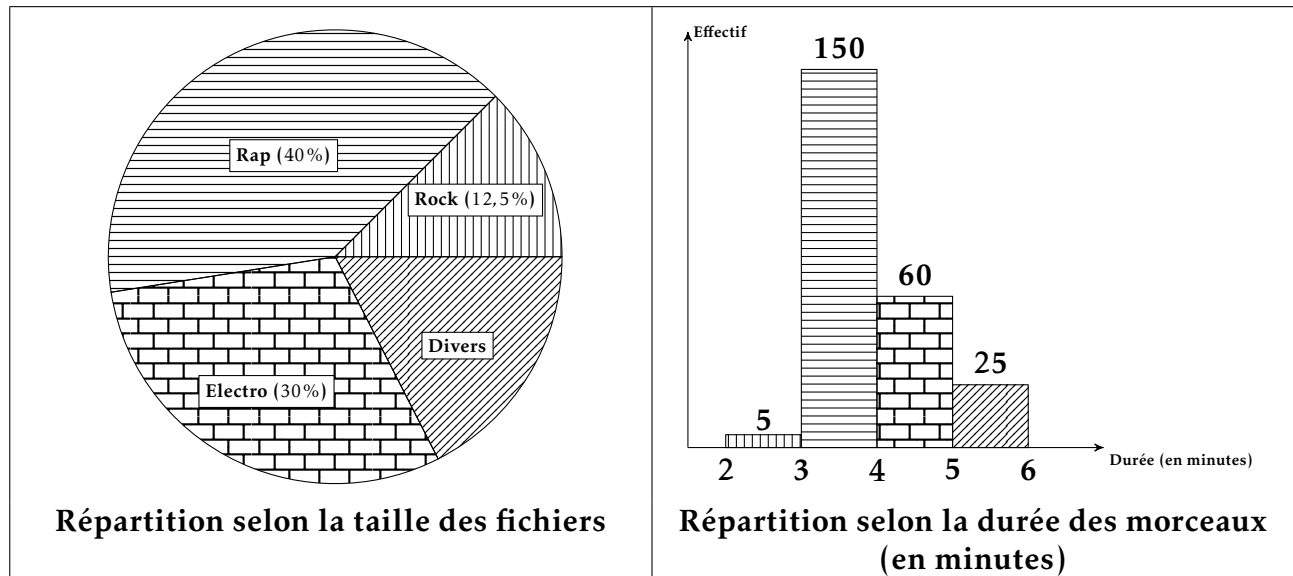
8 Les aménagements

Arthur et Zoé aménagent chacun de leur côté mais achètent chez un même commerçant les mêmes chaises et tables.

Arthur achète 4 chaises et une table ; il paie le tout 640 €.
 Zoé achète 14 chaises et 3 tables ; elle paie le tout 2 040 €.
 Combien coûtent une chaise et une table ?

9 De la musique

On a représenté ci-dessous la répartition des styles musicaux des chansons qui se trouvent dans le lecteur MP3 de Vincent selon la taille (en Mégaoctets, abrégé en : Mo) ou selon la durée (en minutes) :



1. Quel est le pourcentage de musiques de style « Divers » ?
2. Combien de titres possède Vincent ?
3. Combien de titres de Rap possède-t-il ?
4. Combien de titres qui durent entre 4 et 5 minutes a-t-il ?
5. Calculer la durée moyenne d'un titre. Donner le résultat en minutes et secondes.
6. Tous ces titres occupent 408 Mo.
Quel espace occupent les titres d'Electro ?
7. Vincent choisit au hasard un titre.
 - (a) Quelle est la probabilité pour que ce titre soit du Rap ?
 - (b) Quelle est la probabilité pour que ce titre dure plus de 4 minutes ?
8. Il choisit maintenant deux titres au hasard.
Quelle est la probabilité pour que les deux titres aient le même style (par exemple, 2 titres de rap) ?

10 Baptiste le cycliste

Baptiste a un vélo avec lequel il parcourt 1 km en 3 minutes. Il a remarqué que ses roues avaient fait 497 tours complets.

1. Calculer le rayon des roues de son vélo. Arrondir le résultat au centimètre.
2. Quelle a été sa vitesse moyenne (en km/h) sur ce parcours ?
3. Baptiste continue son chemin après ce kilomètre parcouru. Une fois revenu chez lui, à l'aide d'un compteur qu'il a relié à son ordinateur, il a pu obtenir le tableau suivant :

	A	B
1	Kilomètres parcourus	Temps (en minutes)
2	0	0
3	1	3
4	2	6,2
5	3	9,6
6	4	13,2
7	5	17

On pose $f(x)$ la fonction qui donne le temps (en minutes) nécessaire pour avoir parcouru x kilomètre(s).

(a) Expliquer pourquoi f n'est ni linéaire, ni affine.

On cherche à savoir si on peut poser, pour $x \geq 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois nombres à trouver.

(b) Que vaut $f(0)$? Montrer alors que $c = 0$.

(c) Que vaut $f(1)$? En déduire que $a + b = 3$.

(d) Montrer que $25a + 5b = 17$.

(e) Déduire des questions 3.c et 3.d les valeurs de a et b .

On admet que $f(x) = 0,1x^2 + 2,9x$.

4. Quel temps faut-il à Baptiste pour parcourir 11 kilomètres ?
5. Baptiste souhaite reproduire le tableau dans un tableur. Quelle formule peut-il entrer dans la cellule B2 pour que, par copier/glisser vers le bas, la colonne B donne le temps correspondant aux valeurs de la colonne A ?

11 Le calcul astucieux

Évariste est un génie. Aussi, quand son amie Sophie lui demande une astuce pour calculer $3,5 \times 4,5$, il lui dit :

« Prend le carré de 3, ajoute 3 puis la moitié de 3. Ensuite, quel que soit le nombre de départ, il faut toujours ajouter 0,3 125. »

1. Effectuer le calcul d'Évariste. Qu'obtient-on ?
2. Comment pourrait-on faire sans calculatrice pour effectuer l'opération $6,25 \times 7,25$?
3. Justifier, à l'aide d'un calcul algébrique, l'affirmation d'Évariste.

12 Le pré d'Amédée

Amédée possède un pré de forme circulaire. Il ne sait pas où est son centre. Ainsi, pour le trouver, il plante trois piquets au hasard (que l'on notera A, B et C) sur le périmètre de son pré puis il relie A et B, puis A et C. Il trace ensuite les médiatrices des segments [AB] et [AC].

1. Expliquer en quoi ceci permet de trouver le centre du pré. On pourra s'aider d'un dessin.

Il souhaite clôturer son pré de sorte à mettre 30 piquets régulièrement espacés sur le périmètre du cercle qui représente le pré. À l'aide du piquet A, il a mesuré le rayon et il a trouvé $R = 30$ mètres. On note les 30 piquets : A_1, A_2, A_3 , etc. jusqu'à A_{30} , puis on note O le centre du pré.

2. Que doit valoir l'angle $\widehat{A_1OA_2}$?

3. Quelle est la distance qui sépare deux piquets sur le périmètre, c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle $\widehat{A_1A_2}$? On arrondira le résultat au centimètre.

4. Amédée choisit un piquet au hasard.

(a) Expliquer la raison pour laquelle il existe toujours un piquet qui est diamétralement opposé à celui choisi.

(b) On note P le piquet choisi, S le piquet suivant et D le piquet diamétralement opposé à P.

Que vaut $\widehat{SDP}$?

(c) Calculer la mesure de $\widehat{OPS}$.

5. (a) Calculer la longueur du segment [PS].

On note d la différence entre la longueur du segment [PS] et celle de l'arc $\widehat{PS}$ (trouvée à la question 3.), exprimée en pourcentage par rapport à la longueur de l'arc $\widehat{PS}$.

(b) Calculer d au centième près.

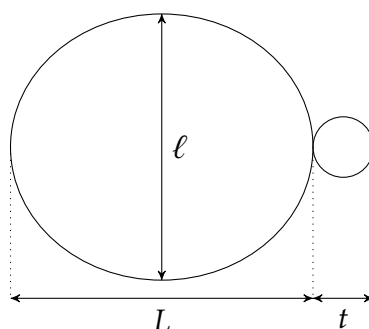
Expliquer alors pourquoi on peut dire que le périmètre du polygone dont les sommets sont les piquets est à peu près égal à celui du pré.

13 La tortue verte

« La tortue verte est la plus rapide des tortues marines : elle peut aller jusqu'à 35 km/h. Elle pèse entre 80 kg et 130 kg. Sa carapace ovale a une largeur d'environ 88 % sa longueur. Quant à sa tête, elle représente 20 % de la longueur de sa carapace. »

(Source : Wikipédia)

On a représenté ci-dessous une tortue de façon schématique.



Nous avons observé une telle tortue ; elle a laissé une trace de 110 cm de largeur. Nous l'avons chronométré pour voir qu'elle avait mis 10 minutes pour parcourir 6 km.

1. Calculer la longueur de cette tortue ainsi que celle de sa tête.
2. Cette tortue a-t-elle une vitesse similaire à celle donnée dans l'article de Wikipédia ?
Quelle est le pourcentage de différence entre sa vitesse et 35 km/h ?
3. L'aire d'un ovale est donnée par la formule :

$$\mathcal{A}_{\text{ovale}} = \pi \times \frac{\ell}{2} \times \frac{L}{2},$$

en utilisant les lettres du schéma donné précédemment.

- (a) Montrer que l'aire de la tortue observée (vue de haut) est à peu près égale à $\mathcal{A}_{\text{tortue}} = 1,129 \text{ m}^2$.
- (b) Pourquoi peut-on alors affirmer qu'en moyenne, une tortue pèse entre 71 kg/m² et 115 kg/m² ?
- (c) Une tortue a une aire égale à 1,625 m².
Donner un encadrement à l'unité de son poids.

Correction

1 Des vélos et des voitures

Notons x le nombre de voitures que possède monsieur Icks.

Comme il a 16 véhicules, le nombre de vélos peut s'exprimer par : $16 - x$.

Il y a 4 roues pour une voiture, donc le nombre total de roues de voitures est : $4x$;

Il y a 2 roues sur un vélo donc le nombre total de roues de vélos est : $2(16 - x) = 32 - 2x$.

Il y a en tout 58 roues donc :

$$4x + 32 - 2x = 58$$

Donc :

$$2x = 58 - 32$$

$$2x = 26$$

$$x = \frac{26}{2}$$

$$= 13$$

Monsieur Icks possède donc 13 voitures.

2 La société Electrix (inspiré du PISA 2012)

1. (a) **Faux.** Sont produits en tout $2\,000 + 6\,000 = 8\,000$ lecteurs par jour.

Ainsi, la proportion de lecteurs vidéos est : $\frac{2\,000}{8\,000} = \frac{1}{4}$, et non $\frac{1}{3}$.

- (b) **Faux.** Il y a 5% de lecteurs vidéo défectueux sur les 2 000, soit :

$$2\,000 \times \frac{5}{100} = 100.$$

Il y a donc 100 lecteurs vidéo défectueux sur les 2 000. Si l'on se ramène à 100 lecteurs vidéo :

100	x
2 000	100

On cherche la 4^e proportionnelle :

$$x = \frac{100 \times 100}{2\,000} = \frac{10\,000}{2\,000} = 10.$$

Il y a donc 10 lecteurs vidéo défectueux sur 100.

- (c) **Vrai.** Nous avons vu à la question précédente que sur 2 000 lecteurs vidéo, 100 étaient défectueux.

Sur les 6 000 lecteurs audio, il y en a :

$$6\,000 \times \frac{3}{100} = 180.$$

Il y a donc en tout $180 + 100 = 280$ appareils défectueux sur les 8 000. La proportion est donc :

$$\frac{280}{8\,000} \approx 0,035.$$

Cette proportion correspond à la probabilité pour qu'un appareil choisi au hasard soit défectueux.

2. Le testeur a tort. En effet, nous avons vu que 180 lecteurs audio étaient défectueux, contre 100 lecteurs vidéo.

3 Débit d'une perfusion (PISA 2012)

1. Si on double la valeur de n , D sera réduit de moitié.
2. De la formule du débit, on déduit :

$$v = \frac{60n \times D}{d} = \frac{60 \times 50 \times 3}{25} = 360.$$

Le volume est donc 360 ml.

4 La grande roue (inspiré de PISA 2012)

1. (a) La roue met 40 minutes pour faire un tour complet donc pour faire un quart de tour, elle met 10 minutes.
Donc, en 30 minutes, elle fait 3 quarts de tours.
Hugo se trouvera donc au point S.
- (b) L'angle $\widehat{ROM}$ mesure 30° , soit le tiers d'un quart de tour. Donc Hugo met le tiers de 10 minutes pour passer du point R au point M, soit 3,33 minutes, ou encore 3 minutes et $\frac{1}{3} \times 60$ secondes, donc 3 minutes 20 secondes.
Donc en tout, pour passer du point P au point M, il met à peu près 23 minutes 20 secondes.
2. (a) $[PR]$ est un diamètre du cercle et Q est sur ce même cercle.
Or, tout triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre de ce cercle est rectangle.
Donc PRQ est rectangle en Q.
De plus, $RQ = PQ$. Donc PRQ est rectangle isocèle.
- (b) Les angles $\widehat{PMQ}$ et $\widehat{PRQ}$ interceptent le même arc $\widehat{PQ}$ et sont inscrits dans le même cercle ; ils sont donc la même mesure.
Or, PRQ est un triangle isocèle rectangle en Q donc $\widehat{PRQ} = 45^\circ$.
Ainsi, $\widehat{PMQ} = 45^\circ$.
3. Posons $x = QR$.

Le triangle PQR est rectangle en Q donc d'après le théorème de Pythagore,

$$PR^2 = x^2 + x^2$$

donc :

$$140^2 = 2x^2$$

soit :

$$x^2 = \frac{140^2}{2}.$$

$$\text{Donc } x = \sqrt{\frac{140^2}{2}} = \frac{\sqrt{140^2}}{\sqrt{2}} = \frac{140}{\sqrt{2}} = \frac{140 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 70\sqrt{2}.$$

Le périmètre de PQRS est donc :

$$4x = 4 \times 70\sqrt{2} = 280\sqrt{2} \approx 396 \text{ m.}$$

5 L'héritage

1. On calcule PGCD(87 500; 62 500) à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$87\,500 = 62\,500 + 25\,000$$

$$62\,500 = 2 \times 25\,000 + 12\,500$$

$$25\,000 = 2 \times 12\,500 + 0$$

Ainsi, PGCD(87 500; 62 500) = 12 500.

Madame Ygraic donnera donc à chacun de ses enfants 12 500 €.

2. $\frac{87\,500}{12\,500} = 7$ et $\frac{62\,500}{12\,500} = 5$ donc madame Ygraic a 7 garçons et 5 filles.

6 L'étagère

1. Dans le triangle SAB, (DC) et (AB) sont parallèles (car perpendiculaires à (AD) toutes les deux). De plus, S, D, A d'une part, S, C, B d'autre part sont alignés dans cet ordre. Donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{SD}{SA} = \frac{DC}{AB}$$

soit :

$$\frac{x}{x+100} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}.$$

Ainsi,

$$12x = 5(100 + x)$$

soit :

$$12x = 500 + 5x$$

ou encore :

$$7x = 500.$$

Donc, $x = \frac{500}{7}$.

2. Dans le même triangle, toujours d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{SE}{SA} = \frac{EF}{AB}$$

donc :

$$\frac{x+50}{x+100} = \frac{EF}{120}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} EF &= \frac{120(x+50)}{x+100} \\ &= \frac{120\left(\frac{500}{7}+50\right)}{\frac{500}{7}+100} \\ &= \frac{120 \times \frac{850}{7}}{\frac{1\,200}{7}} \\ &= 120 \times \frac{850}{7} \times \frac{7}{1\,200} \\ &= \frac{120 \times 850}{1\,200} = 85. \end{aligned}$$

L'étagère mesure donc 85 mètres.

7 L'œuvre d'art

Partie A

1. On sait que si k est le facteur de réduction de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{S}'$, alors le volume de $\mathcal{S}'$ est égal à k^3 fois celui de $\mathcal{S}$.

$$\text{Ici, } k^3 = \frac{8}{125} = \frac{2^3}{5^3}. \text{ Donc } k = \frac{2}{5}.$$

Le rayon de $\mathcal{S}'$ représente donc les deux cinquièmes de celui de $\mathcal{S}$.

2. Le volume, en cm^3 , de $\mathcal{S}$ est donné par la formule :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \pi \times 20^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \times 8\,000 \\ &= \frac{32\,000}{3} \pi \end{aligned}$$

Le volume $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{S}'$ est, d'après la question 1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}' &= \frac{8}{125} \mathcal{V} \\ &= \frac{8}{125} \times \frac{32\,000}{3} \pi \\ &= \frac{256\,000}{375} \pi \end{aligned}$$

Ainsi, le volume entre les deux sphères est :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} - \mathcal{V}' &= \frac{32\,000}{3} \pi - \frac{256\,000}{375} \pi \\ &= \left(\frac{32\,000}{3} - \frac{256\,000}{375} \right) \pi \\ &= \left(\frac{32\,000 \times 125}{3 \times 125} - \frac{256\,000}{375} \right) \pi \\ &= \left(\frac{12\,000\,000}{375} - \frac{256\,000}{375} \right) \pi \\ &= \frac{9\,440\,000}{375} \pi \\ &\approx 91\,251 \end{aligned}$$

Le volume d'eau est donc $91\,251 \text{ cm}^3$, soit 91,251 L.

Partie B

1. f est définie pour $0 \leq h \leq 40$. En effet, h est un nombre positif et sa valeur maximale est le double du rayon de la grande sphère, soit $2 \times 20 = 40$.
2. Pour $0 \leq h \leq 12$, l'eau n'a pas atteint la petite sphère car cette dernière a un rayon de 8 cm, et $20 - 8 = 12$.

Donc, le volume d'eau est donné directement par la formule de l'exercice en prenant $r = 20$ (rayon de la grande sphère) et en divisant par 1 000 pour convertir en litres :

$$f(h) = \frac{\pi}{3} h^2 (3 \times 20 - h) \times \frac{1}{1\,000} = \frac{\pi}{3\,000} h^2 (60 - h).$$

3. Pour $12 \leq h \leq 20$, il faut enlever au volume de la calotte celui correspondant à la calotte de la petite sphère.

La hauteur de la calotte dans $\mathcal{S}'$ est $h - 12$ donc on remplace dans la formule h par $h - 12$ et r par 8 (qui est le rayon de $\mathcal{S}'$). Donc,

$$\begin{aligned} f(h) &= \underbrace{\frac{\pi}{3\,000} h^2 (60 - h)}_{\text{Volume normal sans } \mathcal{S}'} - \underbrace{\frac{\pi}{3\,000} (h - 12)^2 [3 \times 8 - (h - 12)]}_{\text{Volume de la calotte sphérique dans } \mathcal{S}'} \\ &= \frac{\pi}{3\,000} h^2 (60 - h) - \frac{\pi}{3\,000} (h - 12)^2 (24 - h + 12) \\ &= \frac{\pi}{3\,000} h^2 (60 - h) - \frac{\pi}{3\,000} (h - 12)^2 (36 - h) \\ &= \frac{\pi}{3\,000} [h^2 (60 - h) - (h - 12)^2 (36 - h)] \\ &= \frac{\pi}{3\,000} [60h^2 - h^3 - (h^2 - 24h + 12^2)(36 - h)] \\ &= \frac{\pi}{3\,000} [60h^2 - h^3 - (h^2 - 24h + 144)(36 - h)] \\ &= \frac{\pi}{3\,000} [60h^2 - h^3 - (36h^2 - h^3 - 864h + 24h^2 + 5\,184 - 144h)] \\ &= \frac{\pi}{3\,000} (60h^2 - h^3 - 36h^2 + h^3 + 864h - 24h^2 - 5\,184 + 144h) \\ &= \frac{\pi}{3\,000} (1\,008h - 5\,184) \\ &= \pi \left(\frac{1\,008}{3\,000} h - \frac{5\,184}{3\,000} \right) \\ \boxed{f(h) &= (0,336h - 1,728)\pi} \end{aligned}$$

4. (a) On lit $f(6) \approx 0,2$ donc le volume d'eau est égal à 0,2 L pour une hauteur de 6 cm.
 (b) Si $y = 1,3$, on lit $h \approx 17,5$ donc le volume d'eau est égal à 1,3 L pour une hauteur de 17,5 cm.
5. Pour une hauteur de 34 cm, il faut enlever au volume total d'eau (3,244 L) celui de la calotte sphérique correspondant à une hauteur de 6 cm, soit (d'après la question 4.a) 0,2 L.
 Cela fait donc à peu près 3 L.

8 Les aménagements

Posons :

- x le prix d'une chaise ;
- y le prix d'une table.

D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{cases} 4x + y = 640 & L_1 \\ 14x + 3y = 2040 & L_2 \end{cases}$$

Réolvons ce système à l'aide de la méthode par addition :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4x + y = 840 \\ 14x + 3y = 2040 \end{cases} & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \iff \begin{cases} 12x + 3y = 1920 \\ 14x + 3y = 2040 \end{matrix} & \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \end{matrix} \\
 & \iff \begin{cases} 12x + 3y = 1920 \\ 2x = 120 \end{cases} & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix} \\
 & \iff \begin{cases} 12x + 3y = 1920 \\ x = 60 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 3y = 1920 - 12 \times 60 \\ x = 60 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 3y = 1200 \\ x = 60 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} y = 400 \\ x = 60 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, une chaise coûte 60 € et une table coûte 400 €.

9 De la musique

1. On calcule :

$$100 - (12,5 + 40 + 30) = 100 - 82,5 = 17,5.$$

Il y a donc 17,5 % de titres de style « divers ».

2. On calcule :

$$5 + 150 + 60 + 25 = 240.$$

Donc Vincent possède 240 titres.

3. On calcule :

$$240 \times \frac{40}{100} = 24 \times 4 = 96.$$

Vincent possède donc 96 titres de rap.

4. On lit sur le graphique de droite : Vincent possède 60 titres qui durent entre 4 et 5 minutes.

5. On calcule la moyenne à partir du diagramme de droite :

$$\frac{2,5 \times 5 + 3,5 \times 150 + 4,5 \times 60 + 5,5 \times 25}{240} = \frac{945}{240} = 3,9375.$$

On a de plus : $60 \times 0,9375 = 56,25$.

Donc la durée moyenne est 3 minutes 56 secondes.

6. On calcule :

$$408 \times \frac{30}{100} = 122,4.$$

Ainsi, la musique électro occupe 122,4 Mo.

7. (a) Il y a 40 % de titres de rap donc la probabilité de choisir un morceau de rap est $\frac{40}{100}$, soit $\frac{2}{5}$.

(b) Il y a 85 morceaux qui durent plus de 4 minutes sur les 240 au total.

La probabilité qu'il choisisse un morceau qui dure plus de 4 minutes est donc $\frac{85}{240} = \frac{17}{48}$.

8. La probabilité que les deux titres soient du rap est : $0,4 \times 0,4 = 0,16$.

La probabilité que les deux titres soient du rock est : $0,125 \times 0,125 = 0,015\,625$.

La probabilité que les deux titres soient de l'électro est : $0,3 \times 0,3 = 0,09$.

La probabilité que les deux titres soient du style « divers » est : $0,175 \times 0,175 = 0,030\,625$.

On calcule alors :

$$0,16 + 0,015\,625 + 0,09 + 0,030\,625 = 0,296\,25.$$

La probabilité pour que les deux titres soient du même style est alors, arrondie au dixième, égale à 0,3.

10 Baptiste le cycliste

1. Le périmètre d'une roue de son vélo est : $P = 2\pi r$, où r représente le rayon (en centimètres) d'une roue.

Dans 1 km, il y a 497 fois P d'après l'énoncé.

1 km = 100 000 m ; de plus,

$$100\,000 \div 497 \approx 201,207\,243\,461.$$

Donc, $P = 201,207\,243\,461$.

Alors, $2\pi r = 201,207\,243\,461$, soit $r = \frac{201,207\,243\,461}{2\pi} \approx 32,02$.

Ainsi, une roue de vélo a un rayon de 32 cm.

2. La vitesse moyenne est donnée par la formule $v = \frac{d}{t}$ où d est la distance en km et t le temps en heures.

1 heure, c'est 60 minutes ; 3 minutes par rapport à 60 minutes, c'est : $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$. Donc,

$$v = \frac{1}{\frac{1}{20}} = 20.$$

La vitesse moyenne de Baptiste sur ce parcours a été 20 km/h.

3. (a) Si f était linéaire, il y aurait proportionnalité entre le nombre de kilomètres parcourus et le temps nécessaire pour les faire. Donc, si Baptiste met 3 minutes pour faire 1 km, il devrait faire 2 km en 6 minutes, ce qui n'est pas le cas.

Si f était affine, la différence entre deux temps consécutifs devrait être identique. Or, $6,2 - 3 = 3,2$ et $9,6 - 6,2 = 3,4$ donc f n'est pas linéaire.

(b) $f(0) = 0$ d'après le tableau. Or, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $c = 0$.

(c) $f(1) = 3$ d'après le tableau. Or, $f(1) = a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + 0$. Donc, $a + b = 3$.

(d) $f(5) = 17$ d'après le tableau. Or, $f(5) = a \times 5^2 + b \times 5 + 0 = 25a + 5b$. Donc, $25a + 5b = 17$.

(e) Il faut résoudre le système $\begin{cases} a + b = 3 \\ 25a + 5b = 17 \end{cases}$. On peut, pour cela, utiliser la méthode par addition :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b = 3 \\ 25a + 5b = 17 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} 25a + 25b = 75 \\ 25a + 5b = 17 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 25a + 25b = 75 \\ 20b = 58 \end{cases} \quad L_1 - L_2 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ b = \frac{58}{20} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ b = 2,9 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2,9 = 3 \\ b = 2,9 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0,1 \\ b = 2,9 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 0,1x^2 + 2,9x$.

4. $f(11) = 0,1 \times 11^2 + 2,9 \times 11 = 12,1 + 31,9 = 44$.

Il faut donc à Baptiste 44 minutes pour parcourir 11 kilomètres.

5. Baptiste doit entrer dans la cellule B2 la formule :

$$=0,1*A2*A2+2,9*A2$$

11 Le calcul astucieux

1. Le calcul d'Évariste est :

$$3^2 + 3 + \frac{3}{2} + 0,3125 = 9 + 3 + 1,5 + 0,3125 = 13,8125.$$

On peut alors dire que $3,5 \times 4,5 = 13,8125$ d'après Évariste.

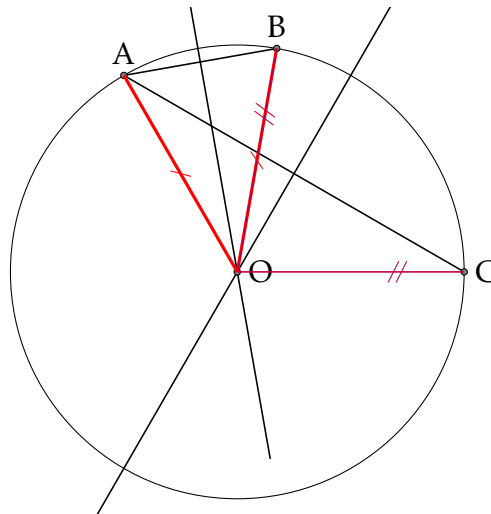
2. Si on s'inspire du calcul précédent, on pourrait faire :

$$6,25 \times 7,25 = 6^2 + 6 + \frac{6}{2} + 0,3125 = 36 + 6 + 3 + 0,3125 = 45,3125.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad (n + 0,25)(n + 1 + 0,25) &= (n + 0,25)(n + 1,25) \\ &= n^2 + 1,25n + 0,25n + 0,25 \times 1,25 \\ &= n^2 + 1,5n + 0,3125 \\ &= n^2 + n + 0,5n + 0,3125 \\ &= n^2 + n + \frac{n}{2} + 0,3125 \end{aligned}$$

12 Le pré d'Amédée

1. Représentons le près et les tracés par une figure :



Notons O le point d'intersection des médiatrices de [AB] et [BC].

O appartient à la médiatrice de [AB] donc $OA = OB$;

O appartient à la médiatrice de [BC] donc $OC = OB$;

Ainsi, $OA = OB = OC$; O est donc le centre du cercle de rayon OA (ou OB, ou OC).

2. Il faut 30 piquets donc on divise l'angle plein (360°) par 30 pour obtenir l'angle au centre :

$$\widehat{A_1OA_2} = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ.$$

Donc $\widehat{A_1OA_2} = 12^\circ$.

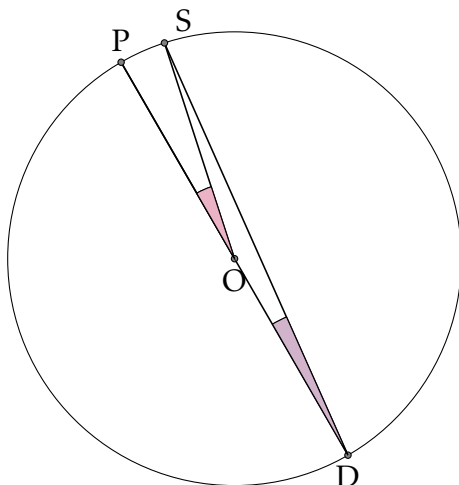
3. Pour savoir la distance entre deux piquets consécutifs (qui se suivent), on divise le périmètre du cercle par 30 :

$$\frac{2\pi \times 30}{30} \approx 6,28.$$

Chaque piquet est donc distant de 6,28 mètres.

4. (a) $180 \div 12 = 15$ donc, quel que soit le piquet choisi, le 14^e piquet sera à 180° , donc diamétralement opposé.

(b) Faisons un schéma :



L'angle au centre $\widehat{POS}$ intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{PDS}$ donc $\widehat{PDS} = \frac{1}{2}\widehat{POS}$, donc $\widehat{PDS} = 6^\circ$.

- (c) POS est isocèle en O car [OP] et [OS] représentent deux rayons du cercle, donc son de même longueur.

Or, dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure, et dans un triangle, la somme de la mesure des angles est égale à 180° donc :

$$\widehat{POS} + 2\widehat{OPS} = 180,$$

c'est-à-dire :

$$12 + 2\widehat{OPS} = 180$$

$$2\widehat{OPS} = 180 - 12$$

$$2\widehat{OPS} = 168$$

$$\widehat{OPS} = \frac{168}{2}$$

$$\widehat{OPS} = 84$$

Ainsi, $\widehat{OPS} = 84^\circ$.

5. (a) Le triangle PSD est inscrit dans le cercle de diamètre [PD] donc il est rectangle en S. Donc,

$$\sin \widehat{PDS} = \frac{PS}{PD}$$

$$\sin 6^\circ = \frac{PS}{60}$$

$$PS = 60 \sin 6^\circ$$

$$\boxed{PS \approx 6,27}$$

- (b) La différence entre PS et la longueur de $\widehat{PS}$ est :

$$6,28 - 6,27 = 0,01.$$

Donc,

$$d = \frac{0,01}{6,28} \times 100 \approx 0,16 \%.$$

La différence est donc 0,16 %, ce qui est très peu, ce qui justifie que l'on peut écrire :

$$A_1A_2 \approx \widehat{A_1A_2},$$

et donc :

$$30A_1A_2 \approx 30\widehat{A_1A_2}.$$

Or, $30\widehat{A_1A_2}$ représente le périmètre du cercle et $30A_1A_2$ celui du polygône régulier inscrit dans le cercle donc, si on note $\mathcal{P}_{\text{polyg\^one}}$ le périmètre du polygône et $\mathcal{P}_{\text{cercle}}$ celui du cercle,

$$\mathcal{P}_{\text{polyg\^one}} \approx \mathcal{P}_{\text{cercle}}.$$

13 La tortue verte

1. On sait d'après l'énoncé que $\ell = 0,88L$, donc $L = \frac{\ell}{0,88} = \frac{110}{0,88} = 125$.

Ainsi, la longueur de cette tortue est 125 cm.

On sait d'après l'énoncé que $t = 0,2L$, donc $t = 0,2 \times 125 = 25$.

Donc sa tête mesure 25 cm.

2. La vitesse moyenne de cette tortue est :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{t} \\ &= \frac{6}{\frac{1}{6}} \\ &= 6 \times 6 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Ainsi, sa vitesse est égale à 36 km/h, ce qui est similaire à celle donnée dans l'article (à savoir 35 km/h).

La différence est, en pourcentage :

$$\frac{36 - 35}{35} \times 100 = \frac{1}{35} \times 100 \approx 4\%.$$

3. (a) L'aire de la carapace est, d'après la formule de l'énoncé :

$$\mathcal{A}_{\text{carapace}} = \pi \times \frac{1,25}{2} \times \frac{1,10}{2} \approx 1,079\,921\,563 \text{ m}^2.$$

L'aire de la tête est celle d'un disque :

$$\mathcal{A}_{\text{tête}} = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \pi \times \left(\frac{0,25}{2}\right)^2 \approx 0,049\,087\,344 \text{ m}^2.$$

Ainsi, l'aire de la tortue est :

$$\mathcal{A}_{\text{tortue}} = \mathcal{A}_{\text{carapace}} + \mathcal{A}_{\text{tête}} \approx 1,079\,921\,563 + 0,049\,087\,344 \approx 1,129\,008\,907 \text{ m}^2.$$

Donc l'aire de la tortue (vu du haut) est bien environ égale à 1,129 m².

- (b) L'énoncé dit qu'une tortue pèse en moyenne entre 80 kg et 130 kg.

$$\frac{80}{1,129} \approx 70,86 \quad \text{et} \quad \frac{130}{1,129} \approx 115,15.$$

On peut donc dire, en en prenant les valeurs approchées à l'unité, qu'une tortue pèse entre 71 kg/m² et 115 kg/m².

- (c) On calcule :

$$71 \times 1,625 = 115,375 \quad ; \quad 115 \times 1,625 = 186,875.$$

Le poids de la tortue est donc compris entre 115 kg et 187 kg.