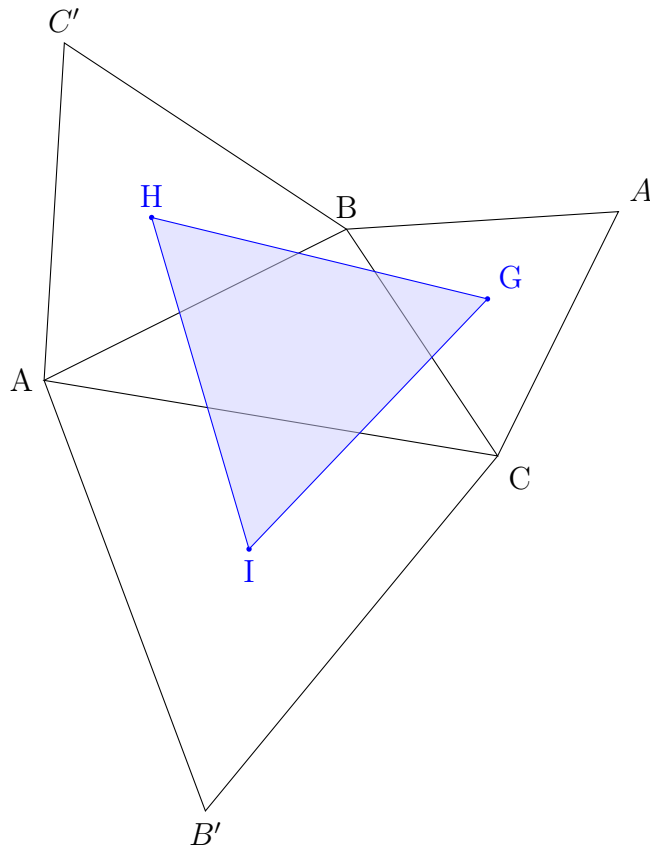


Théorème de Napoléon

Soit ABC un triangle quelconque.

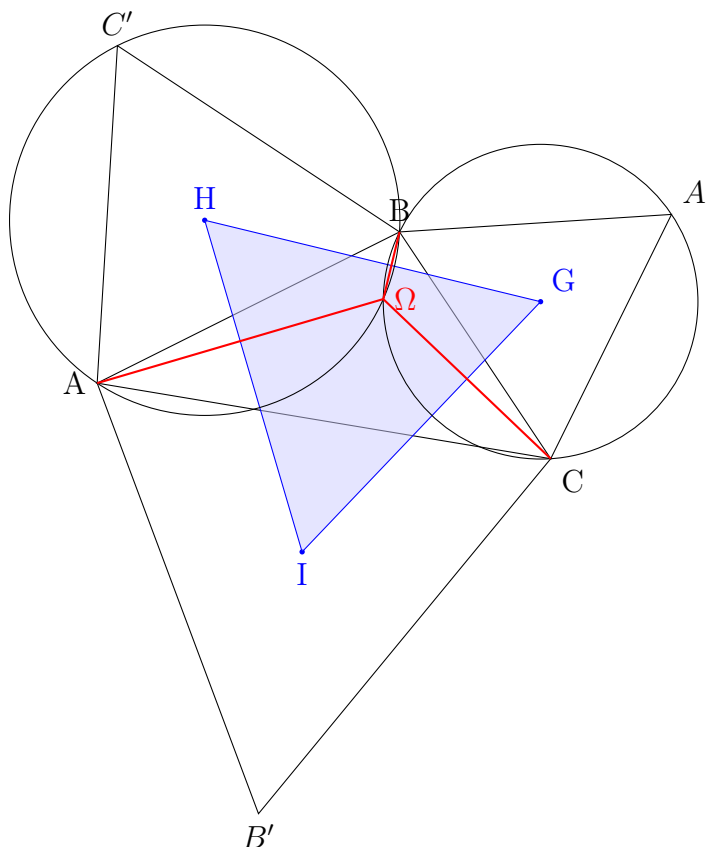
On construit les triangles équilatéraux ABC' , BCA' et ACB' , extérieurs à ABC . On note I , G et H les centres de gravité respectifs de ACB' , BCA' et ABC' . Le but est de montrer que IGH est équilatéral.

- 1 Dans un premier temps, montrez que dans un quadrilatère quelconque, la somme de la mesure des angles est égale à 360° .
- 2
 - a. On note Ω le point d'intersection (autre que B) du cercle circonscrit aux triangles ABC' et BCA' . Calculez la mesure des angles $\widehat{A\Omega B}$ et $\widehat{B\Omega C}$.
 - b. En déduire que Ω est aussi sur le cercle circonscrit au triangle ACB' .
- 3 Montrez que (GH) est la médiatrice de $[B\Omega]$ et que (IH) est celle de $[A\Omega]$.
- 4 Déduisez-en, à l'aide du résultat de la question 1, que IGH est équilatéral.



CORRECTION

- 1** Considérons un quadrilatère quelconque. Alors, on peut le décomposer en deux triangles. Or, dans un triangle, la somme de la mesure des angles est égale à 180° . Donc dans deux triangles, elle est égale au double, soit 360° .
- 2** *a.* Dans le cercle circonscrit au triangle ABC' , les angles $\widehat{AC'B}$ et $\widehat{A\Omega B}$ interceptent le même arc de cercle ; ainsi, d'après le théorème de l'angle inscrit, comme le point C' est sur le grand arc et Ω sur le petit, $\widehat{A\Omega B} = 180^\circ - \widehat{AC'B}$.



Or, $\widehat{AC'B} = 60^\circ$ car ABC' est équilatéral. Ainsi, $\widehat{A\Omega B} = 120^\circ$.

Par un raisonnement analogue, on montre que $\widehat{C\Omega B}$ est aussi égal à 120° .

- b.* Les angles $\widehat{A\Omega B}$, $\widehat{B\Omega C}$ et $\widehat{C\Omega A}$ sont adjacents et forment à eux trois un angle plein. Ainsi,

$$\widehat{A\Omega B} + \widehat{B\Omega C} + \widehat{C\Omega A} = 360^\circ.$$

Donc :

$$120^\circ + 120^\circ + \widehat{C\Omega A} = 360^\circ,$$

d'où :

$$\widehat{C\Omega A} = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ.$$

Ainsi,

$$\widehat{C\Omega A} = 120^\circ.$$

Or, $\widehat{AB'C} = 60^\circ$ (car ACB' est équilatéral) donc $\widehat{C\Omega A} = 180^\circ - \widehat{AB'C}$.

Ainsi, d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, Ω appartient au cercle circonscrit au triangle ACB' .

- 3** B et Ω appartiennent tous les deux aux cercles de centres respectifs H et G.

Ainsi, $BH = \Omega H$ et $GB = G\Omega$. Les points G et H sont donc équidistants des points B et Ω , ce qui signifie qu'ils appartiennent à la médiatrice de $[B\Omega]$.

Un raisonnement analogue montrerait que (IH) est la médiatrice de $[A\Omega]$.

- 4** Appelons F le point d'intersection de (GH) et (ΩB) et E celui de (ΩE) et (IH).

D'après la question 1, dans le quadrilatère $EHF\Omega$, on a l'égalité :

$$\widehat{EHF} + \widehat{HF\Omega} + \widehat{F\Omega E} + \widehat{\Omega EH} = 360^\circ,$$

soit :

$$\widehat{EHF} + 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ.$$

Ainsi,

$$\widehat{EHF} = 360^\circ - 90^\circ - 120^\circ - 90^\circ.$$

$$\widehat{EHF} = 60^\circ.$$

Un raisonnement analogue montrerait que $\widehat{HGI} = \widehat{GIH} = 60^\circ$.

Ainsi, le triangle IGH est équilatéral.