

Triangles isométriques Triangles semblables

Les transformations du plan ont permis de dégager des propriétés de figures superposables.

Le théorème de Thalès a permis de s'initier aux notions de réduction ou d'agrandissement dans certaines situations bien particulières générées par des droites parallèles.

Dans ce chapitre naît une nouvelle idée ; celle de figures qui ont « la même forme » sans être nécessairement dans une configuration de Thalès.



Les contenus

Triangles isométriques	p. 230
Triangles semblables	p. 232
Les modules	
Longueurs	p. 234
Angles	p. 234
Aires	p. 235

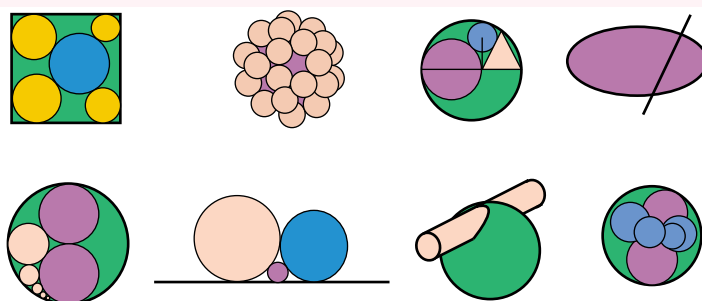
De même forme et en plein vol

GÉOMÉTRIE



Pythagore, Thalès, Euclide sont des noms connus de tous et on pourrait penser que la géométrie est essentiellement une affaire de Grecs, de préférence anciens. On a bien sûr entendu parler de Chasles et de Descartes qui redorent le blason national et il semble bien que la géométrie soit une discipline très localisée dans nos contrées à culture occidentale ou arabe.

C'est évidemment faux. Au Japon, par exemple, existe une curieuse **tradition géométrique** : les « sangaku » (littéralement tablettes mathématiques).



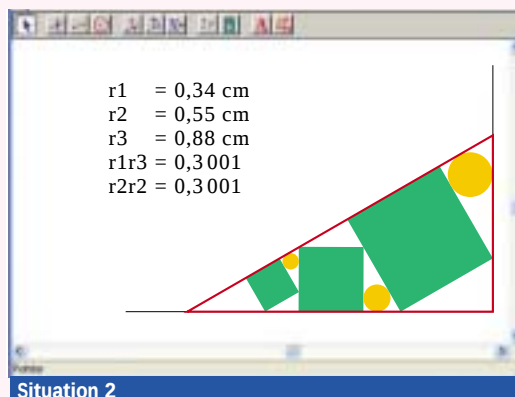
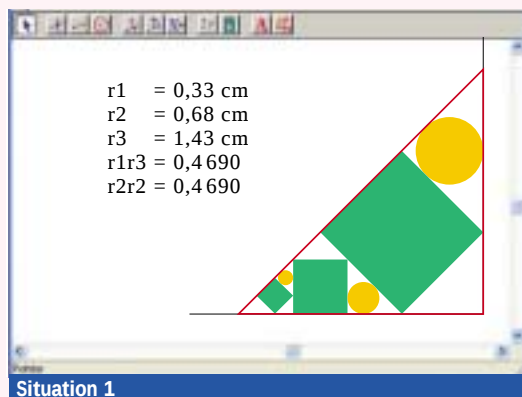
Problèmes géométriques provenant de « sangaku »

De 1639 à 1854, le Japon ferma ses frontières et le pays vécut en autarcie scientifique et culturelle. Naquit alors une tradition surprenante : toutes les classes de la société (du samouraï au paysan) ont rivalisé d'astuce pour **concevoir et résoudre des problèmes géométriques**, faisant souvent intervenir des cercles.

Ils inscrivaient les résultats sur des plaquettes, suspendues ensuite aux toits des édifices religieux. Selon les cas, ils s'agissaient d'offrandes aux divinités ou de défis aux autres visiteurs des lieux saints.

À l'aide d'un logiciel de géométrie, nous nous sommes intéressés à l'un de ces problèmes. Nous obtenons les écrans ci-dessous :

Indication : le logiciel n'indique que des valeurs approchées.



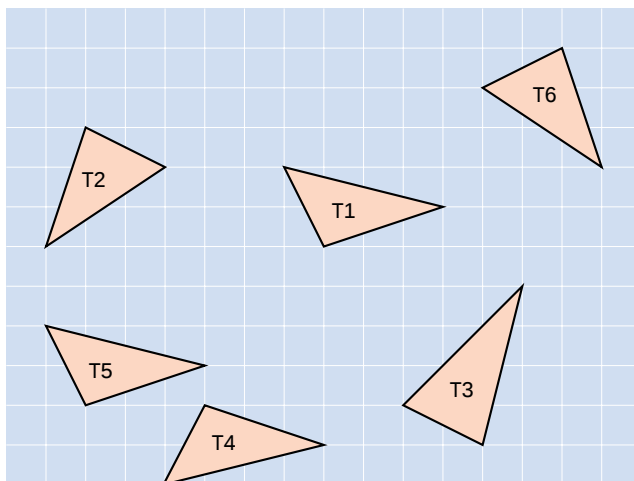
Commenter ces deux copies d'écran.

Que peut-on conjecturer concernant les rayons des 3 cercles ?

Pour la démonstration, rendez-vous au TD 2. Et pour les passionnés, de nombreux problèmes de « sangaku » ainsi que leurs solutions sont accessibles sur internet et dans la revue *Pour la science* n° 249 de juillet 1998.

Activité 1 Triangles superposables

- 1. a.** Construire sur une feuille de papier un triangle superposable à T1. Colorier en rouge l'une des faces et en bleu l'autre face.
- b.** À l'aide du gabarit ainsi obtenu, désigner les triangles superposables à T1 dans la figure ci-dessous. Expliquer pourquoi on peut affirmer qu'il y a deux manières d'« être superposables ».



- 2. a.** Reproduire sur quadrillage le triangle T1.
- b.** Placer un point M sur un nœud du quadrillage.
De combien de manières peut-on choisir deux nœuds du quadrillage pour obtenir un triangle superposable à T1 et de sommet M ?

Activité 2 Triangles isométriques, triangles de même forme

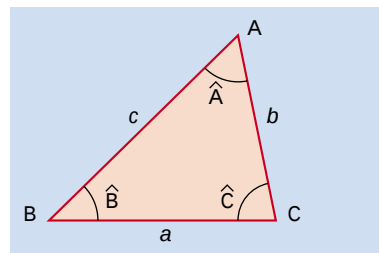
On considère un triangle ABC représenté ci-dessous :

- 1.** Construire un tel triangle ABC en tenant compte des trois données fournies :

$$a = 6 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}, c = 7 \text{ cm}.$$

Comparer le triangle obtenu à ceux obtenus par les autres élèves de la classe.

INDICATION : on pourra, par exemple, procéder à des découpages et des essais de superposition.



- 2.** Suivre la même procédure dans chacun des cas suivants.

- | | |
|--|--|
| a. $a = 6 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}, \hat{C} = 55^\circ$ | b. $a = 5 \text{ cm}, \hat{B} = 50^\circ, \hat{C} = 60^\circ$ |
| c. $a = 5 \text{ cm}, \hat{A} = 40^\circ, \hat{B} = 55^\circ$ | d. $\hat{A} = 40^\circ, \hat{B} = 60^\circ$ (et $\hat{C} = 80^\circ$). |

1 Triangles isométriques

DÉFINITION 1

Deux triangles isométriques sont deux triangles qui ont leurs côtés deux à deux de même longueur.

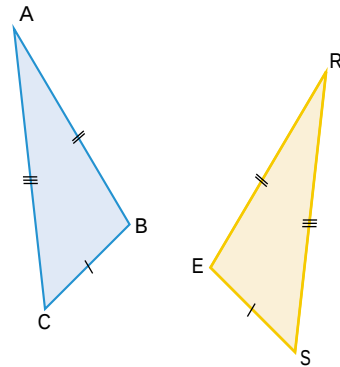
Vocabulaire

Le terme *iso* est employé pour égal.

Le terme *métrique* est employé pour mesure.

EXEMPLE : Puisque $AB = ER$, $BC = ES$ et $AC = RS$, les triangles ABC et RES sont isométriques.

Deux triangles sont **isométriques** s'ils sont **superposables, soit par glissement soit par retournement puis glissement** de la feuille de calque.



THÉORÈME 1

Si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

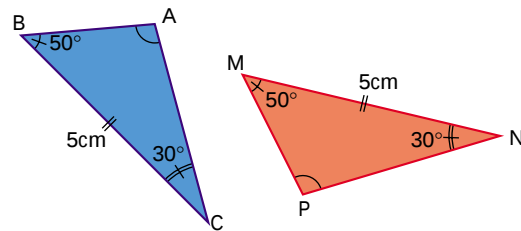
Note

Une démonstration des théorèmes 1 et 2 est proposée aux exercices 20 et 21.

EXEMPLE :

$BC = MN$
 $\widehat{B} = \widehat{M}$
 $\widehat{C} = \widehat{N}$

donc ABC et PMN sont isométriques.



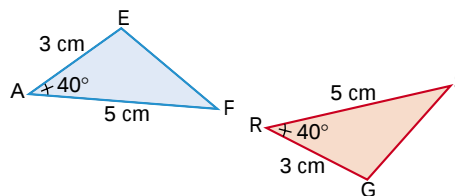
THÉORÈME 2

Si deux triangles ont un même angle compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques.

EXEMPLE :

$AE = RG$
 $AF = RS$
 $\widehat{A} = \widehat{R}$

donc AEF et RGS sont isométriques.



PROPRIÉTÉ 1

Si deux triangles sont isométriques, alors :

- leurs angles sont égaux ;
- leurs aires sont égales.

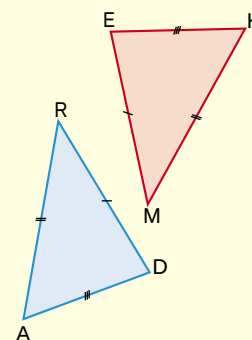
Attention : deux triangles ayant les mêmes angles (ou la même aire), ne sont pas forcément isométriques (voir TD 2).

1 Reconnaître des côtés, des sommets et des angles homologues

ÉNONCÉ Si l'on superpose les deux triangles isométriques ci-contre, deux sommets (ou deux côtés, ou deux angles) qui se correspondent sont dits homologues.
Désigner les sommets homologues, puis les côtés homologues puis les angles homologues de ces deux triangles.

SOLUTION

Les triangles isométriques sont ARD
 et KME.



MÉTHODE

On écrit les noms des triangles en prenant soin de mettre l'un sous l'autre les noms des sommets qui se correspondent si l'on superpose les triangles.
 Les « objets » homologues sont alors placés les uns sous les autres.
 On peut aussi utiliser des couleurs.

Sommets homologues	Côtés homologues	Angles homologues
A et K	[AR] et [KM]	$\widehat{A}$ et $\widehat{K}$
R et M	[RD] et [ME]	$\widehat{R}$ et $\widehat{M}$
D et E	[DA] et [EK]	$\widehat{D}$ et $\widehat{E}$

2 Utiliser des triangles isométriques

ÉNONCÉ Le triangle ABC ci-contre est équilatéral de côté a .
 On donne $AE = BF = CG = x$.
Démontrer que EFG est équilatéral.

SOLUTION

$\widehat{B} = \widehat{A} = 60^\circ$
 $BE = AG = a - x$
 $BF = AE = x$

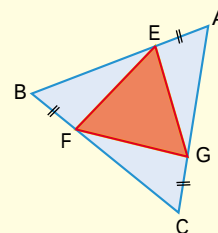
} donc les triangles BEF et AGE sont isométriques (théorème 2).

On en déduit que $EF = GE$.

On démontre de même que BEF et CFG sont isométriques, d'où $EF = FG$.

On a donc : $EF = GE = FG$.

Le triangle EFG est donc équilatéral.



MÉTHODE

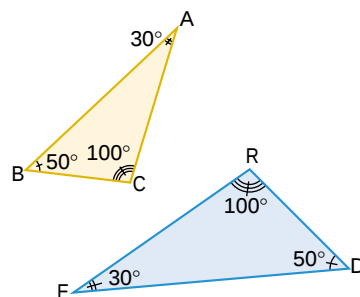
Pour démontrer que des segments ont la même longueur, on peut démontrer que ce sont des côtés homologues de triangles isométriques.

2 Triangles semblables

DÉFINITION 2

Dire que deux triangles sont **semblables** signifie que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.
On dit aussi que ces triangles ont **même forme**.

Remarque : dans la pratique, il suffit que deux angles de l'un des triangles soient égaux à deux angles de l'autre triangle puisque la somme des angles est pour chacun égale à 180° .



Astuce

On écrit les sommets des angles égaux l'un sous l'autre.

EXEMPLE : Les triangles ABC et EDR sont de **même forme**.

Sommets homologues	Côtés homologues	Angles homologues
A et E	[AB] et [ED]	$\hat{A}$ et $\hat{E}$
B et D	[BC] et [DR]	$\hat{B}$ et $\hat{D}$
C et R	[CA] et [RE]	$\hat{C}$ et $\hat{R}$

THÉORÈME 3

Si 2 triangles sont semblables alors leurs côtés homologues sont proportionnels.

Remarque : une démonstration est proposée au TD 1.

EXEMPLE : Dans la figure ci-dessus, $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DR} = \frac{CA}{RE} = k$

$k < 1$: on dit alors que ABC est **une réduction** de EDR **dans le rapport k** .

On a aussi $\frac{ED}{AB} = \frac{DR}{BC} = \frac{RE}{CA} = k'$

$k' > 1$: EDR est **un agrandissement** de ABC **dans le rapport k'** .

k et k' sont appelés rapports de similitude.

THÉORÈME 4

(admis) Si 2 triangles ont leurs côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

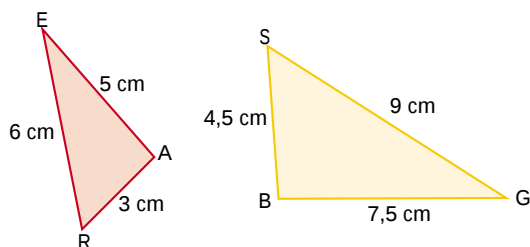
Note

Un autre critère de similitude est démontré à l'exercice 22.

EXEMPLE : $\frac{9}{6} = \frac{7,5}{5} = \frac{4,5}{3} = 1,5$

donc les triangles SGB et REA sont semblables.

$1,5 > 1$ donc SGB est un agrandissement de REA dans le rapport 1,5.



THÉORÈME 5

(admis) Si un triangle T est une réduction (ou un agrandissement) d'un triangle T' dans le rapport k , alors : Aire de T = $k^2 \times$ Aire de T'.

EXEMPLE : Dans la figure ci-dessus, on a :

Aire de SGB = $1,5^2 \times$ Aire de REA = $2,25 \times$ Aire de REA.

3 Reconnaître des triangles rectangles semblables

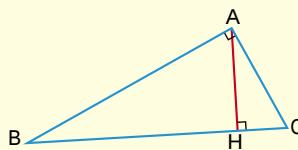
ÉNONCÉ Démontrer que les triangles ABC et ABH ci-contre sont semblables.

SOLUTION

$$\widehat{BAC} = \widehat{BHA} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$$

On en déduit que les triangles ABC et ABH sont semblables (définition 2).



MÉTHODE

Dès que deux triangles rectangles ont un même **angle aigu** alors ils sont **semblables**.

4 Utiliser des triangles semblables dans un problème

ÉNONCÉ Deux cordes [AB] et [EF] d'un cercle se coupent en M.

Démontrer que $MA \times MB = ME \times MF$.

SOLUTION

On fait apparaître les triangles MAF et MEB.

Deux angles inscrits dans un cercle et qui interceptent le même arc sont égaux, donc :

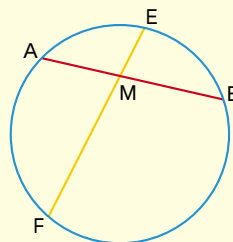
$$\widehat{FAB} = \widehat{FEB} \text{ et d'autre part } \widehat{AFE} = \widehat{ABE}.$$

Donc les triangles MAF et MEB sont semblables (définition 2).

Leurs côtés homologues sont donc proportionnels d'où :

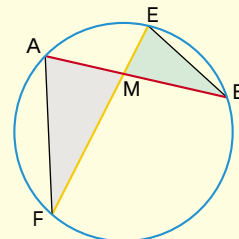
$$\frac{MA}{ME} = \frac{MF}{MB} \text{ (théorème 3).}$$

L'égalité des produits en croix donne : $MA \times MB = ME \times MF$.



MÉTHODE

Dans les problèmes faisant intervenir un cercle, repérer des angles inscrits égaux.



5 Utiliser des triangles semblables pour comparer des aires

ÉNONCÉ Dans la figure ci-contre, ABC est isocèle en A.

On donne $AB = 5 \text{ cm}$ et $BC = 3 \text{ cm}$.

Calculer le rapport entre l'aire de BEC et celle de ABC.

SOLUTION

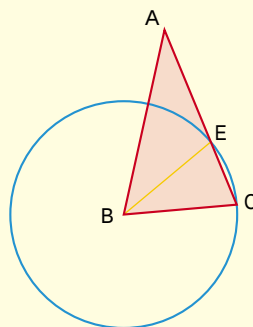
ABC est isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

EBC est isocèle en B donc $\widehat{ECB} = \widehat{BEC}$

Comme $\widehat{ECB} = \widehat{ACB}$, on en déduit que les triangles BEC et ABC sont semblables (définition 2).

[BC] et [AB] sont des côtés homologues donc le rapport de réduction est $k = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$.

$$\text{Donc } \frac{\text{Aire (BEC)}}{\text{Aire (ABC)}} = k^2 = \frac{9}{25} \text{ (théorème 5).}$$



MÉTHODE

Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport de réduction (ou d'agrandissement).

1 Calcul de longueur

Objectif : Utiliser des triangles semblables pour calculer une longueur.

MÉTHODE

On établit que les triangles sont semblables en comparant leurs angles. On écrit ensuite la proportionnalité de leurs côtés.

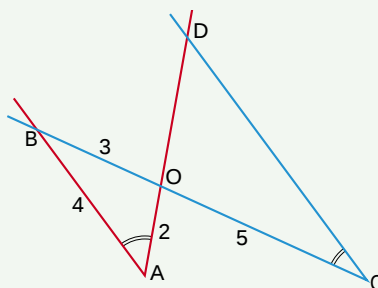
EXEMPLE La figure ci-contre ne respecte pas les dimensions réelles.

Le codage indique cependant $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$. Calculer OD et DC.

Vers la solution : On démontre que les triangles OBA et ODC ont leurs angles deux à deux égaux.

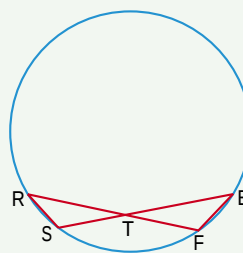
On écrit trois rapports égaux faisant intervenir des longueurs de segments de la figure.

On calcule OD et DC. Rédiger la solution.



RÉINVESTISSEMENT

On donne $RS = 2$ cm, $ST = 3$ cm, $TE = 4,8$ cm et $TF = 3,6$ cm. Calculer RT et EF.



2 Angles

Objectif : Utiliser des triangles semblables pour calculer ou comparer des angles.

MÉTHODE

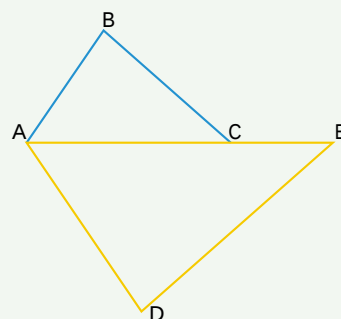
On établit que les triangles sont semblables en démontrant que leurs côtés sont proportionnels. On écrit ensuite que leurs angles sont égaux.

EXEMPLE On donne $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = AD = 6$, $AE = 9$, $DE = 7,5$.

Démontrer que la droite (AE) est la bissectrice de $\widehat{BAD}$.

Vers la solution : On calcule $\frac{AB}{AD}$, $\frac{BC}{DE}$ et $\frac{AC}{AE}$, puis on commente la réponse obtenue.

On en déduit des égalités d'angles et le fait que la droite (AE) est la bissectrice de $\widehat{BAD}$. Rédiger la solution.



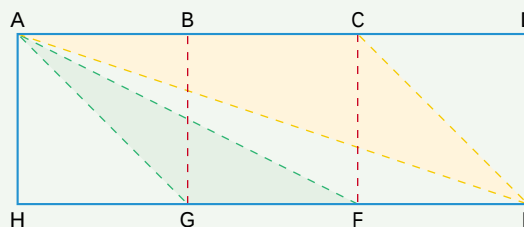
RÉINVESTISSEMENT

Dans la figure suivante, le rectangle ADEH a été décomposé en trois carrés isométriques de côté 1.

1. Calculer AG, AE et AF.

2. En déduire que les triangles CEA et GFA sont semblables.

3. Démontrer que $\widehat{DAG}$ et $\widehat{EAF}$ ont la même bissectrice.



3 Aires

Objectif : Utiliser des triangles semblables pour comparer des aires.

MÉTHODE

On établit que des triangles sont semblables.
On exprime leur rapport de similitude λ .
On utilise le fait que leurs aires sont dans le rapport λ^2 .

EXEMPLE La figure ci-contre représente un carré ABCD.

I et H sont les milieux de deux côtés.

On cherche le rapport entre l'aire du triangle rouge et celle du carré.

Vers la solution : On démontre que les triangles ABI et ADH sont isométriques et on compare les valeurs des angles $\widehat{IAK}$ et $\widehat{IBA}$.

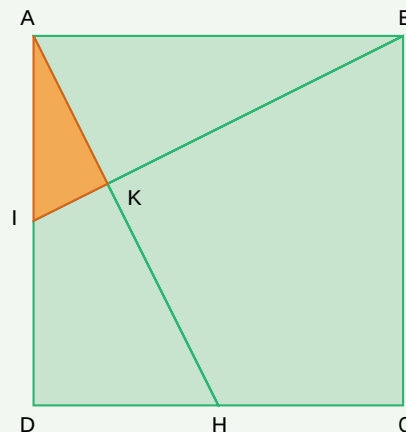
On démontre que les triangles AIK et AIB sont semblables.

On calcule le rapport de similitude ainsi que le rapport

$\frac{\text{Aire (AIK)}}{\text{Aire (ABI)}}$.

On en déduit le rapport $\frac{\text{Aire (AIK)}}{\text{Aire (ABCD)}}$.

Rédiger la solution.



RÉINVESTISSEMENT

Le cercle représenté ci-contre a pour diamètre [AB]. Soit K sur [AB].

La perpendiculaire à (AB) menée par K coupe le cercle en C.

La médiatrice de [AB] coupe [CB] en J.

La perpendiculaire à la droite (AJ) menée par J coupe [AB] en H.

On souhaiterait positionner le point K pour que l'aire du triangle rouge soit la moitié de celle du triangle ABC.

1. a. Montrer que $\widehat{JAH} = \widehat{CBA}$.

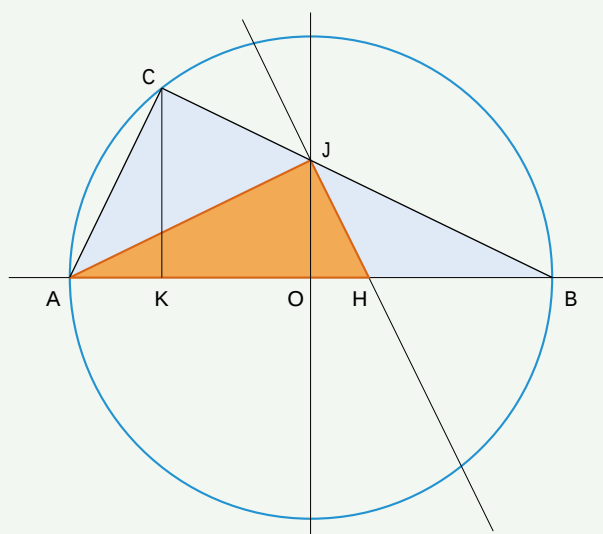
b. En déduire que les triangles AJH et ABC sont semblables.

c. En déduire : pour que l'aire du triangle rouge soit la moitié de celle du triangle ABC,

il faut que $\frac{BK}{AJ} = \sqrt{2}$ puis que $BK = \sqrt{2} BO$.

INDICATION : on pourra montrer que $\frac{BK}{BO} = \frac{BC}{BJ}$.

2. Proposer une construction du point K cherché.



1. Thalès et les triangles semblables

Objectif : Comment transformer une situation avec deux triangles semblables en une configuration de Thalès pour démontrer que des triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels.

Première situation

1. Vérifier que les triangles ABC et EFG sont semblables.

2. Indiquer la nature de chacune des transformations successives que subit le triangle bleu dans les figures 2 et 3.

3. Démontrer que les triangles ABC et $A''B''G$ sont isométriques.

En déduire que puisque le point A'' est sur $[GE]$ alors le point B'' est sur $[GF]$.

4. Démontrer que les côtés homologues des triangles ABC et EFG sont proportionnels.

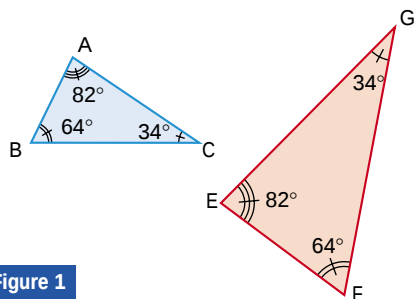


Figure 1

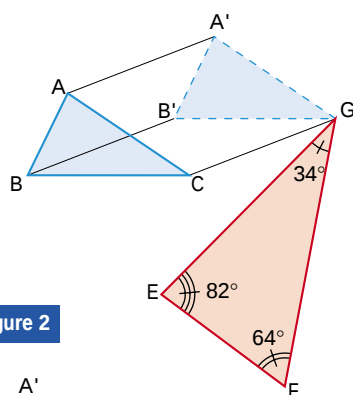


Figure 2

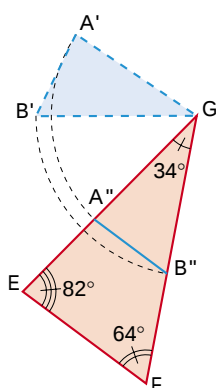


Figure 3

Deuxième situation

On suppose que les triangles EGF et ABC sont semblables.

1. Indiquer la nature de chacune des transformations successives que subit le triangle bleu dans les figures 2, 3 et 4.

2. Démontrer que les triangles ABC et EB_2C_3 sont isométriques. En déduire que puisque B_2 est sur $[EG]$, alors C_3 est sur $[EF]$.

3. Démontrer que les côtés homologues des triangles ABC et EFG sont proportionnels.

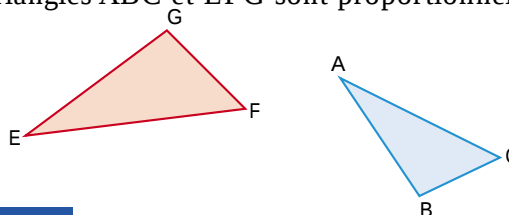


Figure 1

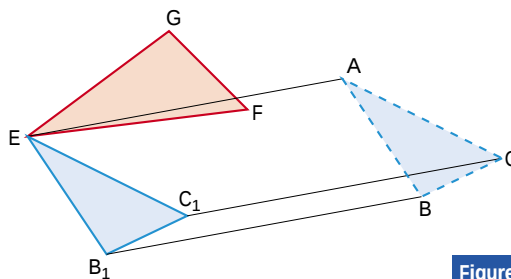


Figure 2

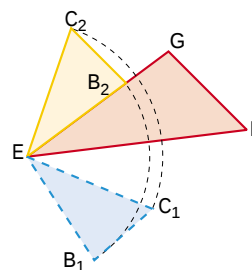


Figure 3

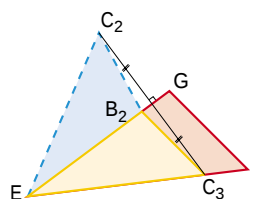


Figure 4



2. Démonstration et sangaku

Objectif : Démontrer, à l'aide des triangles semblables, que la conjecture évoquée à la page 228 est vraie.

A Résultat préliminaire

On désigne par s l'aire du triangle ABC , p son périmètre et par r le rayon de son cercle inscrit.

1. Démontrer : $2s = rp$.

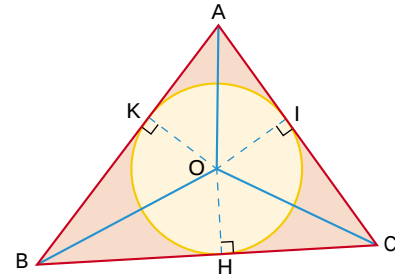
INDICATION : on pourra s'intéresser aux triangles AOB , BOC et COA .

2. Soit $A'B'C'$ un triangle semblable à ABC .

On désigne par λ le rapport de similitude $\frac{A'B'}{AB}$.

Soit r' le rayon du cercle inscrit dans $A'B'C'$.

Déduire de la question **1** que $r' = \lambda r$.



B Démonstration de la conjecture

Le triangle ABC est rectangle en C .

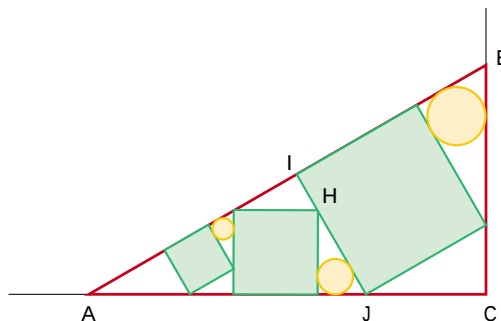
Chacun des trois cercles est inscrit dans le triangle qui le contient.

Les quadrilatères verts sont tous les trois des carrés.

On note r_1 , r_2 et r_3 les rayons des cercles de la gauche vers la droite.

De même c_1 , c_2 et c_3 désignent les côtés des carrés dans le même ordre.

On désigne par α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.



1. Expliquer pourquoi tous les triangles visibles sur la figure sont semblables.

2. a. Démontrer que $c_3 = c_2 \left(\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$.

INDICATION : on pourra remarquer que $c_3 = IH + HJ$.

b. En déduire que $r_3 = r_2 \left(\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$.

INDICATION : utiliser le rapport de similitude de deux triangles bien choisis.

3. Démontrer que l'on a aussi : $r_2 = r_1 \left(\sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$.

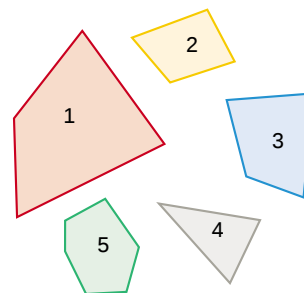
4. Pour conclure, comparer les produits $r_1 r_3$ et r_2^2 .

3. Quadrilatères de même forme

Objectif : S'interroger sur la notion de forme pour d'autres figures que des triangles et essayer de fournir une définition de cette notion.

A Première approche

Parmi les polygones ci-contre, quel est celui qui paraît « avoir la même forme » que le polygone 1 ? Préciser les critères qui ont pu guider ce choix (nombre de côtés, angles, ...).



B Étude du problème

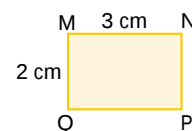
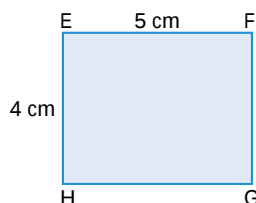
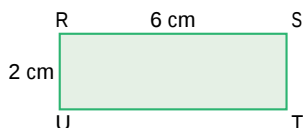
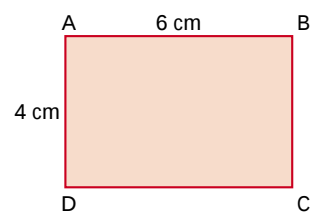
• Cas des rectangles

On considère le rectangle ABCD

1. a. Parmi les rectangles dessinés ci-dessous, lequel vous paraît « avoir la même forme » que le rectangle ABCD ?

b. Quel critère a pu guider ce choix ?

c. Les critères retenus dans la partie A ont-ils été efficaces ici ?



2. Construire un rectangle de même forme que ABCD et de périmètre 12 cm.

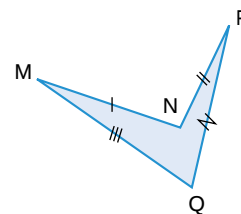
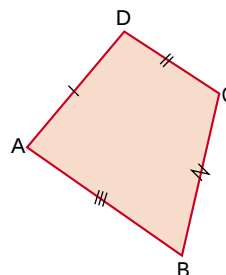
• Cas de quadrilatères quelconques

1. À la vue de ce qui précède, on peut se demander si la proportionnalité des côtés suffit à caractériser des quadrilatères de même forme.

Observons pour cela les polygones ci-contre.

a. Les deux quadrilatères ont-ils des côtés proportionnels ?

b. Ont-ils pour autant la même forme ?

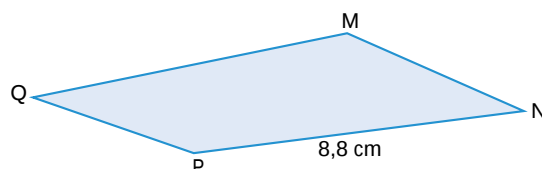
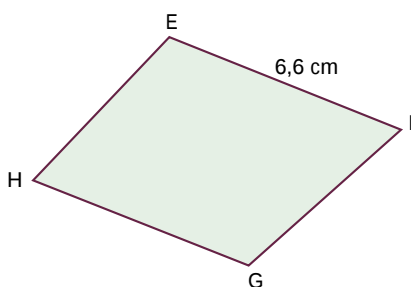
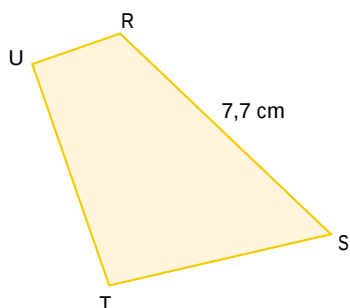
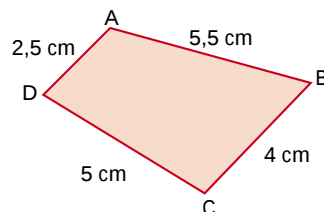




2. a. On considère le quadrilatère ABCD.

Parmi les quadrilatères dessinés ci-dessous, lequel vous paraît « avoir la même forme » que le quadrilatère ABCD ?

Calculer la longueur des trois côtés non mesurés de ce quadrilatère.



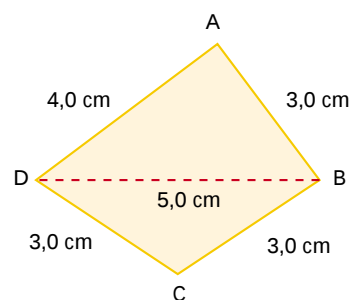
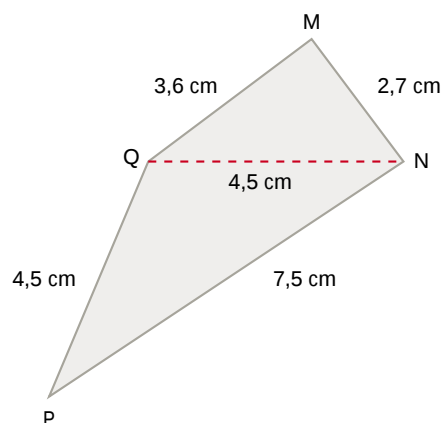
b. On donne $DB = 7 \text{ cm}$ et $US = 9,8 \text{ cm}$; $HF = 8,4 \text{ cm}$ et $NQ = 11,2 \text{ cm}$.

Montrer que ABCD et le quadrilatère précédemment sélectionné se décomposent en deux triangles qui sont respectivement semblables.

Ne serait ce pas là finalement la définition recherchée ?

c. Montrer que les deux quadrilatères suivants se décomposent en deux triangles qui sont respectivement semblables.

Les deux quadrilatères ont-ils pour autant la même forme ?



d. Proposer finalement une définition correcte de deux quadrilatères de même forme.



4. Le problème de Napoléon

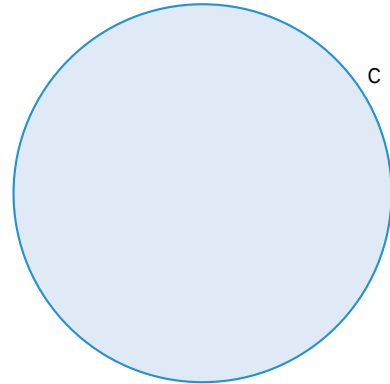
Objectif : Utiliser des triangles semblables pour résoudre un problème historique.

On dit que Napoléon, ancien artilleur, était épris de géométrie.

Ses contacts avec le mathématicien italien Mascheroni lors de la campagne d'Italie lui auraient permis de résoudre le problème suivant :

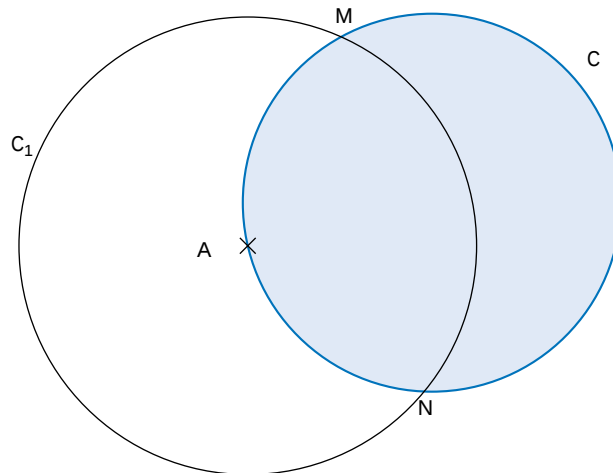
On a égaré le centre du cercle C tracé ci-contre.

Le but est de le retrouver avec l'aide exclusive d'un compas.



A Construction

1. Choisir un point A sur le cercle C . Tracer un cercle C_1 de centre A qui coupe C en deux points. Soient M et N ces deux points.



2. Tracer les cercles C_2 et C_3 de centres M et N et qui passent par A . Ces deux cercles se coupent en A et en un point qu'on nomme B .

3. Tracer le cercle C_4 de centre B qui passe par A . Ce cercle coupe C_1 en deux points. Soient P et Q ces deux points.

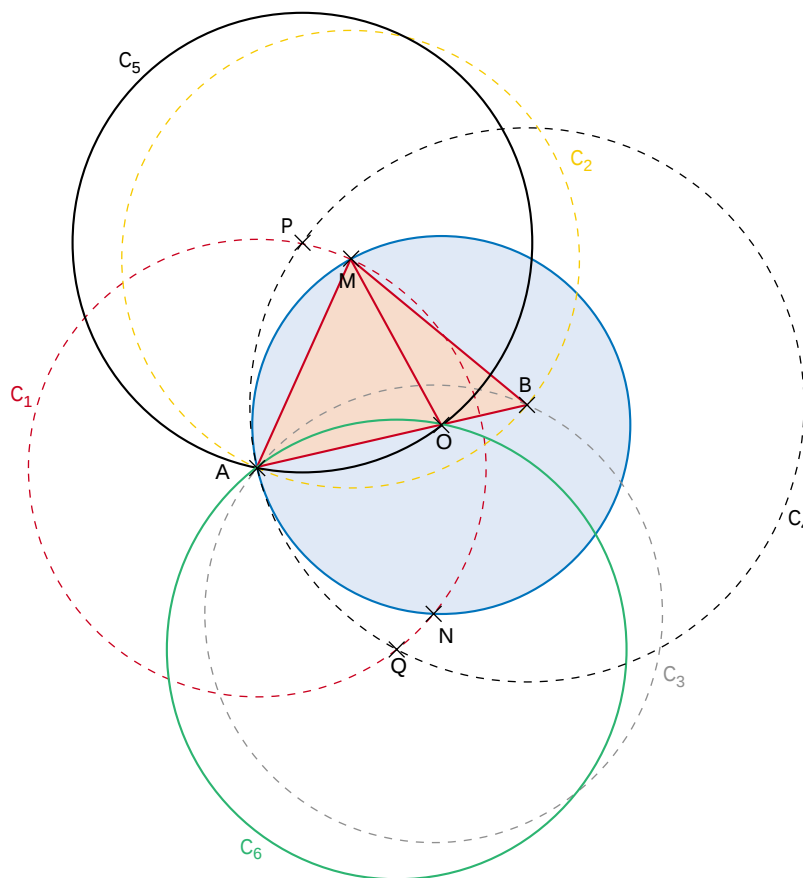
4. Tracer les deux cercles C_5 et C_6 de centre P et Q et qui passent par A . Ces deux cercles se coupent en A et en O .

Nous allons démontrer dans ce qui suit que le point O est le point cherché.

Pour cela, nous allons d'abord établir que le triangle AOM est isocèle en O , ce qui permettra de déduire que $OA = OM$.

Nous ne serons alors pas bien loin de la conclusion.

B Démonstration



• Pour démontrer que $OA = OM$

1. **a.** Justifier les égalités $AP = AQ$, $BP = BQ$ et $OP = OQ$.
- b.** En déduire que A, B et O sont alignés.
2. **a.** Pourquoi les triangles BPA et APO sont-ils isocèles ?
- b.** En remarquant que ces deux triangles ont un angle commun, établir que ce sont des triangles semblables.
- c.** À l'aide de la proportionnalité des côtés de ces deux triangles, établir que $\frac{AM}{AO} = \frac{AB}{AM}$.
- d.** En déduire que les triangles OAM et MAB sont semblables.

INDICATION : utiliser le critère de similitude démontré à l'exercice 22.

3. **a.** Quelle est la nature de MAB ?
- b.** En déduire que $OA = OM$.

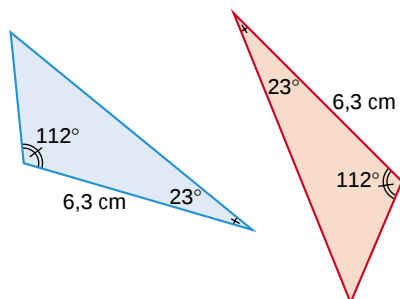
• Pour démontrer que O est bien le centre cherché

1. Pourquoi a-t-on $OA = ON$?
2. Justifier que O est le centre du cercle C.

exercices pour s'entraîner

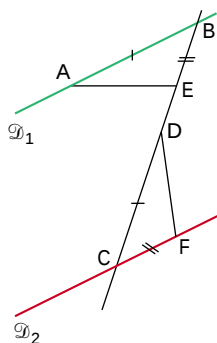
Triangles isométriques

1 Expliquer pourquoi les deux triangles ci-dessous sont isométriques.



2 Dans la figure ci-dessous, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, $AB = CD$ et $EB = CF$.

Pourquoi peut-on être sûr que $AE = DF$?



3 ABC est un triangle rectangle en B tel que $AB = 8,1$ et $BC = 36$ et EFG est un triangle rectangle en G.

Dans chacun des cas suivants, les triangles ABC et EFG sont-ils isométriques ? Justifier.

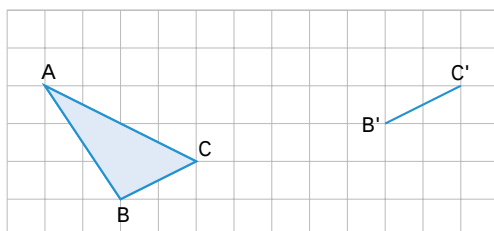
a. $EF = 36,9$ et $EG = 8,1$

b. $EG = 36$ et $EF = 36,9$

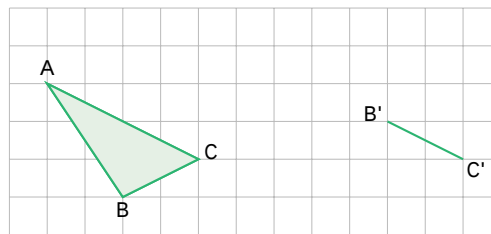
c. $EG = 36$ et $GF = 36,9$.

4 Reproduire la figure suivante sur quadrillage. À l'aide du quadrillage et d'une règle non graduée, construire un triangle $A'B'C'$ isométrique à ABC.

INDICATION : on donnera deux solutions en utilisant des couleurs différentes.

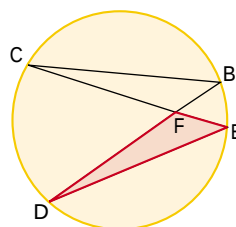


5 Même exercice que le précédent avec les données suivantes :



6 Dans la figure suivante, on donne $\widehat{BCF} = 14^\circ$, $\widehat{CBF} = 45^\circ$ et $DF = 5$ cm.

Construire un triangle $F'D'E'$ isométrique à FDE. Justifier.



7 Les triangles de sommets A, B, C et R, E, I sont isométriques.

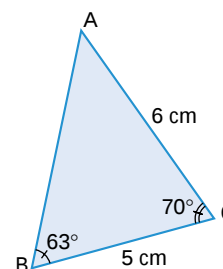
Recopier et compléter le tableau suivant :

INDICATION : on pourra s'aider d'une figure faite au brouillon pour chacun des trois cas.

Éléments du triangle ABC	Éléments homologues du triangle REI		
	a.	b.	c.
[AB]	[RE]	[RE]	
[BC]		[RI]	
[CA]			
$\widehat{A}$	$\widehat{R}$		
$\widehat{B}$			$\widehat{E}$
$\widehat{C}$			$\widehat{I}$

8 Soit ABC le triangle représenté ci-dessous :

Indiquer, pour chacun des cas suivants, si on est sûr que les triangles ABC et EFG sont isométriques. Si tel est le cas, préciser les sommets homologues.



- $EF = 6 \text{ cm}$, $FG = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{F} = 70^\circ$
- $EG = 5 \text{ cm}$, $\widehat{E} = 63^\circ$ et $\widehat{G} = 70^\circ$
- $EF = 6 \text{ cm}$, $\widehat{E} = 70^\circ$ et $\widehat{G} = 63^\circ$
- $FG = 5 \text{ cm}$, $FE = 6 \text{ cm}$ et $EG = AB$
- $FG = 5 \text{ cm}$, $FE = 6 \text{ cm}$ et $\widehat{G} = 63^\circ$
- $EF = 6 \text{ cm}$, $\widehat{E} = 70^\circ$ et $\widehat{G} = 47^\circ$.

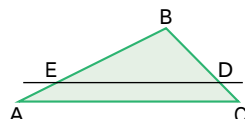
Triangles semblables

9 Soit ABC et RST deux triangles tels que $\widehat{ABC} = 48^\circ$, $\widehat{ACB} = 50^\circ$, $\widehat{RST} = 50^\circ$ et $\widehat{RTS} = 82^\circ$.
Démontrer que ces deux triangles sont semblables.

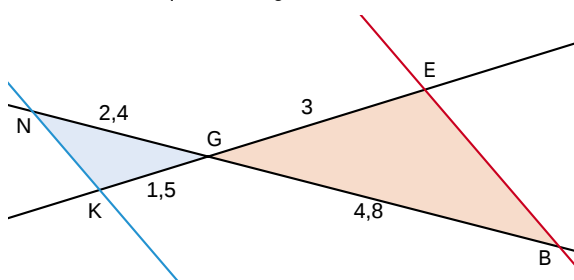
10 Dans la figure ci-dessous, on suppose que les droites (ED) et (AC) sont parallèles.

- Démontrer que les triangles BED et BAC sont semblables.
- On suppose à présent que M est un point de [AB], que N est un point de [BC] et que BAC et BMN sont deux triangles semblables.

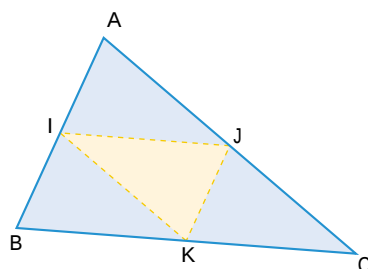
Est-on sûr alors que les droites (MN) et (AC) sont parallèles ? Justifier la réponse.



11 Démontrer que les triangles GNK et GEB sont semblables.



12 Dans la figure ci-dessous, les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés du triangle ABC.

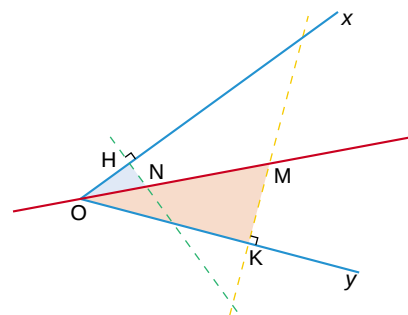


- Prouver que les triangles IJK et ABC sont semblables.
- a. Préciser le rapport de réduction.
b. Comment obtient-on l'aire du triangle IJK à partir de celle de ABC ?

13 Soit ABC et EFG deux triangles semblables. On suppose que deux côtés homologues ont la même longueur. Que peut-on dire de ces deux triangles ?

14 Dans la figure suivante, M et N sont deux points de la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Démontrer que les triangles OHN et OKM sont semblables.



Pour les exercices 15 et 16, on considère un triangle tel que : $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ et $CA = 6 \text{ cm}$.

15 Le triangle RST est semblable au triangle ABC. Les sommets A et R d'une part et les sommets B et S d'autre part sont homologues.

Recopier et compléter le tableau suivant :

	RS	ST	TR
a.	5 cm		
b.		7 cm	
c.			9 cm

16 Dans chacun des cas suivants, indiquer si les triangles ABC et EFG sont semblables. Si tel est le cas, préciser leurs sommets homologues.

	EF	FG	GE
a.	3,6	6	7,2
b.	10,8	9	5,4
c.	3,5	5,5	6,5

17 On considère la figure de l'exercice 8.

Le triangle EFG est semblable au triangle ABC. Les sommets A et E d'une part, B et F d'autre part sont homologues.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

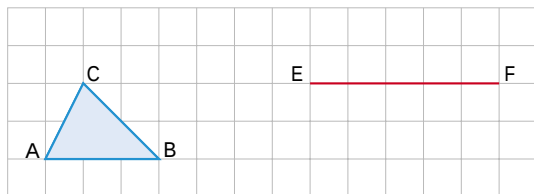
	FG	GE	$\widehat{E}$	$\widehat{F}$	$\widehat{G}$
a.	7,5 cm				
b.		8,4 cm			

exercices pour s'entraîner

18 Le triangle EFG est semblable au triangle ABC. Les sommets A et E d'une part, B et F d'autre part sont homologues.

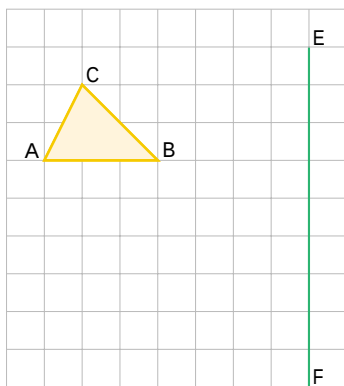
Reproduire la figure ci-dessous sur quadrillage. À l'aide du quadrillage et d'une règle non graduée, construire le triangle EFG.

INDICATION : on donnera toutes les solutions en utilisant des couleurs différentes.

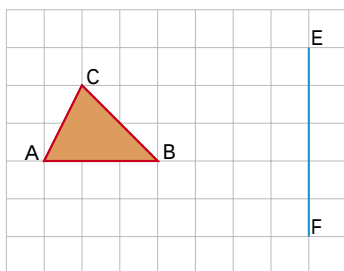


19 Même exercice que le précédent dans les deux cas suivants :

a.



b.



Démonstrations

20 L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : « Si deux triangles ont un même angle compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques ».

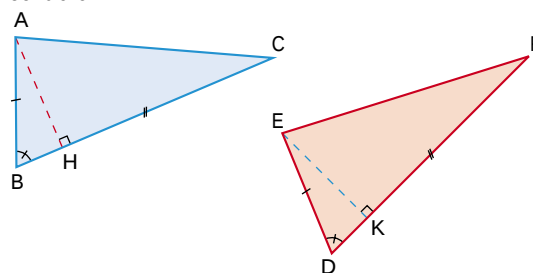
Dans les figures ci-après, on suppose que :

$$AB = ED, \quad BC = DF \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} = \widehat{EDF}.$$

1. Démontrer que $AH = EK$ (on pourra utiliser le sinus).
2. a. Démontrer que $BH = DK$ (on pourra utiliser le cosinus).
- b. En déduire que $KF = HC$.

3. a. Démontrer que $AC = EF$.

b. Conclure.



21 L'objectif est de démontrer le théorème suivant : « Si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement égaux, alors ils sont isométriques ».

Dans les figures de l'exercice précédent, on suppose que :

$$AC = EF, \quad \widehat{BAC} = \widehat{DEF} \quad \text{et} \quad \widehat{ACB} = \widehat{EFD}.$$

1. Démontrer que $CH = FK$ (on pourra utiliser le cosinus).
2. a. Démontrer que $AH = EK$ (on pourra utiliser le sinus).
- b. Démontrer que $\widehat{BAH} = \widehat{DEK}$.
- c. En déduire que $AB = ED$ puis que $BH = DK$.
- d. Conclure.

Un nouveau critère de similitude

On établit pour un exemple de deux triangles un nouveau critère de similitude dont on admet la généralisation : exercice 22.

On réinvestit ensuite ce résultat dans les exercices 23 et 24.

22 1. Vérifier que les deux triangles ci-dessous ont un angle égal compris entre deux côtés respectifs proportionnels.

2. a. Soit $FC'A'$ le translaté de BCA suivant le vecteur $\vec{BF}$. Démontrer que les triangles $FC'A'$ et BCA sont isométriques.

b. On considère une des rotations de centre F qui envoient le point C' sur le segment $[FG]$.

Soit A'' et C'' les images de A' et de C' par cette rotation.

Démontrer que les triangles $FA''C''$ et BCA sont isométriques.

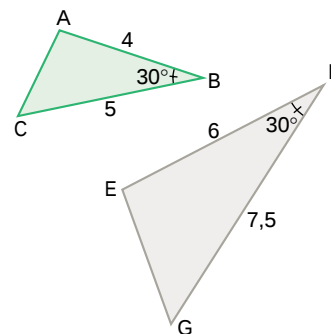
c. Pourquoi le point A'' est-il sur le segment $[FE]$?

d. Démontrer que les triangles BCA et FEG sont semblables.

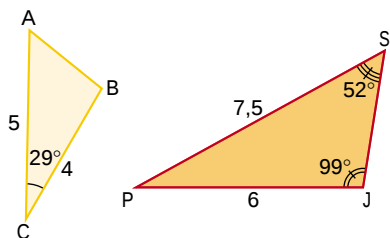
Nous admettrons par

la suite que le résultat obtenu ici se généralise et qu'ainsi :

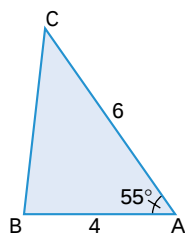
« Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectifs proportionnels, alors ils sont semblables. »



23 Les triangles ABC et SJP représentés ci-dessous sont-ils semblables ? Justifier la réponse.



24 Construire un triangle EFG semblable au triangle ABC représenté ci-dessous tel que E et F soient les sommets homologues respectifs de A et B, et $EF = 6$ cm.



Triangles particuliers

Pour les exercices 25 et 26, on suppose que ABC et EFG sont deux triangles isocèles respectivement en A et en E.

25 1. On suppose que $AB = EF$ et $BC = FG$.

Que peut-on dire des triangles ABC et EFG ?

2. Que penser de l'affirmation : « Si deux côtés d'un triangle isocèle ont les mêmes longueurs que deux côtés d'un autre triangle isocèle, alors ces deux triangles sont semblables. » ?

26 1. On suppose que $\widehat{BAC} = \widehat{GEF} = 40^\circ$.

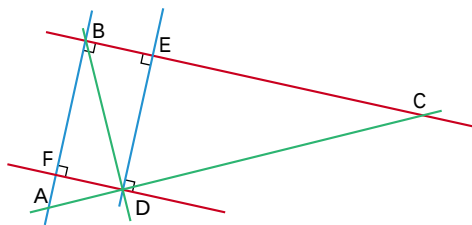
Démontrer que les triangles ABC et EFG sont semblables.

2. Que penser de l'affirmation : « Pour deux triangles isocèles, si un angle de l'un est égal à un angle de l'autre, alors ils sont semblables. » ?

27 1. Pourquoi deux triangles équilatéraux sont-ils toujours semblables ?

2. Pourquoi deux triangles rectangles et isocèles sont-ils toujours semblables ?

28 Citer le plus possible de triangles semblables dans la figure suivante. Justifier la réponse.



29 1. Soit ABC et EFG deux triangles rectangles ayant chacun un angle de 42° .

Que peut-on dire de ces deux triangles ?

2. On suppose de plus que ces deux triangles ont des hypoténuses de même longueur.

Que peut-on dire de ces deux triangles ? Justifier la réponse.

3. Que peut-on penser de l'affirmation : « Si deux triangles rectangles ont chacun un angle de 35° et un côté de 5 cm, alors ils sont isométriques. » ?

Raisonnement avec des triangles isométriques

30 Soit ABCD un parallélogramme, O le point d'intersection de ses diagonales. Une droite d qui passe par O coupe [AB] en M et [DC] en N.

1. Démontrer que les triangles OMA et ONC sont isométriques.

2. Que peut-on en déduire pour les longueurs AM et NC ?

31 Soit un triangle ABC rectangle en B. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en D. Sur le segment [AD], on place le point E tel que $AE = AB$. La perpendiculaire à (AD) en E coupe (AC) en F.

1. Réaliser cette figure.

2. Montrer que les triangles ABD et AEF sont isométriques.

3. Citer deux triangles isocèles de la figure.

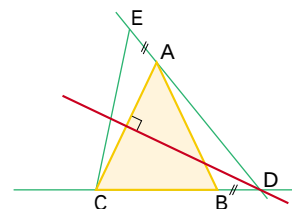
32 Le triangle ABC est isocèle en A. La médiatrice de [AC] coupe (BC) en D. On note E le point de la droite (AD) tel que $EA = BD$, avec D et E de part et d'autre de A.

1. Démontrer que le triangle CAD est isocèle.

2. Comparer les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{ABD}$.

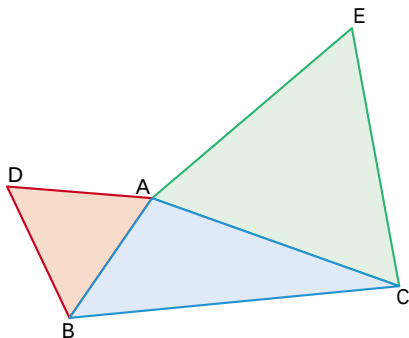
3. Démontrer que les triangles ABD et CAE sont isométriques.

4. Quelle est la nature du triangle CDE ?



exercices pour s'entraîner

33 ABD et ACE sont deux triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle ABC.



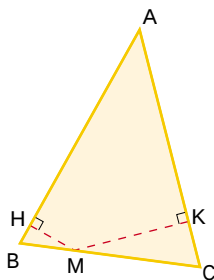
1. a. Dans la figure précédente, quel segment autre que [CD] semble avoir pour longueur CD ?
b. Quels triangles isométriques utiliser pour démontrer cette égalité ?
c. Démontrer l'isométrie de ces deux triangles. Conclure.
2. a. Comparer les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{AEB}$.
b. (EB) coupe (DC) en I et (AC) en J. Démontrer que les triangles AEJ et JCI sont semblables.
c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{CIE}$.

34 Tracer un triangle ABC tel que $AB < AC$. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en un point D.

Le cercle de centre A et de rayon AB coupe [AC] en E.

1. Montrer que les triangles ABD et ADE sont isométriques.
2. Quelle est la nature du triangle BDE ?

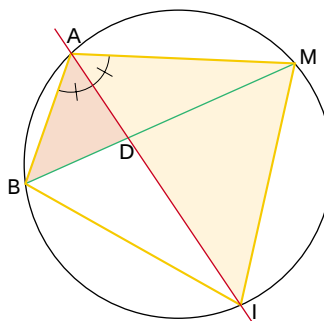
35 Soit ABC un triangle isocèle en A, et M un point du segment [BC].



1. a. Réaliser une telle figure.
b. Tracer la parallèle à (AC) passant par B. Soit I le point d'intersection de cette droite avec (MK).
2. a. Démontrer que les triangles MHB et MIB sont isométriques.
b. En déduire que la somme $MH + MK$ ne dépend pas de la position du point M sur le segment [BC].

Raisonner avec des triangles semblables

36 1. Démontrer que dans la figure suivante où (AI) est la bissectrice de $\widehat{BAM}$, les triangles ABD et AIM sont semblables.



2. En déduire que $AB \times AM = AD \times AI$.

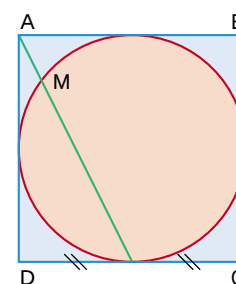
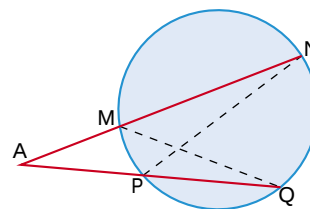
37 1. Démontrer que dans la figure suivante les triangles AMQ et APN sont semblables.

2. En déduire l'égalité $AM \times AN = AP \times AQ$.

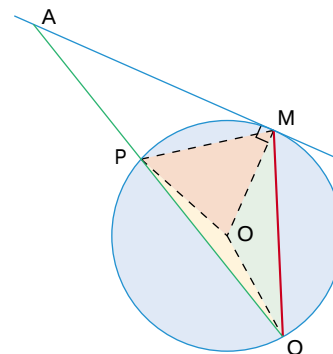
3. a. Refaire la figure dans le cas où la sécante (AP) passe par le centre O du cercle.

Démontrer que $AM \times AN = AO^2 - R^2$ où R désigne le rayon du cercle.

b. Application : dans la figure ci-contre, calculer AM sachant que le carré ABCD a pour côté 6 cm.



38 Dans la figure suivante, la droite (AM) est tangente au cercle en M.



1. Quelle est la nature de chacun des triangles OMP, OPQ et OMQ ?

2. En déduire que $\widehat{PMO} + \widehat{MQO} + \widehat{OQP} = 90^\circ$
puis que $\widehat{AMP} = \widehat{MQP}$.

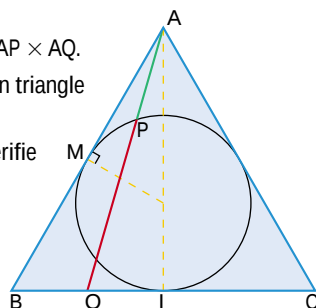
3. Prouver que AMP et AMQ sont deux triangles semblables.

4. En déduire que $AM^2 = AP \times AQ$.

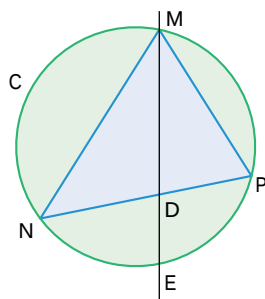
5. Application : soit ABC un triangle équilatéral de côté a .

Le point Q du côté [BC] vérifie $BQ = \frac{a}{4}$.

Calculer AQ et en déduire AP.



39 Dans la figure suivante, le triangle MNP est inscrit dans le cercle C. La droite (ME) est la bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$.



1. Démontrer que les triangles MNE et END sont semblables.

2. En déduire que $EN^2 = EM \times ED$.

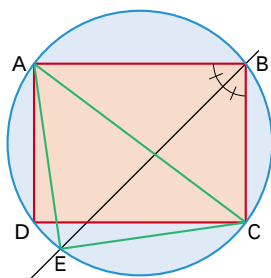
3. Démontrer que $EP^2 = EM \times ED$. Que peut-on en déduire pour le triangle ENP ?

4. Application : le rectangle ABCD de longueur 4 et de largeur 3 est inscrit dans le cercle bleu. La bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe le cercle en E.

a. Que peut-on déduire de la question 3 ?

b. En remarquant que [AC] est un diamètre du cercle, indiquer la nature précise du triangle AEC.

c. Calculer EC.



40 1. On donne $\widehat{DAB} = x$ et $\widehat{ADB} = y$.

a. Calculer $x + 2y$.

b. Repérer sur la figure les angles de mesure x et ceux de mesure y .

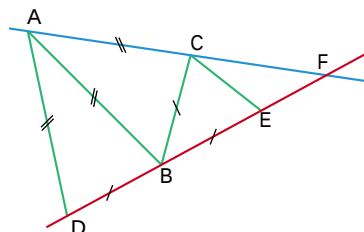
2. On donne $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm.

a. Déduire de la question 1 que les triangles ABC et BCE sont semblables.

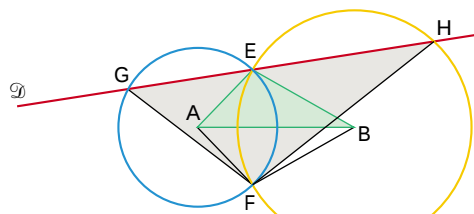
b. Calculer CE.

3. a. Déduire de la question 1 que les triangles FCE et FAB sont semblables.

b. Calculer FC.



41 Dans la figure ci-dessous, deux cercles C et C' de centre A et B se coupent en E et F. Une droite $\mathcal{D}$ qui passe par E recoupe C en G et C' en H.



1. a. Comparer les mesures des angles $\widehat{EGF}$ et $\widehat{EAF}$.

b. Démontrer que $\widehat{EAB} = \widehat{FAB}$.

c. Que peut-on en déduire pour $\widehat{EGF}$ et $\widehat{EAB}$?

2. a. Démontrer que les triangles AEB et GFH sont semblables.

INDICATION : on pourra s'intéresser aux angles $\widehat{EBA}$ et $\widehat{EHF}$.

b. On note $r = AE$ et $R = BE$.

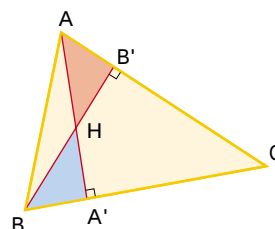
Déduire de la question 2a que, lorsque $\mathcal{D}$ pivote autour du point E, le rapport $\frac{FG}{FH}$ reste égal à un nombre fixe que l'on exprimera en fonction de r et de R .

42 Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

1. Démontrer que les triangles HA'B et HB'A sont semblables. En déduire que $HA \times HA' = HB \times HB'$.

2. Quel est l'orthocentre du triangle HBC ?

En déduire que $AH \times AA' = AB \times AC$.



exercices pour s'entraîner

Relations métriques dans le triangle rectangle

Pour les exercices 43 et 44, on considère un triangle ABC rectangle en A et de hauteur [AH].

43 1. Démontrer que les triangles ABC et ABH sont semblables.

2. En déduire que $BA^2 = BH \times BC$.

3. Application :

a. Construire à l'aide d'une équerre et d'un compas un triangle rectangle de hauteur [AH] tel que $BH = 2$ cm et $BC = 5$ cm. Combien mesure [AB] ?

b. En s'inspirant de ce qui précède, construire en utilisant exclusivement un morceau de règle graduée de 7 cm et un compas, un segment de longueur $\sqrt{21}$ cm.

44 1. Démontrer que les triangles AHB et AHC sont semblables.

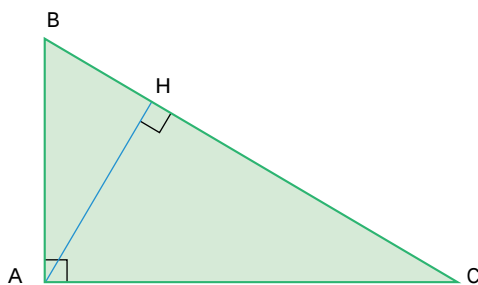
2. En déduire que $AH^2 = BH \times HC$.

3. Application :

a. Construire, à l'aide d'une équerre graduée et d'un compas, un triangle rectangle ABC de hauteur [AH] tel que $BH = 1$ cm et $HC = 7$ cm. Combien mesure [AH] ?

b. En s'inspirant de ce qui précède, construire, en utilisant exclusivement un morceau de règle graduée de 8 cm et un compas, un segment de longueur $\sqrt{15}$ cm.

45 On sait que Euclide connaissait les triangles semblables et leurs propriétés. Il est donc probable qu'il connaissait la démonstration suivante du théorème de Pythagore.



1. Montrer que les triangles ABC, ABH et AHC sont semblables.

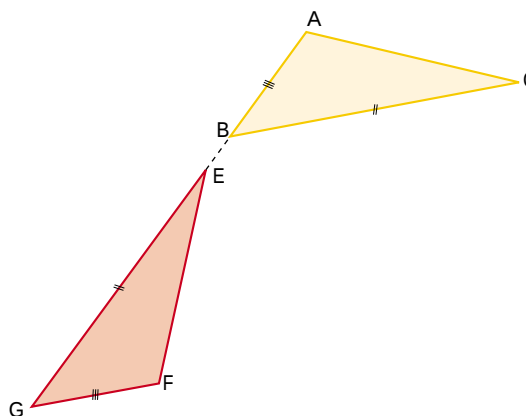
2. En déduire que $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = HC \times BC$.

3. En déduire que $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Problèmes de périmètres et d'aires

46 Dans la figure ci-dessous, les points A, B, E et G sont alignés et les droites (BC) et (GF) sont parallèles.

Comparer les aires des deux triangles.



47 1. Un triangle a pour côtés 25 m, 30 m et 35 m.

Quelles seraient les longueurs des côtés d'un triangle semblable de périmètre 675 m ?

2. Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit mesurent 6 m et 9 m.

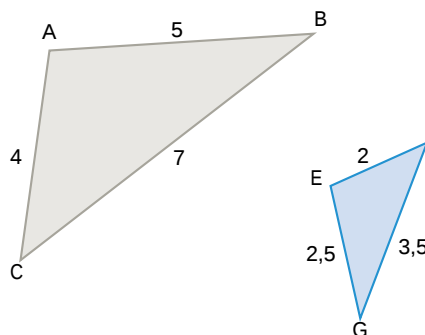
Quelles seraient les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle semblable d'aire 675 m² ?

48 1. a. Démontrer que les deux triangles représentés ci-dessous sont semblables.

b. Préciser leurs sommets homologues ainsi que le rapport d'agrandissement.

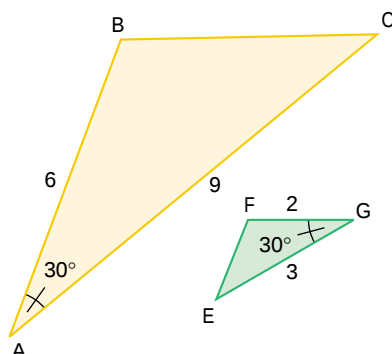
2. Déterminer les rapports

$\frac{\text{périmètre de ABC}}{\text{périmètre de EGF}}$ et $\frac{\text{aire de ABC}}{\text{aire de EGF}}$.



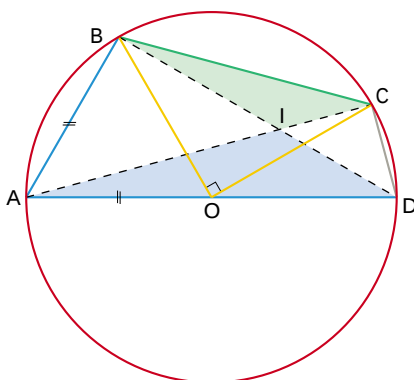
49 Même exercice que le précédent dans le cas des triangles ci-dessous :

INDICATION : on pourra utiliser le critère de similitude évoqué dans l'exercice 22.



50 Dans la figure suivante les points B et C sont sur le cercle de diamètre [AD] et de centre O.

1. a. Démontrer que les triangles BIC et AID sont semblables.
b. Calculer BC en fonction du rayon R du cercle. En déduire que le rapport d'agrandissement est $\sqrt{2}$.
2. Démontrer que l'aire de AID est le double de celle de BIC.



51 Un rapport d'aires

Soit ABCD un carré de côté 8 cm. On nomme E le milieu de [CD]. Les segments [DB] et [AE] se coupent en M. Soit [MH] la hauteur de MDE issue de M.

1. Réaliser une figure.
2. a. Démontrer que les triangles MAB et MDE sont semblables.
b. Quel est le rapport d'agrandissement ?
3. On note x l'aire de MDE.
a. Déduire de la question 2b une expression de l'aire de MAB en fonction de x .
b. À l'aide de calculs de différences d'aires de triangles, démontrer que l'aire de AMD peut s'écrire $32 - 4x$ et aussi $16 - x$.
c. En déduire la valeur de x . Calculer le rapport entre l'aire de MDE et celle du carré.

Dans un repère

Pour les exercices 52 et 53, on a muni le plan du repère orthonormé $(O; I, J)$.

52 1. Représenter les points

$A(1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(0; 4)$, $E(-2; -2)$, $G(2; 0)$ et $H(0; 6)$.

2. À l'aide de calculs de longueurs, démontrer que les angles $\widehat{EGH}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux.

53 1. Représenter les points

$A(-6; 5)$, $B(-9; 3)$, $C(-5; 2)$, $E(2; 6)$, $F(4; -2)$ et $G(8; 4)$.

2. À l'aide de calculs de longueurs, démontrer que l'aire de EFG est quatre fois plus grande que celle de ABC.

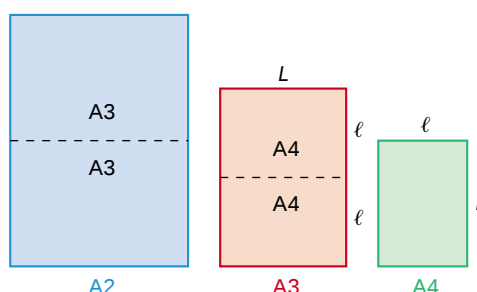
Application pratique

54 Des rectangles de même forme

On rappelle (voir TD 3) que deux rectangles sont de même forme quand leurs dimensions sont proportionnelles.

Les feuilles de papier que l'on emploie couramment sont des rectangles qui ont les mêmes formes (pour faciliter la duplication à l'échelle) et dont les dimensions n'ont pas été fixées au hasard. En effet, elles répondent essentiellement à 2 critères :

- Une feuille de format A3 contient exactement deux feuilles de format A4, et ainsi de suite suivant le principe suivant :



- La feuille de format A0 a pour aire 1 m^2 soit $10\,000 \text{ cm}^2$.

1. a. Démontrer que $\left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = 2$ puis en déduire que $L = \sqrt{2} \ell$.

INDICATION : utiliser les aires.

b. Le format A4 est une réduction du A3. Quel est le rapport de réduction ?

2. Expliquer pourquoi, sachant qu'une feuille de papier A0 a pour aire $10\,000 \text{ cm}^2$, une feuille de papier A4 a pour aire 625 cm^2 .

3. En déduire L et ℓ à 1 mm près.

Je fais le point

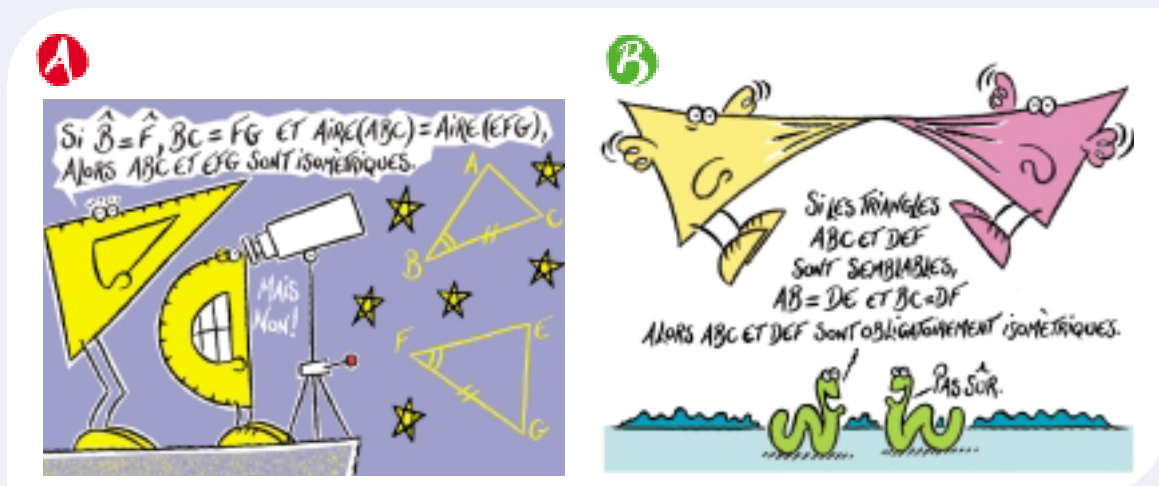
Ce que je dois savoir

1 Définition des triangles isométriques (p. 230)	2 Critères de reconnaissance de triangles isométriques (p. 230)	3 Propriétés des triangles isométriques (p. 230)	4 Définition des triangles semblables (p. 232)	
5 Propriété des côtés de triangles semblables (p. 232)	6 Coefficient de réduction ou d'agrandissement (p. 232)	7 Critère de reconnaissance de triangles semblables (p. 232)	8 Propriété des aires de triangles semblables (p. 232)	

Ce que je dois savoir faire

1 Identifier des éléments homo- logues de triangles isométriques (p. 231)	2 Reconnaître et justifier que des triangles sont isométriques (p. 231)	3 Utiliser des triangles isométriques pour démontrer (p. 231)	4 Reconnaître et justifier que des triangles sont semblables (pp. 233 à 235)	
5 Identifier des éléments homo- logues de triangles semblables (p. 232)	6 Utiliser les triangles semblables pour démontrer (pp. 233 à 235)	7 Calculer le coefficient de réduction ou d'agrandissement (pp. 233 à 235)	8 Utiliser le rapport de similitude pour calculer des lon- gueurs ou des aires (pp. 233 à 235)	

Qui a raison ?

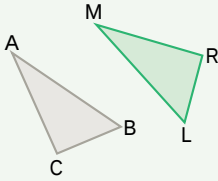
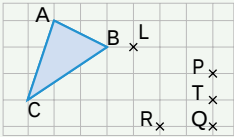
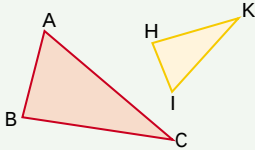
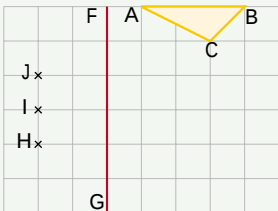


Je fais le point

QCM

Choisir la (ou les) affirmation(s) juste(s)

Pour vérifier vos résultats, voir page 354.

		A	B	C
1	 Dans ces triangles isométriques	l'homologue de L est C	l'homologue de $\widehat{RML}$ est $\widehat{CAB}$	l'homologue de [AC] est [MR]
2	Pour que deux triangles soient isométriques, il suffit qu'ils aient	deux côtés respectivement égaux et un angle égal	un côté de même longueur et deux angles égaux	trois côtés respectivement de même longueur
3	 Pour que LRM et ABC soient isométriques, on peut placer M en	P	T	Q
4	 Dans les triangles semblables	l'homologue de C est K	l'homologue de $\widehat{ABC}$ est $\widehat{HIK}$	l'homologue de [HI] est [AB]
5	Dans les triangles semblables de la question 4, on donne : BC = 6 cm et HK = 3 cm. Alors	HIK est une réduction de ABC dans le rapport $\frac{1}{2}$	AC = 2HK	$\widehat{ABC} = 2\widehat{KHI}$
6	Dans les triangles semblables de la question 4, on donne : AB = 3 cm, BC = 5 cm, HI = 2 cm. Alors	HK = $\frac{10}{3}$	HK = $\frac{15}{2}$	IK = $\frac{10}{3}$
7	Dans les triangles semblables de la question 4, on suppose que AC = 8 et IK = 5. Alors	Aire(ABC) = 1,6 × Aire(IHK)	Aire(ABC) = 2,56 × Aire(IHK)	IHK est une réduction de ABC dans le rapport 8/5
8	 Pour que FGM et ABC soient semblables, on peut placer M en	H	I	J

exercices pour chercher

55 Calcul d'un diamètre

Dans un triangle ABC, on donne $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm et on suppose que la hauteur $[AH]$ mesure 2,5 cm.

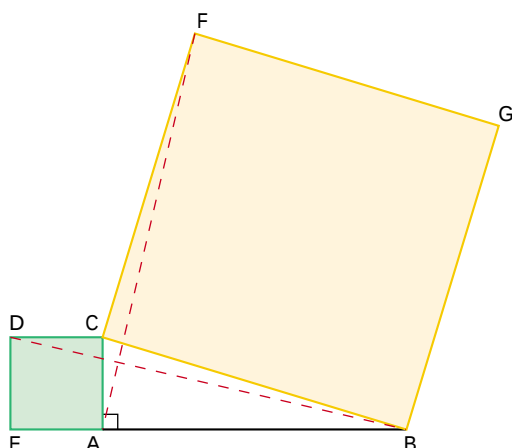
Calculer le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

INDICATION : on pourra comparer les triangles AHB et ACA' (où A' est le point diamétralement opposé à A).



56 Double carré

Dans la figure suivante, ACDE et CFGB sont deux carrés.

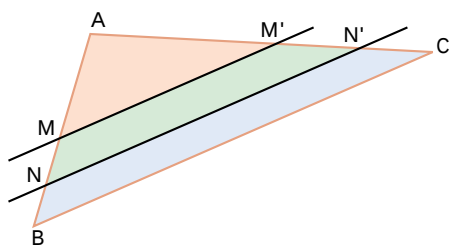


1. Démontrer que les triangles CDB et CAF sont isométriques.
2. Que peut-on en déduire pour les longueurs AF et DB ?
3. Démontrer que les droites (DB) et (AF) sont perpendiculaires.



57 Un partage équitable

On a découpé un triangle ABC en trois zones par des parallèles à la droite (BC), comme indiqué sur la figure.



On souhaite trouver la position des points M et N pour que les aires des trois zones soient égales.

- **1^{re} partie (analyse) :** Supposons que M et N conviennent.

1. Calculer le rapport $k = \frac{AM}{AB}$.

INDICATION : on pourra utiliser l'effet sur l'aire d'une réduction de rapport k .

2. Calculer $h = \frac{AN}{AB}$.

- **2^e partie (synthèse) :** Soit ABC un triangle.

On souhaite à présent construire à la règle et au compas les points M et N qui répondent à la question.

1. a. Construire un triangle équilatéral, de côté AB. Soit G son centre de gravité. Montrer que $AG = k \times AB$ où k est le nombre trouvé dans la 1^{re} partie.

- b. Construire un carré de côté AG. Montrer que sa diagonale a pour longueur $d = h \times AB$ où h est le nombre trouvé dans la 1^{re} partie.

2. On place sur $[AB]$ le point M tel que $AM = AG$ et le point N tel que $AN = d$.

Montrer que les points M et N obtenus conviennent.

58 Tous liés

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle, $[AH]$ sa hauteur issue de A, et D le point du cercle diamétralement opposé à A.

1. Réaliser une figure.
2. Démontrer que les triangles ABH et ACD sont semblables.
3. a. On désigne par R le rayon du cercle.

Démontrer que $AH = \frac{AC \times AB}{2R}$.

- b. On désigne par Σ l'aire du triangle ABC et par a , b et c les longueurs de ses côtés.

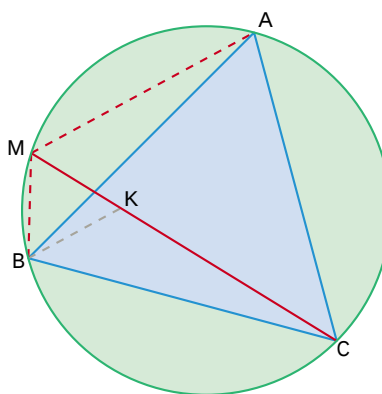
Démontrer l'égalité $4R \times \Sigma = abc$.

59 Somme de distances

Dans la figure ci-dessous, on a représenté un triangle équilatéral ABC et son cercle circonscrit. M est un point de l'arc $\widehat{AB}$ qui ne contient pas C.

Le but de l'exercice est de prouver l'égalité $MA + MB = MC$.

REMARQUE : cette égalité peut être conjecturée à l'aide d'un logiciel de géométrie.



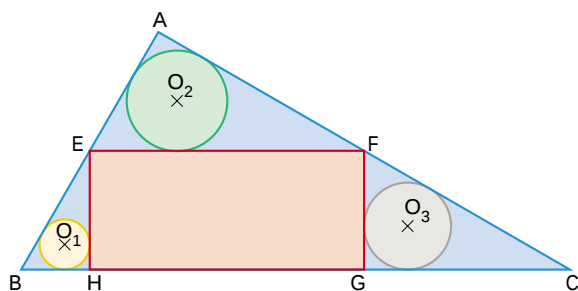
1. a. Démontrer que $\widehat{BMC} = 60^\circ$.
- b. Soit K le point de $[MC]$ tel que $MK = MB$. Quelle est la nature du triangle MKB ?
2. a. À l'aide de l'angle $\widehat{ABK}$, démontrer que $\widehat{MBA} = \widehat{KBC}$.
- b. En déduire que les triangles BMA et BKC sont isométriques.
- c. Conclure.



60 Un autre « sangaku »

On admettra dans cet exercice le résultat démontré dans la partie A du TD 2, à savoir : « si deux triangles sont semblables, les rayons des cercles inscrits sont dans le même rapport que le rapport de similitude ».

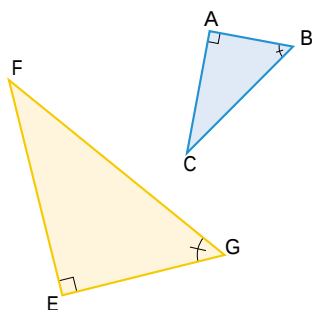
Dans la figure suivante, ABC est un triangle rectangle en A. E et F sont les milieux des côtés [AB] et [AC]. On a inscrit le rectangle EFGH dans le triangle ABC. On a représenté les cercles inscrits dans les triangles rectangles EBH, AEF et CFG. Ils ont pour centres respectifs O_1 , O_2 et O_3 et pour rayons respectifs R_1 , R_2 et R_3 .



1. Démontrer que les triangles EBH, AEF et FGC sont semblables.
2. En déduire que $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{BC}$ et $\frac{R_3}{R_2} = \frac{AC}{BC}$.
3. Démontrer que $R_1^2 + R_3^2 = R_2^2$.

61 La règle de Dostor

Les deux triangles rectangles ABC et EGF ci-dessous sont semblables.



1. On note k le rapport $\frac{EG}{AB}$. Citer deux autres quotients égaux à k .

2. À l'aide du nombre k , établir l'égalité :

$$AB^2 \times EF^2 + AC^2 \times EG^2 = 2AB \times EF \times AC \times EG.$$

INDICATION : on pourra montrer que ces deux expressions sont égales à $2k^2 \times AB^2 \times AC^2$.

3. En déduire la règle énoncée par Dostor, auteur mathématicien du XIX^e siècle : « Lorsque deux triangles rectangles sont semblables, le produit des hypoténuses est égal à la somme des produits des autres côtés homologues », autrement dit $BC \times FG = BA \times EG + AC \times FE$.

4. Qu'obtient-on si on applique la « règle de Dostor » à un triangle rectangle en remarquant qu'il est semblable à lui-même ?

62 À côtés parallèles

1. a. Démontrer que deux triangles qui ont des côtés deux à deux parallèles sont semblables.

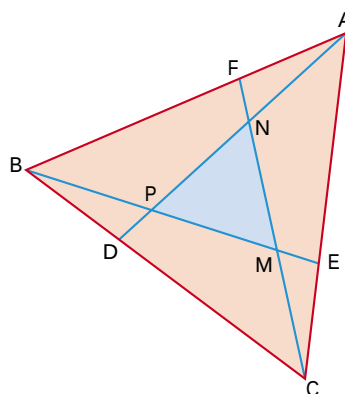
- b. En est-il de même pour deux rectangles ?

Rappel : dire que deux rectangles sont semblables signifie que le rapport des longueurs est égal au rapport des largeurs (voir TD 3).

2. Reprendre la question 1a dans le cas où les côtés sont deux à deux perpendiculaires.

63 Au tiers des trois côtés

Dans la figure ci-dessous, les points E, F et D sont situés au tiers de chaque côté du triangle équilatéral ABC.



1. On note $AB = a$. Démontrer que $AD^2 = \frac{7a^2}{9}$.

Indication : on pourra introduire le point I milieu de [BC].

2. Déterminer le rapport $\frac{\text{aire}(\triangle ABD)}{\text{aire}(\triangle ABC)}$.

3. a. Démontrer que les triangles ABD et BEC sont isométriques. En déduire que BPD et ADB sont semblables.

- b. En utilisant les questions 1 et 3a, déterminer le rapport $\frac{\text{aire}(\triangle BPD)}{\text{aire}(\triangle ABD)}$.

4. En déduire le rapport $\frac{\text{aire}(\triangle MNP)}{\text{aire}(\triangle ABC)}$.

5. a. Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.

- b. En déduire que les triangles ABC et MNP sont semblables.

- c. Déduire de ce qui précède l'expression de MP en fonction de a .

exercices pour aller plus loin

Problèmes de synthèse

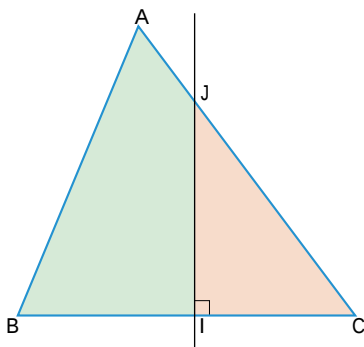


64 À parts égales

Dans le triangle ABC, $AB = 13$, $BC = 14$ et $CA = 15$.

I est un point du segment [BC]. On a tracé la perpendiculaire à (BC) passant par I, délimitant deux zones dans le triangle ABC.

On souhaite déterminer la position du point I pour laquelle les aires de ces deux zones sont égales.



• Première partie (analyse)

On suppose que le point I répond à la question. On pose $CI = x$.

1. Soit [AH] la hauteur du triangle ABC issue de A.

a. Le point I est-il sur [BH] ou sur [HC] ?

b. Démontrer que AH^2 peut s'écrire $13^2 - (14 - CH)^2$ et aussi $15^2 - CH^2$.

c. En déduire la valeur de CH puis celle de AH.

2. a. Calculer l'aire de ABC et en déduire celle de CIJ.

b. Calculer l'aire de CAH et en déduire la valeur du rapport $\frac{\text{aire CIJ}}{\text{aire CAH}}$.

3. a. Démontrer que les triangles CIJ et CHA sont semblables.

b. En déduire une expression de $\frac{\text{aire CIJ}}{\text{aire CAH}}$ en fonction de x.

4. À l'aide des questions 2b et 3b, calculer la valeur de x.

• Deuxième partie (synthèse)

1. Construire un triangle répondant aux hypothèses et placer le point I correspondant à la valeur de x trouvée dans la 1^{re} partie.

2. Démontrer que l'on obtient bien le découpage attendu.



65 Une somme invariante

1. Soit ABC un triangle isocèle en A. Placer un point M sur [BC]. Tracer la hauteur [MJ] du triangle AMC et la hauteur [CH] du triangle ABC. Le cercle de diamètre [MC] recoupe (CH) en K.

2. a. Démontrer que les droites (KM) et (AB) sont parallèles.

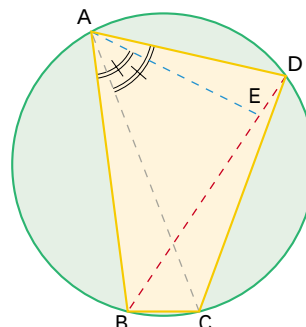
b. En déduire que la distance du point M à la droite (AB) est KH.

3. a. Démontrer que les triangles CMK et MJC sont isométriques.

b. En déduire que la somme des distances du point M aux côtés [AC] et [AB] du triangle ABC ne dépend pas de la position du point M sur [BC].

66 Le théorème de Ptolémée

Le quadrilatère ABCD représenté ci-contre est inscrit dans un cercle.



On a construit le point E sur [BD] tel que $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

1. a. Démontrer que les triangles BEA et CDA sont semblables.

b. Démontrer que AED et ABC sont semblables.

2. En déduire que :

a. $AC \times BE = AB \times CD$

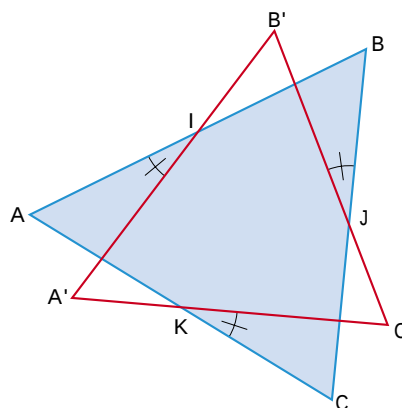
b. $AC \times ED = AD \times BC$.

3. D'aucuns prétendent que pour un quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

Que doit-on en penser ?

67 Autour des milieux

On donne un triangle ABC dont les côtés ont pour milieux I, J et K. On fait tourner chaque droite support d'un côté d'un même angle autour du milieu du côté comme indiqué sur la figure. Les droites ainsi obtenues donnent un nouveau triangle A'B'C'.



1. Démontrer que les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

2. Étudier le cas particulier où ABC est équilatéral et où l'angle de rotation est 60° . Donner dans ce cas le rapport de similitude.

3. Étudier le cas où ABC est équilatéral et où l'angle de rotation est 30° .