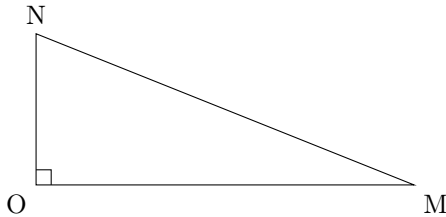


Trigonométrie

★ Exercice 1

Cours



- 1 Compléter les formules suivantes :

$$\sin \widehat{ONM} = \frac{\dots}{\dots} \quad ; \quad \cos \widehat{ONM} = \frac{\dots}{\dots} \quad ; \quad \tan \widehat{ONM} = \frac{\dots}{\dots}$$

- 2 D'après les formules précédentes, compléter (en fonction de ON, OM et MN) les égalités suivantes :

$$(\sin \widehat{ONM})^2 = \frac{\dots}{\dots} \quad ; \quad (\cos \widehat{ONM})^2 = \frac{\dots}{\dots}$$

- 3 En déduire une expression de $(\cos \widehat{ONM})^2 + (\sin \widehat{ONM})^2$.

- 4 Écrire l'égalité déduite du Pythagore appliqué dans MON.
En déduire que $(\cos \widehat{ONM})^2 + (\sin \widehat{ONM})^2 = 1$.

★ Exercice 2

À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de :

1 $\sin(36^\circ)$

3 $\cos(74^\circ)$

5 $\cos(18^\circ)$

2 $\sin(95^\circ)$

4 $\tan(45^\circ)$

6 $\tan(30^\circ)$

★ Exercice 3

À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au degré de l'angle $\widehat{ABC}$ tel que :

1 $\cos \widehat{ABC} = \frac{1}{7}$

3 $\tan \widehat{ABC} = 2$

5 $\sin \widehat{ABC} = 0,1234$

2 $\sin \widehat{ABC} = 0,6$

4 $\cos \widehat{ABC} = 0,5$

6 $\tan \widehat{ABC} = 0,75$

★ Exercice 4

Le triangle ABC, rectangle en A, est tel que $AB = 3$ cm et $AC = 7$ cm.

- 1 Calculer une valeur approchée au centième de $\tan \widehat{BCA}$.

En déduire une valeur approchée au degré de $\widehat{BCA}$.

- 2 En déduire une valeur approchée de BC, puis une valeur approchée au centième de $\cos \widehat{BCA}$.

★ Exercice 5

Soit ABC un triangle isocèle en A, et soit D le milieu de [BC]. On donne : $BC = 6$ cm et $AD = 5$ cm.

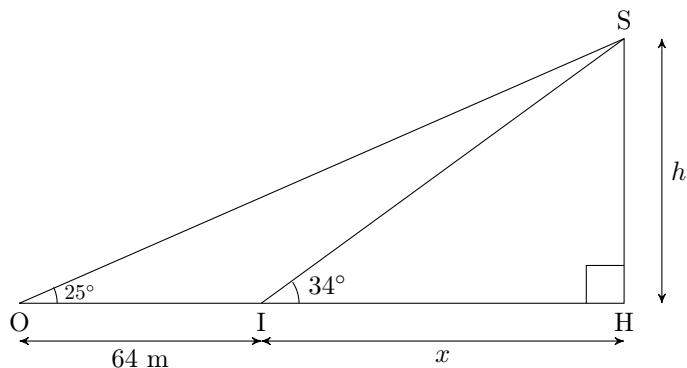
En considérant le triangle ABD par exemple, déterminer la valeur approchée de $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

★ Exercice 6

Dans un triangle ABC rectangle en A, on sait que $\cos \widehat{BCA} = \frac{2}{9}$.

Calculer $\sin \widehat{BCA}$.

★ Exercice 7



- 1 Exprimer $\tan \widehat{ISH}$. En déduire la distance x en fonction de h .
- 2 Exprimer $\tan \widehat{OSH}$. En déduire une autre expression de la distance x en fonction de h .
- 3 En déduire h .

★ Exercice 8

Extrait d'un sujet de Brevet

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre F et de diamètre $AE = 6$ cm et $\mathcal{C}'$ un cercle de centre E et de rayon $[AE]$.

- 1
 - a. Placer sur le cercle $\mathcal{C}$ un point N tel que l'angle $\widehat{EAN}$ mesure 30° .
 - b. Quel est la nature du triangle ANE ?
- 2
 - a. Calculer la longueur NE .
 - b. Calculer la longueur AN . On donnera une valeur approchée à 0,1 près.
- 3 La droite (AN) coupe le cercle $\mathcal{C}'$ en M .
 - a. Démontrer que les droites (FN) et (EM) sont parallèles.
 - b. En déduire que N est le milieu de $[AM]$.
- 4
 - a. Construire la droite d tangente en N au cercle $\mathcal{C}$.
 - b. Démontrer que les droites d et (EM) sont perpendiculaires.
- 5
 - a. Construire la droite d' perpendiculaire à (EM) passant par M .
 - b. Que peut-on dire de la droite d' par rapport au cercle $\mathcal{C}'$.
 - c. Démontrer que les droites d et d' sont parallèles.
- 6 Les droites d et (ME) se coupent en un point H .
 - a. Démontrer que l'angle $\widehat{NMH}$ mesure 30° .
 - b. En utilisant le triangle NMH , calculer la valeur exacte de MH .

★ Exercice 8

1 On a :

$$\sin \widehat{ONM} = \frac{OM}{MN} \quad ; \quad \cos \widehat{ONM} = \frac{ON}{MN} \quad ; \quad \tan \widehat{ONM} = \frac{OM}{ON}$$

2 On élève au carré dans les égalités précédentes :

$$\left(\sin \widehat{ONM}\right)^2 = \frac{OM^2}{MN^2} \quad ; \quad \left(\cos \widehat{ONM}\right)^2 = \frac{ON^2}{MN^2}$$

3 On ajoute les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \left(\sin \widehat{ONM}\right)^2 + \left(\cos \widehat{ONM}\right)^2 &= \frac{OM^2}{MN^2} + \frac{ON^2}{MN^2} \\ &= \frac{OM^2 + ON^2}{MN^2} \end{aligned}$$

4 Le triangle MON est rectangle en O, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$MN^2 = OM^2 + ON^2$$

Donc,

$$\frac{OM^2 + ON^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$$

Ainsi, d'après la question 3, on a :

$$\left(\sin \widehat{ONM}\right)^2 + \left(\cos \widehat{ONM}\right)^2 = 1$$

★ Exercice 9

1 $\sin(36^\circ) \approx 0,588$

3 $\cos(74^\circ) \approx 0,276$

5 $\cos(18^\circ) \approx 0,951$

2 $\sin(95^\circ) \approx 0,996$

4 $\tan(45^\circ) \approx 1$

6 $\tan(30^\circ) \approx 0,577$

★ Exercice 10

1 $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \approx 82^\circ$

3 $\widehat{ABC} = \tan^{-1}(2) \approx 63^\circ$

5 $\widehat{ABC} = \sin^{-1}(0,1234) \approx 7^\circ$

2 $\widehat{ABC} = \sin^{-1}(0,6) \approx 37^\circ$

4 $\widehat{ABC} = \cos^{-1}(0,5) = 60$

6 $\widehat{ABC} = \tan^{-1}(0,75) \approx 37^\circ$

★ Exercice 11

1 Le triangle ABC est rectangle en A donc :

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{7}$$

On en déduit alors que

$$\widehat{BCA} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 23^\circ$$

2 On sait que

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC}$$

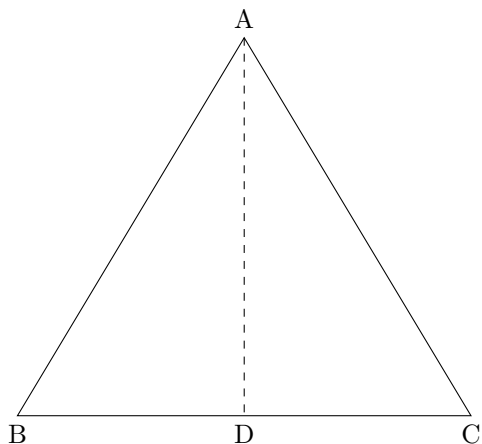
donc

$$\cos(23^\circ) = \frac{7}{BC}$$

À l'aide des produits en croix, on déduit :

$$BC = \frac{7}{\cos(23^\circ)} \approx 7,6 \text{ cm}$$

★ Exercice 12



On sait que :

- ABC est un triangle isocèle en A ;
- D est le milieu de [BC].

Or, dans un triangle isocèle, la droite issue du sommet principale et passant par le milieu du côté opposé est la médiatrice de ce dernier côté.

Ainsi, ADB est un triangle rectangle.

Par conséquent,

$$\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{BD} = \frac{5}{3}$$

d'où :

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \approx 59^\circ.$$

★ Exercice 13

On sait que $\cos \widehat{BCA} = \frac{2}{9}$ et que :

$$(\cos \widehat{BCA})^2 + (\sin \widehat{BCA})^2 = 1$$

donc :

$$\left(\frac{2}{9}\right)^2 + (\sin \widehat{BCA})^2 = 1.$$

Ainsi,

$$(\sin \widehat{BCA})^2 = 1 - \frac{4}{81} = \frac{77}{81}$$

et donc :

$$\sin \widehat{BCA} = \sqrt{\frac{77}{81}}.$$

★ Exercice 14

1 Le triangle ISH est rectangle en H donc :

$$\tan \widehat{ISH} = \frac{IH}{SH}$$

donc

$$\tan(90 - 34) = \frac{x}{h}.$$

En utilisant les produits en croix, on obtient :

$$x = h \times \tan(56^\circ)$$

2 Le triangle OSH est rectangle en H donc :

$$\tan \widehat{\text{OSH}} = \frac{OH}{SH}$$

donc

$$\tan(90 - 25) = \frac{x + 64}{h}.$$

En utilisant les produits en croix, on obtient :

$$x = h \times \tan(65^\circ) - 64$$

3 On déduit des deux questions :

$$h \times \tan(65^\circ) - 64 = h \times \tan(56^\circ)$$

$$h \times \tan(65^\circ) - h \times \tan(56^\circ) = 64$$

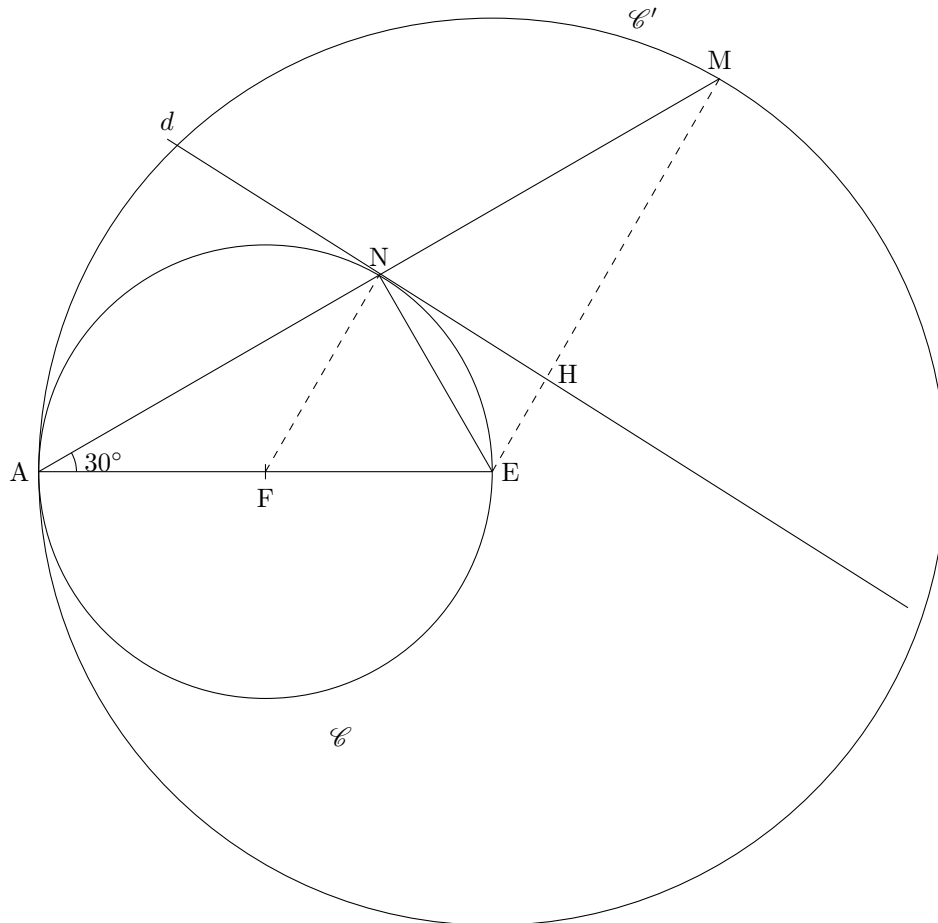
$$h(\tan(65^\circ) - \tan(56^\circ)) = 64$$

$$h = \frac{64}{\tan(65^\circ) - \tan(56^\circ)}$$

$$\underline{h \approx 96,68 \text{ m}}$$

★ Exercice 15

1 *a.* La figure est la suivante :



b. On sait que :

- $N \in \mathcal{C}$;
- $[AE]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.

Or,

Un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre de ce cercle est rectangle

Ainsi, ANE est un triangle rectangle en N.

2 a. ANE est un triangle rectangle en E donc :

$$\sin \widehat{EAN} = \frac{NE}{AE}$$

soit :

$$\sin(30^\circ) = \frac{NE}{6}.$$

On en déduit alors que :

$$NE = 6 \sin(30^\circ)$$

$$\underline{NE = 3 \text{ cm.}}$$

b. Le triangle ANE est rectangle en N donc :

$$\cos \widehat{EAN} = \frac{AN}{AE}$$

soit :

$$\cos(30^\circ) = \frac{AN}{6}$$

d'où :

$$AN = 6 \cos(30^\circ)$$

$$\underline{AN \approx 5,2 \text{ cm.}}$$

3 a. Dans le triangle AEM :

- $\frac{AF}{AE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $\frac{FN}{EM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ainsi, $\frac{AF}{AE} = \frac{FN}{EM}$ et donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (FN) et (EM) sont parallèles.

b. Dans le triangle AME,

- F est le milieu de $[AE]$;
- $(FN) \parallel (EM)$;
- $N \in [AM]$.

Or,

Dans un triangle, la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

Ainsi, N est le milieu de $[AM]$.

4 a. Voir figure.

b. d est, par définition d'une tangente à un cercle, perpendiculaire au rayon $[FN]$.

De plus, (FN) et (EM) sont parallèles.

Or, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Ainsi, d et (EM) sont perpendiculaires.

5 a. Voir figure.

b. d' étant perpendiculaire à un rayon de $\mathcal{C}'$ (à savoir $[EM]$) et passant par un point de ce cercle (le point M), on peut dire que d' est tangente à $\mathcal{C}'$.

c. On sait que :

- $d \perp (EM)$
- $d' \perp (EM)$

Or,

Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.

Ainsi, d et d' sont parallèles.

6

a. Le triangle EMA est isocèle en E car $EA = EM = 6$ cm.

Ainsi, $\widehat{EAN}$ et $\widehat{NMH}$ ont la même mesure.

Donc $\widehat{NMH} = 30^\circ$.

b. Dans le triangle NMH rectangle en H :

$$\cos \widehat{NMH} = \frac{MH}{MN}$$

donc :

$$MH = MN \times \cos(30^\circ).$$

Or, $AN = MN$ car N est le milieu de $[AM]$.

Ainsi, d'après la question 2.b,

$$MH = 6 \times \underbrace{\cos(30^\circ)}_{=AN} \times \cos(30^\circ)$$

Or, $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où :

$$MH = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

et donc :

$$\underline{MH = 4,5 \text{ cm.}}$$