Stéphane PASQUET
http://www.bordeaux-cours-maths.fr
http://www.mathweb.fr

26 novembre 2014

Sommaire

I Fonctions affines et linéaires **3**
Les barreaux de portail 5

II Calcul littéral **9**
Exprimer une aire 11

III Calcul littéral **13**
Résolution d'équations diverses 15
Mise en équation 17

IV Angles inscrits **21**
Le pré du président 23

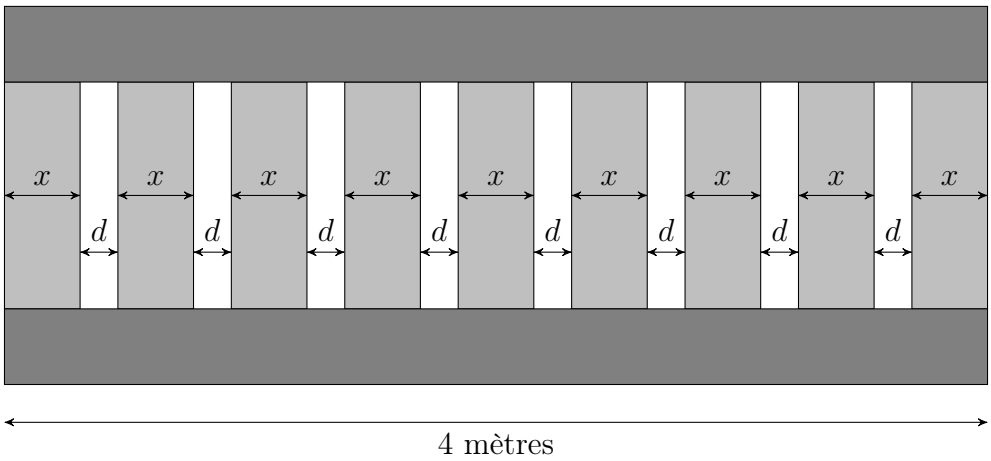
THÈME I

FONCTIONS AFFINES ET LINÉAIRES

★ Les barreaux de portail

[Sommaire]

Un constructeur de portails propose le modèle suivant :



Les rectangles en gris clair sont appelés les « barreaux » du portail. Ils ont tous la même largeur notée x (exprimée en cm).
Entre chaque barreau, il y a la même distance d. Par mesure de sécurité, il faut que $d \leqslant 1$ cm.
Le nombre de barreaux n'est pas connu mais le constructeur souhaite que $1 \leqslant x \leqslant 2$.

1 On suppose qu'il y a 10 barreaux.

a. Montrer que la distance entre chacun d'eux s'exprime par la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{400}{9} - \frac{10}{9}x.$$

b. Montrer que la condition sur x mène à l'encadrement suivant :

$$\frac{380}{9} \leqslant f(x) \leqslant \frac{390}{9}.$$

c. Peut-il y avoir 10 barreaux ? Justifier.

2 On note dans cette question n le nombre de barreaux.

a. Après avoir justifié rapidement que :

$$\frac{400-2n}{n-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{400-n}{n-1},$$

justifier que :

$$\frac{400-n}{n-1} \leqslant 1.$$

b. Quel est le minimum de barreaux possible ? Justifier.

Correction

1 *a.* S'il y a 10 barreaux, il y a 9 espacements entre chacun d'eux.
La longueur totale des barreaux mis bout-à-bout est égale à : $10x$ cm. Il reste donc $400-10x$ cm (4 mètres = 400 cm) à répartir en 9 espacements entre chaque barreaux.
Donc :

$$f(x) = \frac{400-10x}{9}$$

soit :

$$f(x) = \frac{400}{9} - \frac{10}{9}x.$$

b.

$$\begin{aligned}
1 \leqslant x \leqslant 2 & \\
-\frac{10}{9} \geqslant -\frac{10}{9}x \geqslant -\frac{10}{9} \times 2 & \quad \text{On multiplie par } -\frac{10}{9} \text{ donc on change les signes} \\
-\frac{20}{9} \leqslant -\frac{10}{9}x \leqslant -\frac{10}{9} & \quad \text{On remet dans le sens le plus conventionnel} \\
-\frac{20}{9} + \frac{400}{9} \leqslant -\frac{10}{9}x + \frac{400}{9} \leqslant -\frac{10}{9} + \frac{400}{9} & \\
\frac{380}{9} \leqslant f(x) \leqslant \frac{390}{9} &
\end{aligned}$$

c. $f(x)$ représente la distance entre chaque barreau, distance qui doit être inférieure à 1 cm d'après l'énoncé. Or, $\frac{380}{9} \approx 42,22$ donc $f(x)$ ne remplit pas ici cette condition.

2 *a.* En remplaçant « 10 » par « n » dans le raisonnement de la question 1, on trouve :

$$\frac{400-2n}{n-1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{400-n}{n-1}.$$

On veut que $f(x) \leqslant 1$ donc :

$$\frac{400-n}{n-1} \leqslant 1.$$

b. On résout l'inéquation $\frac{400-n}{n-1} \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{400-n}{n-1} &\leqslant 1 \\
\frac{400-n}{n-1} - 1 &\leqslant 0 \\
\frac{400-n}{n-1} - \frac{n-1}{n-1} &\leqslant 0 \\
\frac{400-n-(n-1)}{n-1} &\leqslant 0 \\
\frac{401-2n}{n-1} &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Comme $n-1 \geqslant 0$, cela signifie :

$$\begin{aligned}
401 - 2n &\leqslant 0 \\
401 &\leqslant 2n \\
\frac{401}{2} &\leqslant n \\
n &\geqslant \frac{401}{2} \\
n &\geqslant 200,5
\end{aligned}$$

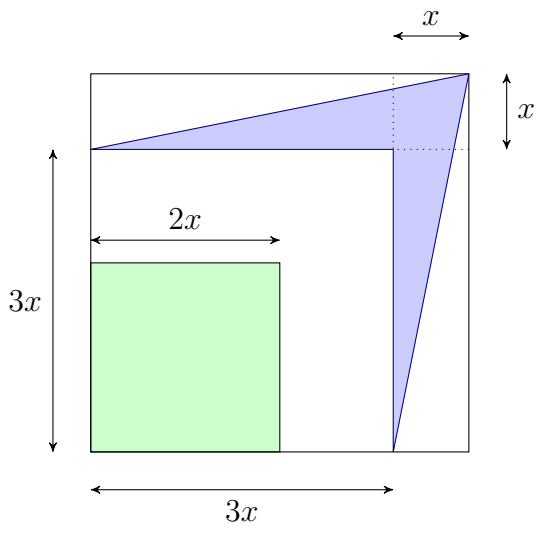
Mais n est un entier. Donc la plus petite valeur de n est 201.
Il faut donc au minimum 201 barreaux.

THÈME II

CALCUL LITTÉRAL

★ Exprimer une aire

[Sommaire]



Exprimer en fonction de x l'aire bleue.
Est-elle égale à l'aire du carré colorié en vert ?

Correction

Nous allons calculer l'aire du grand carré, puis celle du carré intérieur droit et des triangles rectangles en coin (qui sont identiques).

- **Aire du grand carré.**

  $\mathscr{A} = (4x)^2 = 16x^2$.
- **Aire du carré intérieur.**
  $\mathscr{A}_1 = (3x)^2 = 9x^2$.
- **Aire des deux triangles rectangles.**
  $\mathscr{A}_2 = \dfrac{x \times 3x}{2} \times 2 = 3x^2$.
- **Aire coloriée.**
  L'aire coloriée est donc :

  $$\mathbb{A} - \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 = 16x^2 - 9x^2 - 3x^2 = 4x^2.$$

  L'aire du carré en vert est : $(2x)^2 = 4x^2$ donc elle est égale à celle de la figure en bleue.

THÈME III

CALCUL LITTÉRAL

★ Résolution d'équations diverses

[Sommaire]

Résoudre les équations suivantes :

1 $3x - 7 = 4x + 1$

2 $\frac{1}{2}x - 8 = 9x - 1$

3 $-\frac{1}{3}x + 4 = \frac{1}{2}x - 4$

4 $\frac{x-9}{2} + \frac{2x+4}{5} = -5$

5 $\frac{3x-7}{7} - \frac{2x+1}{2} = 1$

6 $\frac{4x-1}{5} + \frac{7x-8}{4} = 3$

1

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= 4x + 1 \\ 3x - 4x &= 1 + 7 \\ -x &= 8 \\ &\boxed{x = -8} \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - 8 &= 9x - 1 \\ \frac{1}{2}x - 9x &= -1 + 8 \\ \frac{1}{2}x - \frac{18}{2}x &= 7 \\ -\frac{17}{2}x &= 7 \\ x &= 7 \times \left(-\frac{2}{17}\right) \\ &\boxed{x = -\frac{14}{17}} \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x + 4 &= \frac{1}{2}x - 4 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x &= -4 - 4 \\ -\frac{2}{6}x - \frac{3}{6}x &= -8 \\ -\frac{5}{6}x &= -8 \\ x &= -8 \times \left(-\frac{6}{5}\right) \\ &\boxed{x = \frac{48}{5}} \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} \frac{x-9}{2} + \frac{2x+4}{5} &= -5 \\ \frac{5(x-9)}{10} + \frac{2(2x+4)}{10} &= \frac{-50}{10} \\ 5(x-9) + 2(2x+4) &= -50 \\ 5x - 45 + 4x + 8 &= -50 \\ 9x &= -50 + 45 - 8 \\ 9x &= -13 \\ &\boxed{x = -\frac{13}{9}} \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} \frac{3x-7}{7} - \frac{2x+1}{2} &= 1 \\ \frac{2(3x-7)}{14} - \frac{7(2x+1)}{14} &= \frac{14}{14} \\ 2(3x-7) - 7(2x+1) &= 14 \\ 6x - 14 - 14x - 7 &= 14 \\ 6x - 14x &= 14 + 14 + 7 \\ -8x &= 35 \\ &\boxed{x = -\frac{35}{8}} \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{5} + \frac{7x-8}{4} &= 3 \\ \frac{4(4x-1)}{20} + \frac{5(7x-8)}{20} &= \frac{3 \times 20}{20} \\ 4(4x-1) + 5(7x-8) &= 60 \\ 16x - 4 + 35x - 40 &= 60 \\ 16x + 35x &= 60 + 4 + 40 \\ 51x &= 104 \\ &\boxed{x = \frac{104}{51}} \end{aligned}$$

★ Mise en équation

[Sommaire]

Pour chaque question, trouver l'équation qui permet de trouver le résultat, puis la résoudre.

1 La somme de trois nombres entiers consécutifs (qui se suivent) est égale à 1 377.
Trouver ces trois nombres.

2 Hugo a 7 ans et Louise en a 26.
Dans combien d'années l'âge de Louise sera égal au double de celui d'Hugo ?

3 Une tasse est remplie au trois quarts. Si on lui ajoute 10 ml, on la remplit à ras bord.
Quelle est la contenance de cette tasse ?

4 Paul a une certaine somme d'argent. Pierre a le double de Paul et Jean a la moitié de Paul. À eux trois, ils ont 210 €. Combien d'argent possède Paul ?

Correction

1 *La somme de trois nombres entiers consécutifs (qui se suivent) est égale à 1 377.*

Notons x le deuxième nombre ; ainsi, le nombre qui précède est $x-1$ et celui qui suit est $x+1$.
La somme des trois nombres est alors :

$$(x-1)+x+(x+1)=3x.$$

On sait que la somme des trois nombres est égale à 1 377 donc on a l'équation :

$$3x = 1\,377.$$

Ainsi,

$$x = \frac{1\,377}{3} = 459.$$

Les trois nombres consécutifs sont donc 458, 459 et 460.

2 *Hugo a 7 ans et Louise en a 26.*
Dans x années, Louise aura $26+x$ ans et Hugo aura $7+x$ ans.
Si l'âge de Louise est égal au double de l'âge d'Hugo, alors :

$$26+x = 2(7+x).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} 26+x &= 14+2x \\ 26-14 &= 2x-x \\ 12 &= x \end{aligned}$$

Ainsi, dans 12 ans, Louise aura deux fois l'âge d'Hugo (Elle aura $26+12=38$ ans et Hugo en aura $7+12=19$).

3 *Une tasse est remplie au trois quarts. Si on lui ajoute 10 ml, on la remplit à ras bord.*
Notons x la contenance de cette tasse (em ml).
Alors :

$$\frac{3}{4}x + 10 = x.;$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 10 &= x - \frac{3}{4}x \\ 10 &= \frac{4}{4}x - \frac{3}{4}x \\ 10 &= \frac{1}{4}x \\ 10 \times 4 &= x \\ 40 &= x \end{aligned}$$

La tasse a donc une contenance de 10 ml.

4 *Paul a une certaine somme d'argent. Pierre a le double de Paul et Jean a la moitié de Paul. À eux trois, ils ont 210 €.*

Notons x la somme que possède Paul (en €).

Alors, Pierre a $2x$ € et Jean a $\frac{1}{2}x$ €.

En tout, ils ont donc :

$$x + 2x + \frac{1}{2}x \text{ €}.$$

On sait que la somme totale est égale à 210 € donc :

$$x + 2x + \frac{1}{2}x = 210.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 3x + \frac{1}{2}x &= 210 \\ \frac{6}{2}x + \frac{1}{2}x &= 210 \\ \frac{7}{2}x &= 210 \\ x &= 210 \times \frac{2}{7} \\ x &= 60 \end{aligned}$$

<u>Paul possède donc 60 €.</u>

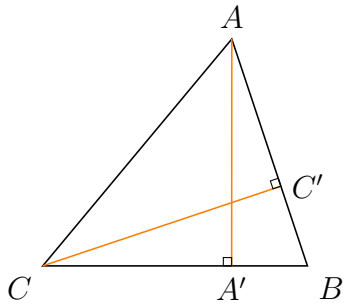
THÈME IV

ANGLES INSCRITS

★ Le pré du président

[Sommaire]

Le pré du président de l'Association des Matheux Agriculteurs (A.M.A.) est de forme triangulaire comme sur la figure ci-dessous :



En A', B' et C', il installe des cabanons, où (AA'), (BB') et (CC') sont les hauteurs de ce triangle.

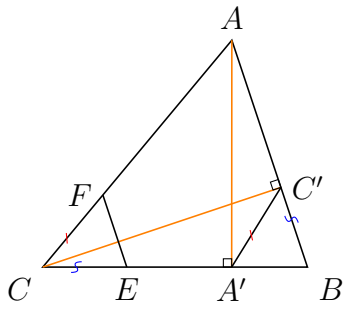
1 Montrer que A' et C' sont sur le cercle de diamètre [AC].

2 En déduire que $\widehat{CC'A'}$ et $\widehat{CAA'}$ ont la même mesure.

3 *a.* Montrer que $\widehat{CAA'} + \widehat{A'CA} = \widehat{CC'A'} + \widehat{A'C'B}$.

b. En vous aidant de la question **2**, en déduire que $\widehat{A'C'B} = \widehat{A'CA}$

Il décide alors de reproduire la parcelle BA'C' du côté du sommet C en formant la parcelle CEF.



Les résultats des questions 3.a. et 3.b. seront donnés au centième.

4 Il sait que $\widehat{CBA} = 75^\circ$, BC = 50 m et BA = 40 m.

a. Calculer BC'.

b. Calculer BA'.

5 *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans la note finale.*

Calculer une valeur approchée à l'unité de $\widehat{A'CA}$.

1 Les triangles A'CA et ACC' sont rectangles et ont tous les deux pour hypoténuse [AC]. Or, le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse. Par conséquent, A'CA et ACC' ont pour cercle circonscrit le cercle de diamètre [AC].

2 Les points C, A, A' et C' sont sur un même cercle (de diamètre [AC]) ; de plus, les angles $\widehat{\mathrm{CC'A'}}$ et $\widehat{\mathrm{CAA'}}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{CA'}$. Ils ont donc la même mesure.

3 *a.* Dans un triangle rectangle, les angles autres aigus sont complémentaires donc, dans le triangle ACA', $\widehat{\mathrm{A'CA}} + \widehat{\mathrm{CAA'}} = 90^\circ$.
De plus, $\widehat{\mathrm{A'C'B}} + \widehat{\mathrm{CC'A'}} = 90^\circ$.
On a donc : $\widehat{\mathrm{A'CA}} + \widehat{\mathrm{CAA'}} = \widehat{\mathrm{A'C'B}} + \widehat{\mathrm{CC'A'}}$.

b. D'après la question 2, on peut remplacer $\widehat{\mathrm{CC'A'}}$ par $\widehat{\mathrm{CAA'}}$ dans l'égalité de la question 3.b., ce qui donne :

$$\widehat{\mathrm{A'CA}} + \cancel{\widehat{\mathrm{CAA'}}} = \widehat{\mathrm{A'C'B}} + \cancel{\widehat{\mathrm{CAA'}}}$$

d'où :

$$\underline{\widehat{\mathrm{A'CA}} = \widehat{\mathrm{A'C'B}}}.$$

4 *a.* Dans le triangle BCC' rectangle en C',

$$\cos \widehat{\mathrm{CBC'}} = \frac{\mathrm{BC'}}{\mathrm{BC}}$$
$$\cos 75^\circ = \frac{\mathrm{BC'}}{50}$$

donc :

$$\underline{\mathrm{BC'} = 50 \cos 75^\circ \approx 12,94 \text{ m}}.$$

b. Dans le triangle BA'A rectangle en A',

$$\cos \widehat{\mathrm{A'BC'}} = \frac{\mathrm{BA'}}{\mathrm{BA}}$$
$$\cos 75^\circ = \frac{\mathrm{BA'}}{40}$$

donc :

$$\underline{\mathrm{BA'} = 40 \cos 75^\circ \approx 10,35 \text{ m}}.$$

5 Dans le triangle rectangle en BA'A rectangle en A', on a :

$$\sin \widehat{\mathrm{A'BA}} = \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{AB}}$$
$$\sin 75^\circ = \frac{\mathrm{AA'}}{40}$$

d'où :

$$\mathrm{AA'} = 40 \sin 75^\circ.$$

De plus,

$$\mathrm{CA'} = \mathrm{CB} - \mathrm{A'B} = 50 - 40 \cos 75^\circ.$$

Donc, dans le triangle ACA' rectangle en A',

$$\begin{aligned}
\tan \widehat{\mathrm{ACA'}} &= \frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{CA'}} \\
\tan \widehat{\mathrm{ACA'}} &= \frac{40 \sin 75^\circ}{50 - 40 \cos 75^\circ} \\
\tan \widehat{\mathrm{ACA'}} &\approx 0,975
\end{aligned}$$

D'où :

$$\underline{\widehat{\mathrm{ACA'}} \approx \tan^{-1}(0,975) \approx 44^\circ.}$$