

Les lunules d'Hippocrate

Stéphane PASQUET

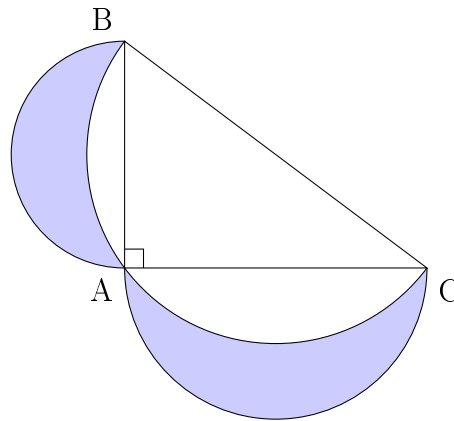
<http://www.mathweb.fr>

18 février 2011

Soit ABC un triangle rectangle en A . On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

On construit alors le demi-cercle de diamètre $[BC]$ passant par A , puis les demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$ extérieurs au triangle.

Exprimez, en fonction de b et c l'aire de la surface bleue (que l'on nomme *Lunules d'Hippocrate*).



Réponse.

L'aire des lunules d'Hippocrate se calcule en faisant :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_{ABC}$$

où :

$\mathcal{A}_1$ représente l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$,

$\mathcal{A}_2$ représente l'aire du demi-disque de diamètre $[AC]$,

$\mathcal{A}_3$ représente l'aire du demi-disque de diamètre $[BC]$ et

$\mathcal{A}_{ABC}$ représente l'aire du triangle ABC .

On a donc :

$$\mathcal{A} = \pi \frac{c^2}{8} + \pi \frac{b^2}{8} - \pi \frac{a^2}{8} + \frac{bc}{2}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore, $a^2 = b^2 + c^2$. D'où :

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{bc}{2}}$$