

? Intérêts de l'activité

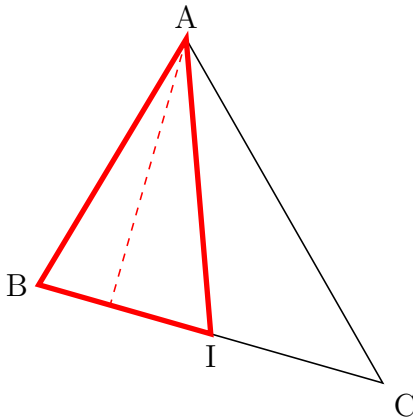
- 1 Revoir la géométrie du triangle
- 2 Démonstration d'une propriété sur les aires
- 3 Manipulations algébriques

Activité

Dans toute cette activité, si XYZ est un triangle, on notera $\mathcal{A}_{XYZ}$ son aire.

- 1 On considère un triangle quelconque ABC . Soit I le milieu de $[BC]$.
Montrez que $\mathcal{A}_{AIB} = \mathcal{A}_{AIC}$.
- 2 Soient J et K les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$. Soit G le point de concours de (AI) , (BJ) et (CK) .
Montrez que $\mathcal{A}_{AKG} = \mathcal{A}_{AJG} = \mathcal{A}_{BGK} = \mathcal{A}_{BGI} = \mathcal{A}_{CGI} = \mathcal{A}_{CGJ}$.
- 3 Déduisez-en que $\mathcal{A}_{BAG} = \mathcal{A}_{BCG} = \mathcal{A}_{GAC}$.

- 1 Considérons le triangle ABI :



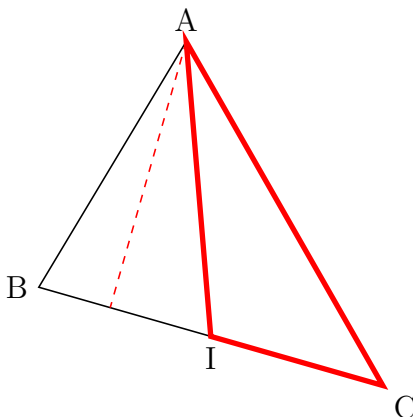
Son aire est donnée par la formule :

$$\frac{b \times h}{2}$$

où b représente par exemple BI et h la hauteur relative à $[BI]$ (donc issue de A) comme représentée sur la figure ci-contre.

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{ABI} = \frac{BI \times h}{2}.$$

Considérons maintenant le triangle ACI :



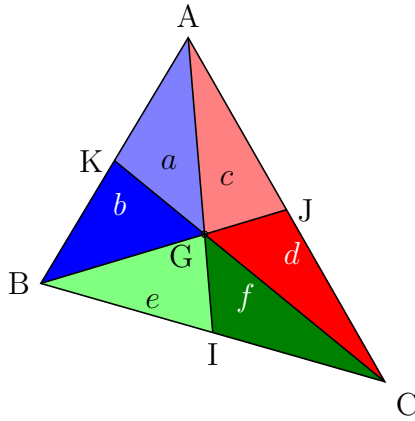
On a alors :

$$\mathcal{A}_{ACI} = \frac{CI \times h}{2} = \frac{BI \times h}{2}$$

car $CI = BI$.

Finalement, on a bien $\mathcal{A}_{ACI} = \mathcal{A}_{ABI}$.

2 On a la figure suivante :



Posons :

- $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{AKG} + \mathcal{A}_{BKG} = a + b$;
- $\mathcal{A}_{ACG} = \mathcal{A}_{AJG} + \mathcal{A}_{CGJ} = c + d$;
- $\mathcal{A}_{BGC} = \mathcal{A}_{BGI} + \mathcal{A}_{CGI} = e + f$.

De la question précédente, on sait que :

- $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{ACI}$ donc $a + b + e = c + d + f$.
- $\mathcal{A}_{ABJ} = \mathcal{A}_{BCJ}$ (car (BJ) est aussi une médiane) donc $a + b + c = d + f + e$.

De ces deux dernières égalités, on en déduit que $e = c$.

Par un raisonnement analogue, on peut ensuite démontrer que $a = f$ et $b = d$.

De plus, (GK) est une médiane de ABG donc $a = b$.

De même, $c = d$ et $e = f$.

Finalement, on a $a = b = c = d = e = f$.

3 On déduit de la question précédente que $a + b = c + d = e + f$ donc $\mathcal{A}_{BAG} = \mathcal{A}_{BCG} = \mathcal{A}_{GAC}$.