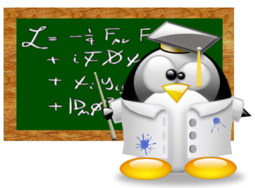
Stéphane PASQUET, 25 novembre 2014

Sommaire



Prérequis

- Notations et vocabulaire mathématiques (chapitre 1)
- Notions de base de géométrie euclidienne de collège
- Théorème de Pythagore
- Théorème des milieux

Définitions *Repère orthonormé*

Soient O, I et J trois points du plan tels que :

- $\mathrm{OI} = \mathrm{OJ}$;
- $(\mathrm{OI}) \perp (\mathrm{OJ})$.

Alors, ces trois points définissent un `repère orthonormé` du plan.
La droite (OI) est appelée l'`axe des abscisses` et la droite (OJ), l'`axe des ordonnées` du repère (O,I,J).
Les segments [OI] et [OJ] définissent les `unités` de chaque axe.
Le point O est appelé l'`origine` du repère (O,I,J).

Un repère sert, comme son nom l'indique, à repérer des points dans le plan par rapport à l'origine et aux unités utilisées.

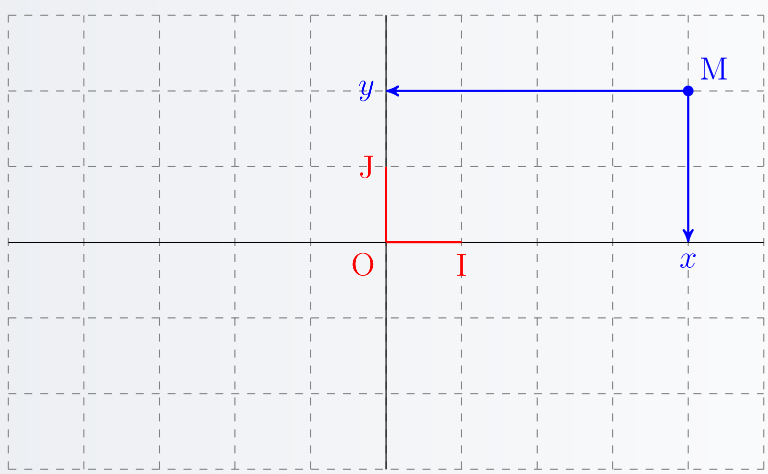
Définition *Abscisse, ordonnée et coordonnées*

On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,I,J).
Soit M un point quelconque du plan.
Par M, on trace la parallèle à (OJ) ; elle coupe (OI) en X.
Par M, on trace la parallèle à (OI) ; elle coupe (OJ) en Y.
On considère les nombres x et y tels que :

- $\mathrm{OX} = x\mathrm{OI}$;
- $\mathrm{OY} = y\mathrm{OJ}$.

Alors, x est appelé l'`abscisse` de M et y, son `ordonnée`.
Le couple $(x\,;y)$ représente les `coordonnées` du point M, et on note : $\mathrm{M}(x\,;y)$.

Exemple



Ici, $\mathrm{M}(4\,;2)$. Son abscisse est 4, son ordonnée est 2.

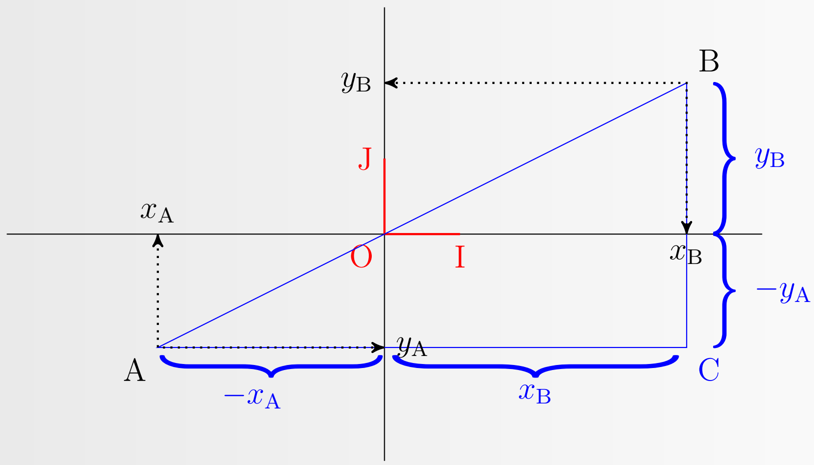
Propriété

Distance entre deux points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ deux points quelconques.
Alors, la distance entre A et B est donnée par la formule :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}.$$

Démonstration



Le repère est orthonormé donc le triangle ABC tracé en bleu est rectangle en C.
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2.$$

Or,

$$\mathrm{AC} = -x_\mathrm{A} + x_\mathrm{B} = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}$$

et

$$\mathrm{BC} = y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}.$$

Donc,

$$\mathrm{AB}^2 = (x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2.$$

En prenant la racine carrée de chacun des membres de cette dernière égalité, on a :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}.$$

Exemple

Soient $\mathrm{A}(-3\,;2)$ et $\mathrm{B}(5\,;-7)$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(5-(-3))^2+(-7-2)^2}\\ &= \sqrt{8^2+(-9)^2}\\ &= \sqrt{145}.\end{aligned}$$

Propriété

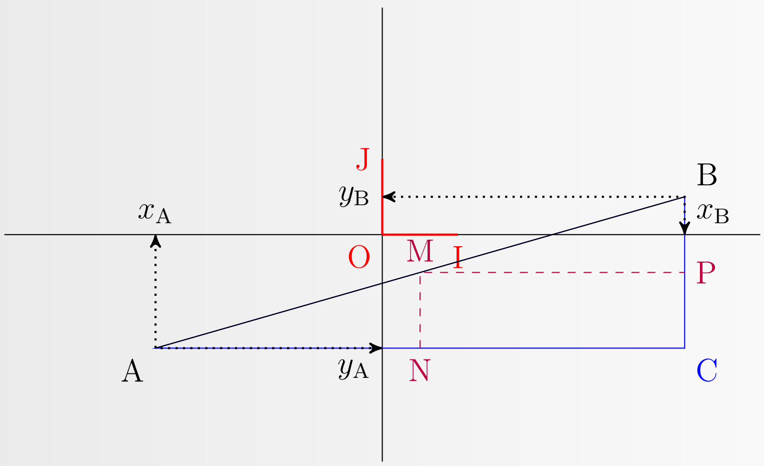
Coordonnées du milieu d'un segment

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Dans ce repère, soient $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}\,;y_{\mathrm{B}})$ deux points quelconques.
Soit $\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}\,;y_{\mathrm{M}})$ le milieu du segment [AB]. Alors,

$$x_{\mathrm{M}} = \frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_{\mathrm{M}} = \frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}.$$

Démonstration

On construit le triangle ABC rectangle en C comme indiqué ci-dessous :



On trace la parallèle à (BC) passant par M ; elle coupe [AC] en N.
On trace la parallèle à (AC) passant par M ; elle coupe [BC] en P.
D'après le théorème des milieux, P est le milieu de [BC] et N celui de [AC].
Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{AN} &= \frac{1}{2}\mathrm{AC} \\ \mathrm{AN} &= \frac{1}{2}\left(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}\right) \\ \mathrm{AN} &= \frac{1}{2}x_{\mathrm{C}} - \frac{1}{2}x_{\mathrm{A}} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{N}} &= x_{\mathrm{A}} + \mathrm{AN} \\ x_{\mathrm{N}} &= x_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}x_{\mathrm{C}} - \frac{1}{2}x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{N}} &= \frac{1}{2}x_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}x_{\mathrm{C}} \\ x_{\mathrm{M}} = x_{\mathrm{N}} &= \frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2} \text{ car } x_{\mathrm{C}} = x_{\mathrm{B}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{PC} &= \frac{1}{2}\mathrm{BC} \\ \mathrm{PC} &= \frac{1}{2}\left(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{C}}\right) \quad (\text{il faut que } \mathrm{PC} \geqslant 0) \\ \mathrm{PC} &= \frac{1}{2}y_{\mathrm{B}} - \frac{1}{2}y_{\mathrm{C}} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{P}} &= y_{\mathrm{C}} + \mathrm{PC} \\ y_{\mathrm{P}} &= y_{\mathrm{C}} + \frac{1}{2}y_{\mathrm{B}} - \frac{1}{2}y_{\mathrm{C}} \\ y_{\mathrm{P}} &= \frac{1}{2}y_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}y_{\mathrm{C}} \\ y_{\mathrm{M}} = y_{\mathrm{P}} &= \frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2} \text{ car } y_{\mathrm{C}} = y_{\mathrm{A}}. \end{aligned}$$

Algorithme : calcul d'une distance et coordonnées d'un milieu

```
> Entrées
    xA, yA : les coordonnées du point A
    xB, yB : les coordonnées du point B
    d : distance AB
    xM, yM : coordonnées du milieu de [AB]
> Traitement
    Affecter à d la valeur √[(xB-xA)²+(yB-yA)²]
    Affecter à xM la valeur (xA+xB)/2
    Affecter à yM la valeur (yA+yB)/2
> Sortie
    Afficher : "La distance AB est égale à : "
    Afficher d
    Retour à la ligne
    Afficher : "les coordonnées du milieu de [AB] sont :"
    Afficher (xM;yM)
```