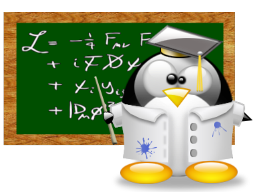
Stéphane PASQUET, 4 juillet 2014

Sommaire

Fonction 2
Images et antécédents 2
Domaine de définition 2
Tableau de valeurs 3
Courbe représentative 4
Lecture graphique 5
Fonction croissante, fonction décroissante 5
Sens de variation à partir d'une expression 6
Tableau de variations 6
Maximum, minimum 7



Prérequis

- Notations et vocabulaire mathématiques (chapitre 1)
- Notion de fonctions (classe de 3e)
- Factorisation (classe de 3e)
- Équation de la forme $ax + b = 0$
- Inéquation de la forme $ax + b \geqslant 0$ ou $ax + b \leqslant 0$

Définition

Fonction

Une `fonction` est un processus qui, à un nombre, associe un autre nombre.
Le processus est en général donné par une expression algébrique.

Notation

Une fonction est notée par une lettre ; en général, on utilise la lettre « f ».
Dans ce cas, le processus est noté comme ceci :

nom de la fonction

domaine de définition

ensemble image

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathrm{I} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

antécédent de $f(x)$:
variable de la fonction

image de x

Exemples

1. On considère la fonction f qui donne l'aire d'un carré de côté x.
   Alors, on peut définir f par : $f(x) = x^2$.
2. On considère la fonction p qui donne le périmètre d'un carré de côté x.
   Alors, on peut définir p par : $p(x) = 4x$.

Définitions

Images et antécédents

On considère une fonction f et on note $y = f(x)$. Alors,

- y est `l'image` de x par la fonction f ;
- x est `un antécédent` de y par la fonction f.

Il ne peut y avoir qu'une seule image à un nombre mais il peut y avoir plusieurs antécédents à un nombre.
Par exemple, si $f(x) = x^2$, il existe deux antécédents au nombre 4 : $x = -2$ et $x = 2$ car le carré de ces deux nombres est égal à 4.

Définition — *Domaine de définition*

Le `domaine de définition` d'une fonction f est l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

Notation

On note généralement le domaine de définition de f par : $\mathscr{D}_f$.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$.
On peut calculer $f(x)$ quand le dénominateur n'est pas nul donc on dira que :

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | x - 3 \neq 0\}$$

(Le domaine de définition est l'ensemble des réels x tels que $x - 3 \neq 0$)
Plus simplement, on écrira :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

(L'ensemble des réels auquel on a enlevé le nombre « 3 »)
On peut aussi l'écrire de la manière suivante :

$$\mathscr{D}_f =]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[.$$

Ici, le symbole « $\cup$ » se lit « union » et signifie que les deux intervalles $]-\infty\,;3[$ et $]3\,;+\infty[$ sont unis pour formés le domaine de définition.
Au niveau du « 3 », on voit que les crochets sont orientés dans le sens opposé ; cela signifie que le nombre « 3 » n'est dans aucun intervalle.

Définition — *Tableau de valeurs*

Soit f une fonction. Un `tableau de valeurs` est un tableau à deux lignes :

- Sur la première ligne, on met les valeurs de x ;
- Sur la seconde ligne, on met les valeurs des images de x que l'on a prises.

Exemple

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 2$. Nous allons construire un tableau de valeurs pour $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ et $x = -2$.
Il faut donc pour cela calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

···

Exemple (suite)

- $f(-2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$.
- $f(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3$.
- $f(0) = 0^2 + 2 = 0 + 2 = 2$.
- $f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$.
- $f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$.

Le tableau de valeurs est donc :

$\boldsymbol{x}$	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{f(x)}$	6	3	2	3	6

Définition

Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un intervalle quelconque $[a\,;b]$, où a et b sont deux nombres réels.
La `courbe représentative` de la fonction f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x\,;f(x))$ pour $x \in [a\,;b]$ dans un repère.

Remarque

Quand on utilise un logiciel informatique, ou même une calculatrice pour construire la courbe représentative d'une fonction, elle utilise un algorithme très simple :

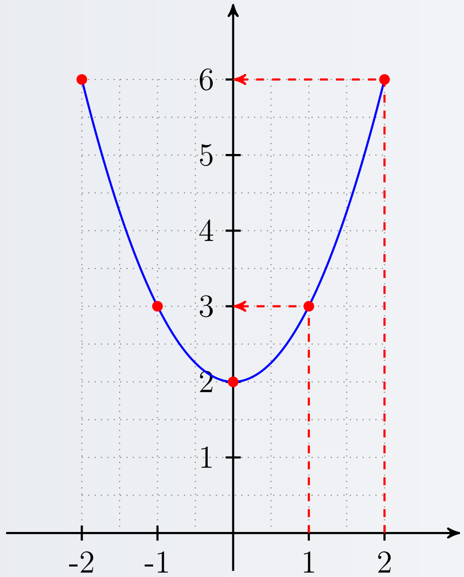
Algorithme

```
> Entrées
    a et b sont les bornes de l'intervalle
    x est une variable réelle
    d est une variable réelle très petite
> Traitement
    On affecte à x la valeur a
    Tant que x⩽b
        On place le point de coordonnée (x;f(x))
        On affecte à x la valeur x+d
    Fin du Tant que
```

Par exemple, si on souhaite tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2$ sur l'intervalle $[-2\,;2]$, on commence par placer le point de coordonnées $(-2\,;f(-2))$. Ensuite, on ajoute par exemple 0,01 à -2 (on obtient $-1,99$) et on place le point de coordonnées $(-1,99\,;f(-1,99))$. On ajoute ensuite 0,01 à $-1,99$ (on obtient $-1,98$) et on place le point de coordonnées $(-1,98\,;f(-1,98))$. On continue ainsi jusqu'à arriver à $x = 2$.

Exemple

Voici la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2$ sur $[-2\,;2]$:

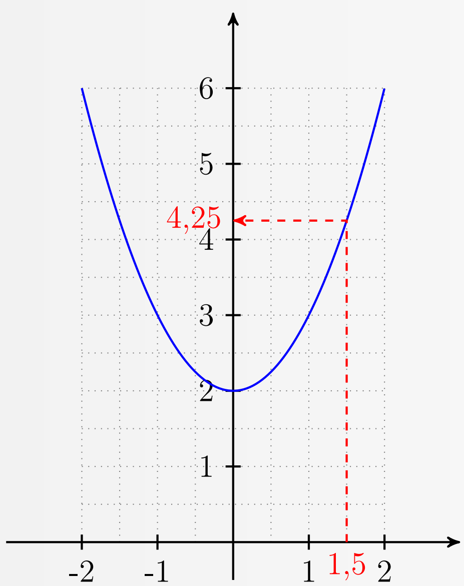


Pour construire la courbe, on s'aide du tableau de valeurs construit précédemment. On place donc les points de coordonnées $(0\,;2)$, $(1\,;3)$, $(2\,;6)$, puis $(-1\,;3)$ et $(-2\,;6)$.

Ensuite, on lie les points d'une façon harmonieuse et pas trop rectiligne.

Remarque

Lecture graphique



À l'aide de la courbe représentative de f, on peut donner une valeur approchée de l'image de 1,5 par f : $f(1,5) = 4,25$.

Ensuite, on peut vérifier par le calcul :

$$\begin{aligned} f(1,5) &= (1,5)^2 + 2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{8}{4} \\ &= \frac{17}{4} \\ &= 4,25. \end{aligned}$$

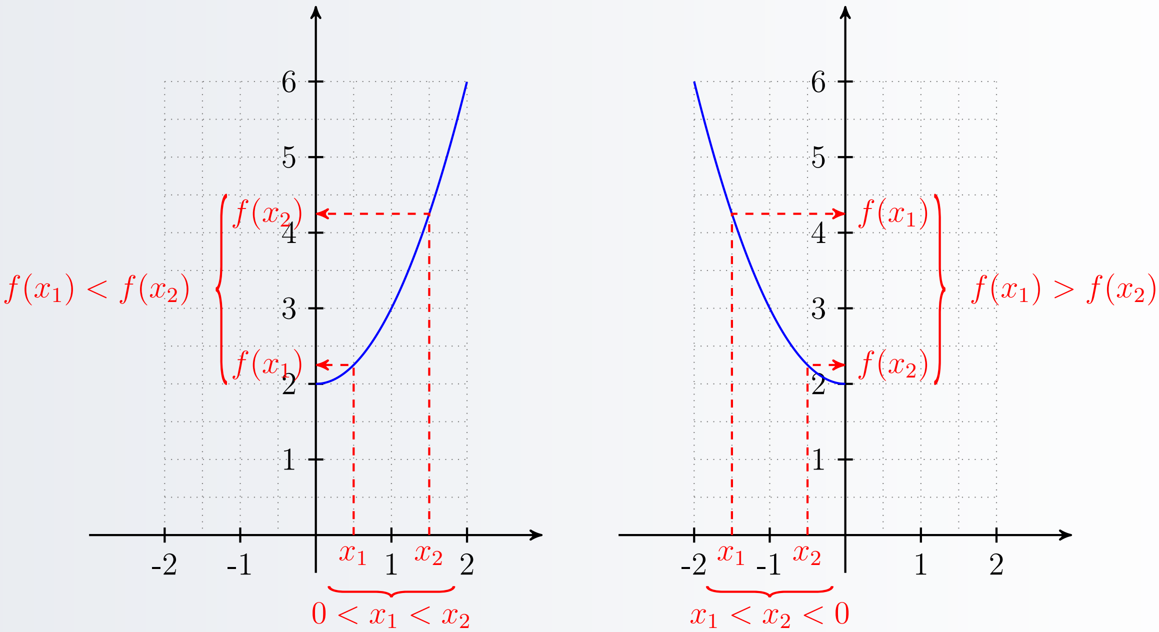
Définition

Fonction croissante, fonction décroissante

- Une fonction f est `croissante` sur un intervalle $[a\,;b]$ si, pour tous x_1 et x_2 dans $[a\,;b]$ tels que $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.
- Une fonction f est `décroissante` sur un intervalle $[a\,;b]$ si, pour tous x_1 et x_2 dans $[a\,;b]$ tels que $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemple

D'après la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2$ dessinée précédemment, on peut dire que f est croissante sur $[0\,;2]$ et décroissante sur $[-2\,;0]$.



f est croissante sur $[0\,;2]$

f est décroissante sur $[-2\,;0]$

Méthode

Sens de variation à partir d'une expression

On pose $f(x) = x^2 + 2$ et on cherche les variations de f sur $[-2\,;0]$.
On pose alors $x_1 < x_2 < 0$ et on calcule $f(x_1) - f(x_2)$ en mettant le résultat sous la forme factorisée :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 + 2 - (x_2^2 + 2) \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

On regarde ensuite le signe de chacun des facteurs :

- $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$;
- $x_1 + x_2 < 0$ car $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$ (donc leur somme est négative).

Ainsi, le produit est positif (comme produit de deux nombres négatifs), et donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$.
Par conséquent, $f(x_1) > f(x_2)$ donc f est décroissante sur $[-2\,;0]$.

Définition

Tableau de variations

Le `tableau de variations` d'une fonction f est un tableau dans lequel on met :

- une flèche qui monte pour dire que f est croissante sur un intervalle ;
- une flèche qui descend pour dire que f est décroissante sur un intervalle.

Exemple

Pour $f(x) = x^2 + 2$, on a :

x	-2		0		2
$f(x)$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	6

Définitions

Maximum, minimum

- On dit que f atteint son `maximum` M sur un intervalle $[a\,;b]$ si, pour tout réel $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant M$.
- On dit que f atteint son `minimum` m sur un intervalle $[a\,;b]$ si, pour tout réel $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant m$.

Exemple

Sur le tableau de variations précédent, on voit que $f(x)$ est toujours au-dessus de « 2 » sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
Donc, « 2 » est le minimum de f sur $[-2\,;2]$.

De plus, on voit que $f(x)$ est toujours au-dessous de « 6 » sur ce même intervalle.
Donc « 6 » est le maximum de f sur $[-2\,;2]$.