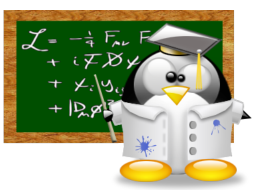
Stéphane PASQUET, 10 juillet 2014

Sommaire



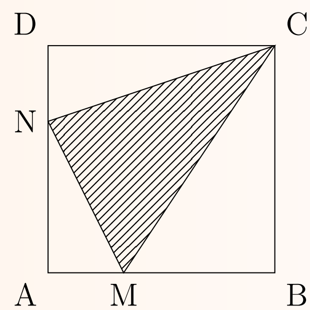
Prérequis

- Notion de collèges sur le calcul littéral

Activité

Associer une expression algébrique à un problème

On considère un carré ABCD tel que AB = 3 cm.
Soient M un point de [AB] tel que AM = x cm et N un point de [AD] tel que AN = $2x$.



On souhaite exprimer l'aire du triangle MNC en fonction de x.

1 Quelles valeurs peut prendre x par rapport aux contraintes de la figure ?

2 Montrer que l'aire du triangle AMN est : x^2.

3 Montrer que l'aire de DCN est : $\dfrac{3(3-2x)}{2}$.

4 Montrer que l'aire du triangle BMC est : $\dfrac{3(3-x)}{2}$.

5 En déduire l'expression développée de l'aire du triangle MNC.

1 La première chose à faire dans un tel exercice est de regarder ce que représente l'inconnue.
Ici, M et N doivent appartenir aux segments [AB] et [AD] donc les longueurs AM et AN doivent être comprises entre 0 et 3 cm.
La plus grande longueur étant AN, nous allons raisonner dessus :

$$0 \leqslant \text{AN} \leqslant 3$$

donc :

$$0 \leqslant 2x \leqslant 3$$

ce qui donne, en divisant chacun des membres de cet encadrement par 2 :

$$\boxed{0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}}$$

2 L'aire du triangle AMN, qui est rectangle en A, est :

$$\frac{\text{AM} \times \text{AN}}{2} = \frac{x \times 2x}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2.$$

3 L'aire du triangle DCN, qui est rectangle en D, est :

$$\frac{\text{DC} \times \text{DN}}{2} = \frac{3 \times (3-2x)}{2}.$$

4 L'aire du triangle BMC, qui est rectangle en B, est :

$$\frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{BM}}{2} = \frac{3 \times (3-x)}{2}.$$

5 L'aire du triangle MNC est égale à l'aire du carré ABCD à laquelle on a enlevé l'aire des triangles non hachurés :

$$\begin{aligned} & 3 \times 3 - \left(x^2 + \frac{3(3-2x)}{2} + \frac{3(3-x)}{2}\right) \\ &= 9 - \left(x^2 + \frac{9-6x+9-3x}{2}\right) \\ &= 9 - \left(x^2 + 9 - \frac{9}{2}x\right) \\ &= \boxed{-x^2 + \frac{9}{2}x} \end{aligned}$$

Méthode

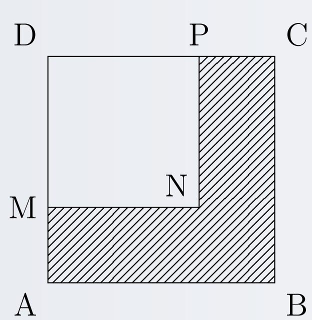
Pour associer à un problème une expression algébrique dans le cas où il y a une inconnue,

1 On doit avant tout regarder ce que représente l'inconnue et délimiter ses valeurs ;
Dans l'activité précédente, l'inconnue x ne pouvait pas prendre n'importe quelles valeurs car elle désignait une longueur (donc positive ou nulle) et que $2x$ était une longueur qui ne devait pas être plus grande que le côté du carré.

2 Remarquer un moyen de calculer ce que l'on nous demande ;
Dans l'activité, il fallait voir la stratégie de calcul qui consistait à considérer la figure comme un puzzle : c'est une stratégie très fréquente !

3 Exprimer chacune des quantités nécessaires en fonction de l'inconnue à l'aide des formules que l'on connaît déjà ;
Dans l'activité, il fallait avant tout calculer l'aire des trois triangles non hachurés et celle du carré. Ce que l'on doit trouver ne se trouve pas toujours directement ...

Exemple



On souhaite exprimer l'aire de la partie hachurée sachant que AB = AD = 3 et AM = PC = x.

1 **L'ensemble des valeurs.** Ici, x peut prendre des valeurs comprises entre 0 et 3.

2 **La stratégie :** on calcule l'aire du carré ABCD puis on enlève celle du carré DPNM.

3 **Les calculs.**
L'aire de ABCD est égale à $3^2 = 9$.
Celle de DPNM est : $(3-x)^2$.
Donc, l'aire de la partie hachurée est :

$$\mathscr{A} = 9 - (3-x)^2.$$

Quelle forme utiliser ?

Nous le voyons dans l'exemple précédent, la forme algébrique que nous obtenons peut être sous un forme brute.
Pour la simplifier, nous avons le choix entre la développer ou la factoriser.

Méthode *Développer une expression algébrique*

Pour développer une expression algébrique, on utilise la distributivité vue en collège ou les formules sur les identités remarquables.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et développons $\mathscr{A}$ à l'aide des identités remarquables :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 9-(3-x)^2\\ &= 9-(3^3-2\times 3\times x+x^2)\\ &= 9-(9-6x+x^2)\\ &= 9-9-(-6x)-(+x^2)\\ &= 6x-x^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = -x^2+6x}$$

Remarque

Il est habituel d'ordonner les termes du résultat selon les puissances décroissantes : on mettra donc les x^3 avant les x^2, qui eux-mêmes seront mis avant les x et les nombres.

Méthode *Factoriser une expression algébrique*

Pour factoriser une expression algébrique, on peut :

- soit utiliser une identité remarquable quand cela est possible ;
- soit trouver un facteur commun aux termes.

Exemple

Reprenons le cas de $\mathscr{A}$: on peut mettre en relief une identité remarquable de la forme a^2-b^2 avec $a=3$ et $b=(3-x)$:

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 3^2-(3-x)^2\\ &= [3-(3-x)][3+(3-x)]\\ &= (3-3+x)(3+3-x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = x(6-x)}$$

Remarque

En développant la forme factorisée, on doit obtenir la forme développée précédemment obtenue :

$$x(6-x) = x \times 6 - x \times x = 6x - x^2 = -x^2 + 6x.$$

Méthode

Méthode de factorisation avec facteur commun

$$A = (x-2)(5x+3) - (x-2)(4x-7)$$

Dans cette expression algébrique, les termes sont :

$$(x-2)(5x+3) \qquad \text{et} \qquad (x-2)(4x-7).$$

(Rappelons que les termes sont séparés par un « + » ou un « − »)

Dans chacun des termes, on voit un facteur commun : $(x-2)$; on peut donc écrire :

$$A = (x-2)[(5x+3) - (4x-7)]$$

On enlève ensuite les parenthèses dans les crochets en faisant attention aux signes qui suivent le signe « − » :

$$A = (x-2)[5x+3-4x+7]$$

Maintenant, on remplace les crochets par des parenthèses et on effectue les calculs à l'intérieur :

$$\boxed{A = (x-2)(x+10)}$$

Nous venons d'obtenir la forme factorisée de A.

Propriété

Identités remarquables (rappels)

Soient a et b deux nombres réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Méthode

Méthode de factorisation sans facteur commun

$$B = (x-2)^2 - 9$$

Dans cette expression, il n'y a pas de facteur commun dans les deux termes. Mais on peut voir « 9 » comme étant « 3^2 » pour ainsi faire apparaître une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = x-2$ et $b = 3$. Ainsi, la factorisation de B est (voir page suivante) :

Méthode (suite)

Méthode de factorisation sans facteur commun

$$\begin{aligned} B &= (x-2)^2 - 3^2 \\ &= [(x-2)-3][(x-2)+3] \\ &= (x-2-3)(x-2+3) \end{aligned}$$
$$\boxed{B = (x-5)(x+1)}$$

Voici un algorithme pour factoriser :

Algorithme

> Entrées
>
> Saisir l'expression algébrique A.
>
> Traitement
>
> Si un facteur commun existe alors
>
> On factorise par le facteur commun
>
> Sinon
>
> Si on peut faire apparaître un facteur commun alors
>
> On le fait apparaître puis on factorise
>
> Sinon
>
> Si on peut faire apparaître une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ alors
>
> On factorise sous la forme $(a-b)(a+b)$
>
> Sinon
>
> Si un terme est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$ alors
>
> On factorise ce terme sous la forme $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$ pour faire apparaître un facteur commun
>
> Sinon
>
> Ben là, on est fichu ! Pas de factorisation possible ...
>
> Fin du Si
>
> Fin du Si
>
> Fin du Si
>
> Fin du Si

Exemple

Exemple de factorisation avec $a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}
C &= 9x^2 + 12x + 4 - (3x+2)(7x-1) && (1)\\
&= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 - (3x+2)(7x-1) && (2)\\
&= (3x+2)^2 - (3x+2)(7x-1) && (3)\\
&= \mathbf{(3x+2)}(3x+2) - \mathbf{(3x+2)}(7x-1) && (4)\\
&= \mathbf{(3x+2)}[(3x+2) - (7x-1)] && (5)\\
&= (3x+2)[3x+2-7x+1] && (6)\\
\boxed{C = (3x+2)(-4x+3)} & && (7)
\end{aligned}$$

Explications des étapes :

- 2 : on fait apparaître l'identité remarquable avec les valeurs de a et b.
- 3 : on factorise le terme qui correspond à l'identité remarquable.
- 4 : on met le carré comme un produit de deux facteurs égaux pour que C soit plus simple à factoriser.
- 5 : on factorise par le facteur commun et on met dans les crochets tout ce qui reste en dehors du facteur commun (tout ce qui n'est pas en gras).
- 6 : on enlève les parenthèses dans les crochets en faisant attention à changer les signes qui sont derrière le signe « $-$ » ici (avec un « $+$ », on n'aurait pas changé les signes).
- 7 : on simplifie ce qu'il y a dans les crochets et on met des parenthèses à la place des crochets.

Définition

Polynômes et fractions rationnelles

Un `polynôme` est une somme de termes de la forme ax^n, où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. n est alors appelé le `degré` du polynôme.
Une `fraction rationnelle` est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

Exemples

- $A = 3x^2 - 5x + 2$ est un polynôme de degré 2.
- $B = -8x^3 - 1$ est un polynôme de degré 3.
- $C = \dfrac{8x^3 - 1}{3x^2 - 5x + 2}$ est une fraction rationnelle.
- $D = \dfrac{1}{x}$ est une fraction rationnelle.

Méthode *Transformer une expression rationnelle*

On souhaite simplifier l'expression :

$$A = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}.$$

Pour cela, on va **réduire au même dénominateur**, comme pour les fractions avec des nombres.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1\times(x-1)}{x\times(x-1)} + \frac{2\times x}{(x-1)\times x} && (8)\\
&= \frac{x-1}{x(x-1)} + \frac{2x}{x(x-1)} && (9)\\
&= \frac{x-1+2x}{x(x-1)} && (10)\\
\Aboxed{A &= \frac{3x-1}{x(x-1)}} && (11)
\end{aligned}$$

Explications :

- 8 : on multiplie la 1$^{\text{re}}$ fraction (en haut et en bas) par « $(x-1)$ » (le dénominateur de la 2$^{\text{e}}$ fraction).

  En même temps, on multiplie la 2$^{\text{e}}$ fraction (en haut et en bas) par « x » (le dénominateur de la 1$^{\text{re}}$).
- 9 : on obtient alors deux fractions avec le même dénominateur.
- 10 : comme les deux fractions ont le même dénominateur, on peut tout mettre sur le même trait de fraction.
- 11 : on simplifie le numérateur pour arriver à l'expression finale.