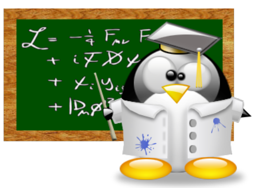
Stéphane PASQUET, 11 août 2014

Sommaire



Prérequis

- Expressions algébriques
- Généralités sur les fonctions
- Trigonométrie de 3e
- Résultats de géométrie de collège (aire de triangles, Pythagore, Thalès)

Méthode *Rappels de collège sur les équation de la forme $ax + b = 0$*

Soit l'équation :

$$4x + 7 = 0 \tag{E1}$$

Pour résoudre l'équation (E1), on utilise les opérations de base : addition, soustraction, multiplication et division.

$$\begin{aligned} 4x + 7 = 0 &\Leftrightarrow 4x + 7 - 7 = 0 - 7 \\ &\Leftrightarrow 4x = -7 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{4}x = -7 \times \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Définition *Ensemble solution*

L'`ensemble solution` d'une équation est l'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre son inconnue.
Il est noté : $\mathscr{S}$ ou, s'il peut y avoir confusion avec plusieurs équations, $\mathscr{S}_{(E)}$ s'il désigne l'ensemble solution d'une équation nommée (E).

Exemple

Dans le cas de l'équation (E1), son ensemble solution est :

$$\mathscr{S}_{(E1)} = \left\{ -\frac{7}{4} \right\}.$$

Méthode *Rappel sur les équations-produit*

Soit l'équation :

$$(2x - 5)(9 + x) = 0 \tag{E2}$$

Pour résoudre l'équation (E2), on utilise le théorème du produit nul :

« Un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. »

Ce théorème dit ici que si $(2x - 5)(9 + x) = 0$, alors $2x + 5 = 0$ OU $9 + x = 0$.
On se ramène donc à la résolution de deux équations de la forme $ax + b = 0$, comme l'équation (E1).

$$\begin{array}{ccc} 2x - 5 = 0 & \text{ou} & 9 + x = 0 \\ x = \dfrac{5}{2} & \text{ou} & x = -9 \end{array}$$

Ainsi,

$$\mathscr{S}_{(E2)} = \left\{ -9 \,;\, \frac{5}{2} \right\}.$$

Il existe des équations qui ne peuvent pas se résoudre aussi facilement que les équations (E1) et (E2).
Pour ce genre d'équations, nous utilisons ce que l'on a vu sur les fonctions et plus particulièrement leur représentation graphique pour trouver une valeur approchée de la ou des solutions.

Résolution graphique d'une équation

Considérons l'équation :

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \tag{E3}$$

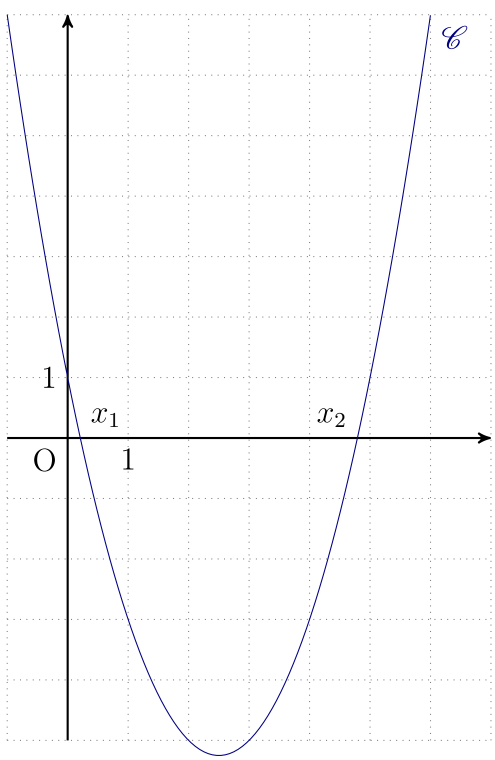
A priori, nous ne savons pas trouver directement la moindre solution de (E3).
On peut donc considérer la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 1$$

et sa représentation graphique $\mathscr{C}$.
Considérer l'équation (E3), c'est considérer l'équation :

$$f(x) = 0.$$

Or, $f(x)$ représente l'image de x par la fonction f. Donc, résoudre (E3) revient à chercher s'il existe des valeurs de x telles que $f(x) = 0$, autrement dit si $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses. En effet, dire que $f(x) = 0$ signifie que l'image de x est égale à 0, et donc que le point de $\mathscr{C}$ se trouve sur l'axe des abscisses.
Traçons $\mathscr{C}$:



On constate ici que $\mathscr{C}$ coupe deux fois l'axe des abscisses.

Par conséquent, on peut en conclure que l'équation (E3) admet deux solutions, que nous allons nommer x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$ comme indiqué sur le schéma ci-contre.

Si on trace cette courbe sur la calculatrice, à l'aide de plusieurs zooms, on peut donner une valeur approchée de x_1 et x_2 :

$$x_1 \approx 0,21 \qquad \text{et} \qquad x_2 \approx 4,8.$$

Résolution algorithmique d'une équation

La résolution graphique peut convenir à certains élèves car elle est facile. Cependant, elle est peu précise et dans certains cas, nous aurons besoin d'une valeur approchée des solutions d'une équation à plus d'un chiffre après la virgule.

Pour cela, nous allons utiliser l'algorithme suivant qui s'utilise quand on connaît un intervalle dans lequel est une solution.

Méthode

Algorithme de dichotomie

1 On pose $f(x) = 0$ notre équation.

2 On sait qu'une solution x_1 est dans l'intervalle $[a\,;b]$.

3 On entre une valeur de n qui désignera le nombre de chiffres après la virgule que l'on veut dans la valeur approchée de x_1.

4 Si $b - a \geqslant 10^{-n}$, on calcule $m = \dfrac{a+b}{2}$ le milieu de l'intervalle $[a\,;b]$.

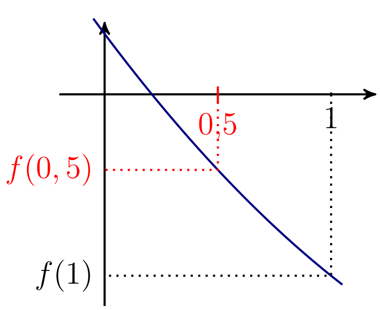
Sinon, on va en **6**.

5
- **a.** Si $f(m)$ et $f(b)$ ont le même signe, alors cela veut dire que $x_1 \in [a\,;m]$. Dans ce cas, on pose $b = m$ et on revient en **4**.
- **b.** Si $f(m)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe, cela signifie que $x_1 \in [m\,;b]$. Dans ce cas, on pose $a = m$ et on revient en **4**.
- **c.** Si $f(m) = 0$, alors on arrête l'algorithme et on affiche $x_1 = m$.

6 On affiche l'encadrement : $a < x_1 < b$.

Voyons ce que cet algorithme donne, pas à pas, avec l'équation (E3) sur l'intervalle $[0\,;1]$ (on a vu précédemment que $x_1 \in [0\,;1]$).
Nous allons prendre $n = 2$ (on veut une valeur approchée de x_1 à 2 chiffres après la virgule). Cela correspond au point **3** de notre algorithme.

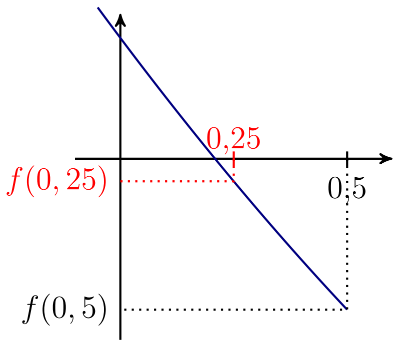
Le point **4** nous demande de calculer le milieu de $[0\,;1]$: on trouve $m = \frac{1}{2}$.
Nous avons fait un zoom sur l'intervalle $[0\,;1]$ afin de mieux comprendre ce qui se passe :



Pour cette première étape, on voit que $f(0,5)$ et $f(1)$ ont le même signe (ils sont négatifs).

Donc on est au point **5 a.**

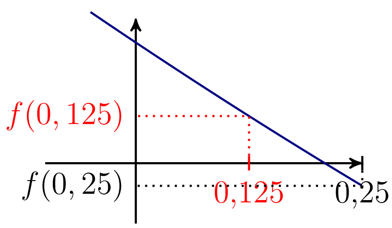
Ainsi, on pose $b = m = 0,5$, ce qui signifie que l'on va refaire tout ça sur l'intervalle $[0\,;0,5]$.



Pour cette deuxième étape, $b - a = 0,5 \geqslant 10^{-2}$ donc on calcule le milieu de l'intervalle : $m = \frac{0+0,5}{2} = 0,25$. On voit que $f(0,25)$ et $f(0,5)$ ont le même signe (ils sont négatifs).

Donc on est au point **5** **a.**

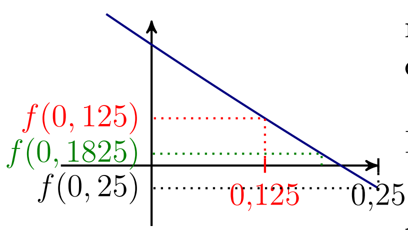
Ainsi, on pose $b = m = 0,25$, ce qui signifie que l'on va refaire tout ça sur l'intervalle $[0\,;0,25]$.



Pour cette troisième étape, $b - a = 0,25 \geqslant 10^{-2}$ donc on calcule le milieu de l'intervalle : $m = \frac{0+0,25}{2} = 0,125$. On voit que $f(0,125)$ et $f(0,25)$ n'ont le même signe.

Donc on est au point **5** **b.**

Ainsi, on pose $a = m = 0,125$, ce qui signifie que l'on va refaire tout ça sur l'intervalle $[0,125\,;0,25]$.



Pour cette quatrième étape, $b - a = 0,125 \geqslant 10^{-2}$ donc on calcule le milieu de l'intervalle : $m = \frac{0,125+0,25}{2} = 0,1875$. On voit que $f(0,1875)$ et $f(0,25)$ n'ont le même signe.

Donc on est au point **5** **b.**

Ainsi, on pose $a = m = 0,1875$, ce qui signifie que l'on va refaire tout ça sur l'intervalle $[0,1875\,;0,25]$.

À la cinquième étape, $b - a = 0,0625 \geqslant 10^{-2}$ donc on calcule : $m = \frac{0,1875+0,25}{2} = 0,21875$.

$f(0,21875) \approx -0,046 < 0$ et $f(0,25) < 0$. Ainsi, on se trouve dans le cas du **5** **a.**, donc on pose $b = m = 0,21875$ et on retourne en **4** en se plaçant dans l'intervalle $[0,1875\,;0,21875]$.

À la sixième étape, on a $b - a = 0,21875 - 0,1875 = 0,03125 \geqslant 10^{-2}$ donc on calcule $m = \frac{0,1875+0,21875}{2} = 0,203125$.

$f(0,203125) \approx 0,026 > 0$ et $f(0,21875) < 0$ donc on est dans le cas **5** **b.** On pose alors $a = m = 0,203125$ et on retourne en **4**.

À la septième étape, $b - a = 0,21875 - 0,203125 = 0,015625 \geqslant 10^{-2}$ donc on calcule $m = \frac{0,203125+0,21875}{2} = 0,2109375$.

$f(0,2109375) \approx -0,01 < 0$ et $f(0,21875) < 0$ donc on est dans le cas **5** **a.** On pose donc $b = m = 0,2109375$ et on retourne en **4**.
Ỳa huitième étape, $b - a = 0,2109375 - 0,203125 \approx 0,0078 < 10^{-2}$ donc on arrête l'algorithme et on affiche l'encadrement :
$0,203125 < x_1 < 0,2109375$.

L'algorithme de dichotomie sous Algobox

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE k
  LIRE n
  SI (F1(a)*F1(b)>0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "L'intervalle n'est pas judicieux."
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      TANT_QUE (abs(b-a)>pow(10,-n)) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        SI ((F1(a)-k)*(F1((a+b)/2)-k)<0) ALORS
          DEBUT_SI
          b PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
          FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
            a PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
            FIN_SINON
        FIN_TANT_QUE
      AFFICHER "La solution est comprise entre "
      AFFICHER a
      AFFICHER " et "
      AFFICHER b
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Remarque

L'algorithme ci-dessus permet de trouver un encadrement d'une solution à l'équation $f(x) = k$.
En choisissant $f(x) = x^2 - 5x + 1$, $k = 0$, $n = 5$, $a = 0$ et $b = 1$, Algobox nous donne l'encadrement :

$$0,20870972 < x_1 < 0,20871735\ ,$$

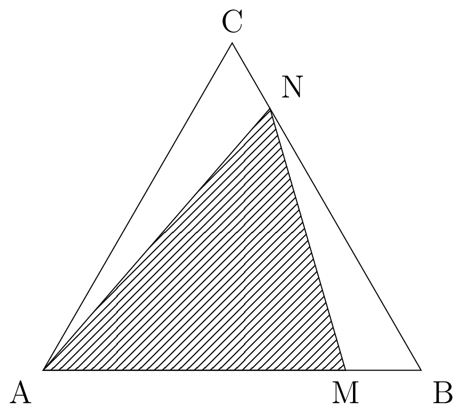
ce qui nous permet de dire qu'une valeur approchée de x_1 à 10^{-5} près est 0,20871.

Algorithme de dichotomie sur CASIO et TI

Pour CASIO Graph 35+ : Cliquer ici. Pour la TI : Cliquer ici.

Mise en équation de problèmes

On considère un triangle équilatéral ABC, puis deux points M (sur [AB]) et N (sur [BC]) tels que AM et BN soient égales.



Quelle est la position du point M afin que l'aire de AMN soit égale à la moitié de celle de ABC ?

Aide : $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Méthode *Mise en équation de problèmes*

Chercher une valeur numérique afin qu'une condition soit remplie revient à résoudre une équation. Il faut donc trouver cette équation en analysant le contexte du problème.

1. Quelle condition doit-être remplie ?
2. Sur quelles notions mathématiques portent les condition ?
3. Exprimer de façon algébrique les entités qui interviennent dans la condition.
4. Poser l'équation.
5. Résoudre l'équation.
6. Conclure.

Dans notre problème, nous avons :

1. La condition qui doit être remplie est : l'aire de AMN est égale à la moitié de l'aire de ABC.
2. Les notions mathématiques sur lesquelles porte la condition sont : les aires de triangles.
3. Les entités qui interviennent sont : $\mathscr{A}_{ABC}$ (l'aire du triangle ABC) et $\mathscr{A}_{AMN}$ (l'aire de MAN).

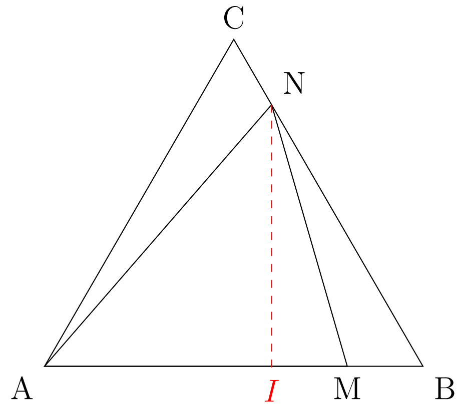
   Posons $AM = BN = x$ et $AB = BC = CA = a$.

   - $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{AB \times CH}{2}$, où H est le pied de la hauteur issue de C.

     AHC est rectangle en H donc $\sin \widehat{\mathrm{HAC}} = \dfrac{CH}{AC}$. Ainsi, $CH = AC \times \sin \widehat{\mathrm{HAC}} = a \times \sin 60^\circ$, soit $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

     On a donc : $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

- $\mathscr{A}_{ABN} = \dfrac{AM \times NI}{2}$, où I est le pied de la hauteur du triangle AMN issue du sommet N.



Dans le triangle BIN rectangle en I, $\sin \widehat{\text{IBN}} = \dfrac{IN}{BN}$ donc $IN = BN \times \sin \widehat{\text{IBN}}$, soit $IN = x\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On a alors : $\mathscr{A}_{AMN} = \dfrac{x \times x\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

4 On pose l'équation ; on veut que :

$$\mathscr{A}_{AMN} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABC} \ ,$$

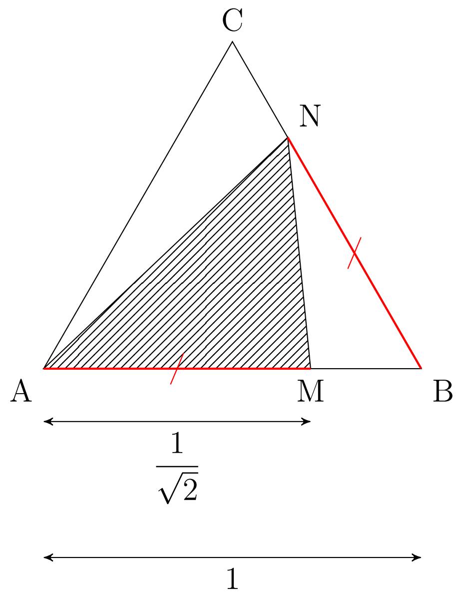
soit :

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{E4}$$

5 On résout l'équation (E4) :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} &\Leftrightarrow x^2 \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}} = \frac{a^2}{2} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}} \\
&\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} \quad \text{car } x \text{ est positif (c'est une longueur)} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

6 Conclusion : afin que l'aire du triangle AMN soit égale à la moitié de celle du triangle ABC, il est nécessaire que $AM = BN = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$. Ce qui donne la figure page suivante.



Entraînement

Répondez à la même question que précédemment dans le cas où le triangle ABC est isocèle en C avec $AC = BC = 2AB$.

Éléments de réponse (avec les mêmes notations que précédemment) :

- Pour calculer la hauteur de ABC issue de C, on pourra utiliser le théorème de Pythagore et montrer ainsi que $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{16}$.
- Pour calculer NI, on pourra utiliser le théorème de Thalès dans le triangle BCH et montrer que $\mathscr{A}_{AMN} = \dfrac{x^2\sqrt{15}}{8}$.
- On veillera à trouver que M doit être confondu avec B pour que la condition soit remplie, ce qui est en adéquation avec la propriété de la médiane : « une médiane d'un triangle coupe celui-ci en deux triangles de même aire. » En effet, dans ce cas, N est le milieu de [BC], donc (AN) est une médiane de ABC, ce qui implique que l'aire de ABN est égale à celle de ACN, donc égale à la moitié de celle de ABC.