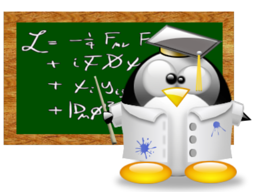
Stéphane PASQUET, 12 août 2014

Sommaire



Prérequis

- Vocabulaire et notations mathématiques
- Généralités sur les fonctions
- Résolution de systèmes linéaires

Définition *Fonctions linéaires (rappels de 3e)*

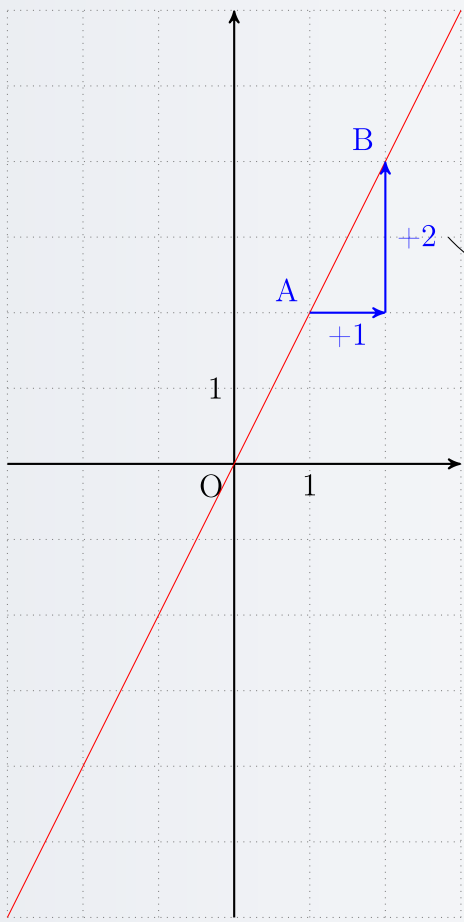
Une `fonction linéaire` est une fonction f de la forme :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax \end{aligned} \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}^*.$$

Dans un repère, elle est représentée par une droite passant par l'origine.
« a » est appelé le `coefficient directeur` de cette droite.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x$. Sa représentation graphique est :



Quand on part d'un point A de la droite, si on avance horizontalement d'une unité $(+1)$, pour arriver sur la droite au point B, on monte de 2 unités verticalement $(+2)$: c'est le coefficient directeur de la droite.

Propriété *Variations d'une fonction linéaire*

Soit f une fonction linéaire telle que $f(x) = ax$.
Si $a > 0$, alors la fonction est croissante.
Si $a < 0$, alors la fonction est décroissante.

Définition

Fonction affine (rappels de 3e)

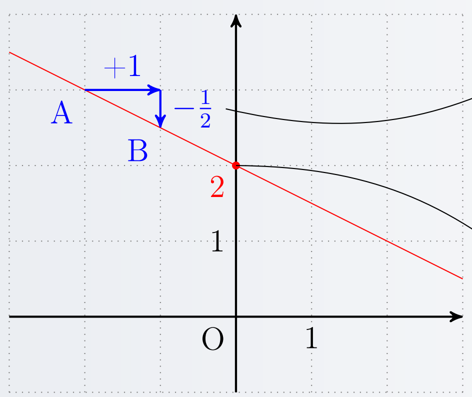
Une `fonction affine` est une fonction f de la forme :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}^*.$$
$$x \mapsto ax + b$$

Dans un repère, elle est représentée par une droite ne passant pas par l'origine.
« a » est appelé le `coefficient directeur` de cette droite. et « b » est appelé l'`ordonnée à l'origine`.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$. Sa représentation graphique est :



En partant de A, on avance d'une unité horizontalement et on doit descendre de $\frac{1}{2}$ unité verticalement car $a = -\frac{1}{2}$.

L'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées est l'ordonnée à l'origine b.

Propriété

Variations d'une fonction affine

Soit f une fonction linéaire telle que $f(x) = ax + b$.
Si $a > 0$, alors la fonction est croissante.
Si $a < 0$, alors la fonction est décroissante.

Méthode

Trouver a et b connaissant deux images.

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
On sait que $f(1) = 2$ et $f(-1) = -1$. Trouver a et b.

1. $f(1) = 2$ signifie (en remplaçant x par 1 dans l'expression de $f(x)$ que :

$$f(1) = a \times 1 + b = \boxed{a + b = 2}.$$

2. $f(-1) = 1$ signifie que :

$$f(-1) = a \times (-1) + b = \boxed{-a + b = 1}.$$

Méthode (suite)

Trouver a et b connaissant deux images.

3 Des deux égalités précédentes (qui doivent être vérifiées en même temps), on déduit que l'on doit résoudre le système : $\begin{cases} a+b &= 2 \\ -a+b &= 1 \end{cases}$.

En ajoutant les deux lignes, on a :

$$a+b+(-a+b) = 2+1 \iff 2b = 3 \iff b = \frac{3}{2}.$$

En remplaçant b par $\frac{3}{2}$ dans la première équation (par exemple), on a :

$$a+\frac{3}{2} = 2 \iff a = 2-\frac{3}{2} = \frac{4}{2}-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

4 Finalement, on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

Remarque

Les conditions initiales peuvent être écrites différemment. Par exemple, au lieu de dire que $f(1) = 2$, on peut dire :

- L'image de 1 par la fonction f est 2 ;
- La droite passe par le point de coordonnées $(1\,;2)$.

Il faut donc savoir passer d'une formulation à une autre.

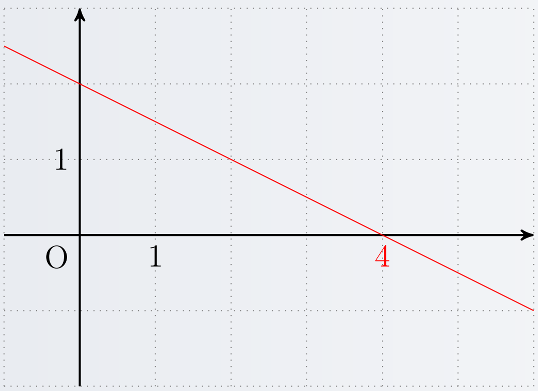
Propriété

Signe de $ax+b$

Le signe de l'expression $ax+b$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

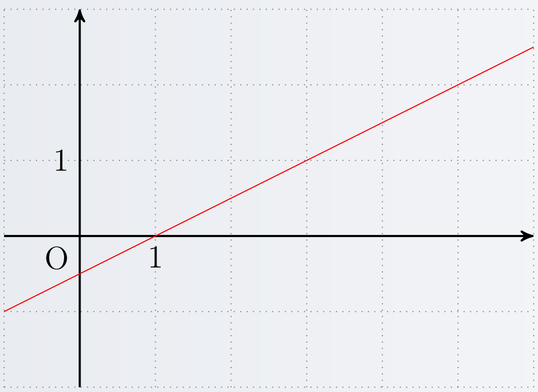
Exemples



1 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2.$

On voit sur sa représentation graphique que la droite est au-dessus de l'axe des abscisses avant 4, et en-dessous de l'axe des abscisses après 4, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x+2$		$+$	0	$-$	



2 $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}.$

On voit sur sa représentation graphique que la droite est en-dessous de l'axe des abscisses avant 1, et au-dessus de l'axe des abscisses après 1, d'où le tableau de signes suivant :

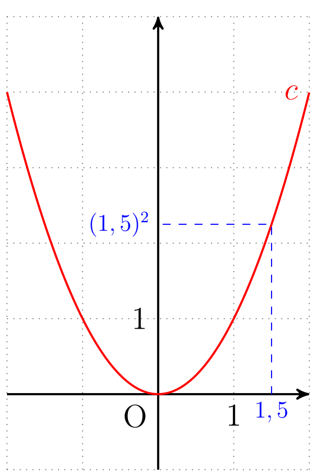
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	

Définition

La fonction carré

La `fonction carré` est la fonction c définie par :

$$\begin{aligned} c\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$



Sa courbe représentative est appelée une `parabole de sommet O`.

Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Le tableau de variation de la fonction carré est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Propriété

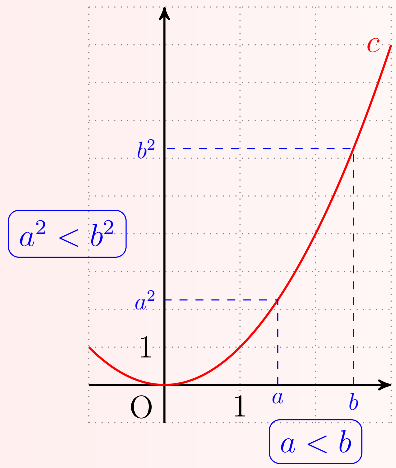
Ranger des carrés

Connaissant l'ordre sur deux nombres a et b, comment connaître celui sur a^2 et b^2 ?

1 Premier cas : a et b sont positifs.

Dans ce cas, comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, les carrés sont rangés dans le même ordre :

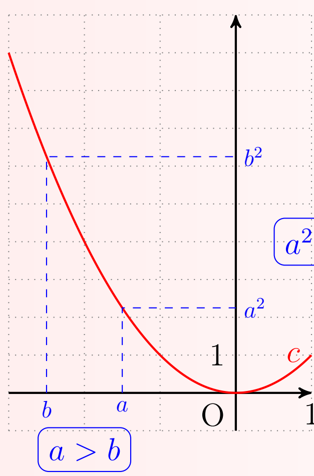
$$a < b \iff a^2 < b^2 \qquad \text{et} \qquad a > b \iff a^2 > b^2.$$



2 Deuxième cas : a et b sont négatifs.

Dans ce cas, comme la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, les carrés sont rangés dans l'ordre inverse :

$$a < b \iff a^2 > b^2 \qquad \text{et} \qquad a > b \iff a^2 < b^2.$$



3 Troisième cas : a et b ne sont pas du même signe.

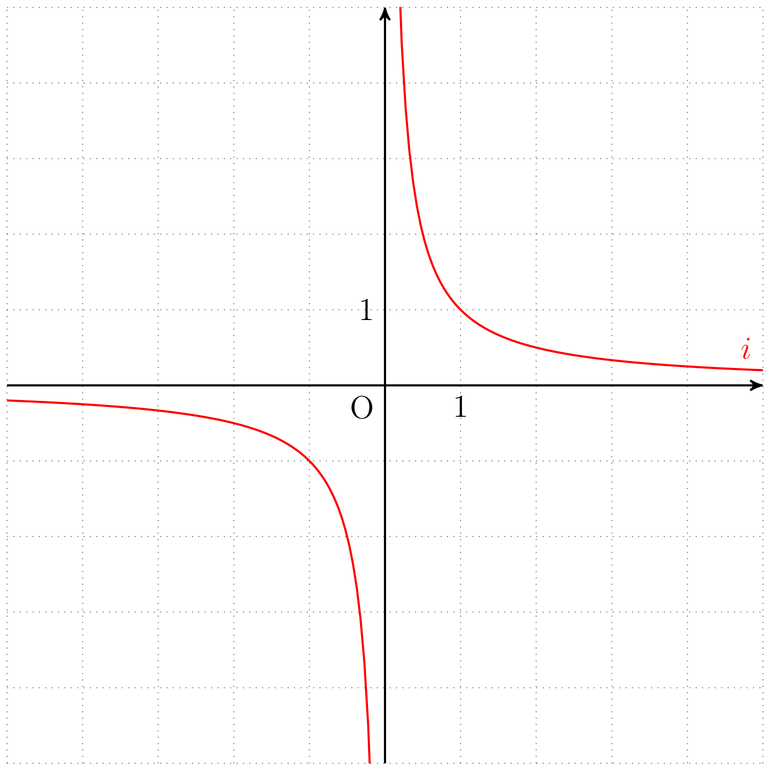
Dans ce cas, on ne peut rien affirmer car tout dépend des valeurs de a et b.

Ce cas n'est pas important en classe de Seconde.

Définition *La fonction inverse*

La `fonction inverse` est la fonction i définie par :

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$



La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une `hyperbole` ; elle est composée de deux « branches » situées respectivement dans le quadrant inférieur gauche et le cadran supérieur droit du repère.

Elle est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Le tableau de variation de la fonction inverse est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow$	$\|$	$\searrow 0$

On s'aperçoit que les deux branches se rapprochent de l'axe des abscisses ; on dit que l'axe des abscisses est une `asymptote` à la courbe. On le précise dans le tableau de variations par les « 0 » en $-\infty$ et $+\infty$.

Propriété

Ranger des inverses

Soient a et b deux nombres non nuls de même signe.

- Si $a < b$, alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$;
- Si $a > b$, alors $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

Autrement dit, si a et b sont rangés dans un certain ordre, alors leur inverse sont rangés dans le sens contraire.

Exemples

1. Nous savons que $\pi > 3$; ainsi, $\dfrac{1}{\pi} < \dfrac{1}{3}$.
2. Nous savons que $-9 < -5$ donc $-\dfrac{1}{9} > -\dfrac{1}{5}$.