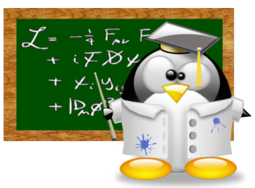
Stéphane PASQUET, 12 août 2014

Sommaire



Prérequis

- Vocabulaire et notations mathématiques
- Généralités sur les fonctions
- Fonctions de référence
- Équations de la forme $ax + b = 0$
- Notions de symétrie axiale et centrale

Définition

Un `polynôme de degré 2` est une fonction de la forme :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \end{array}, \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}.$$

Propriétés

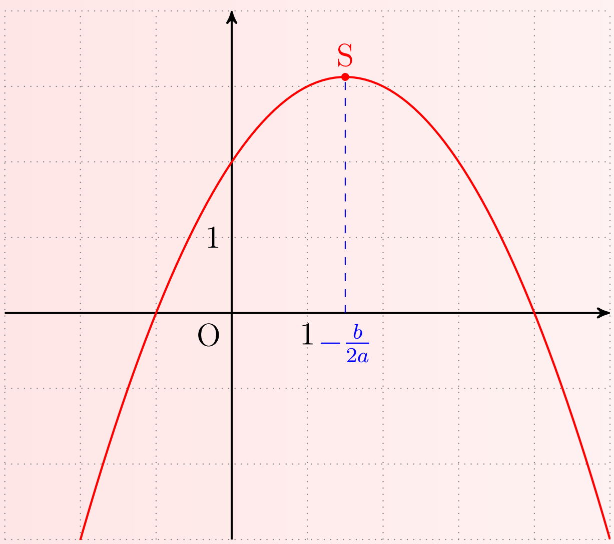
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
f est représentée dans un repère par une parabole de sommet S d'abscisse $x_S = -\dfrac{b}{2a}$.
Son sens de variation est donné par les tableaux suivants :

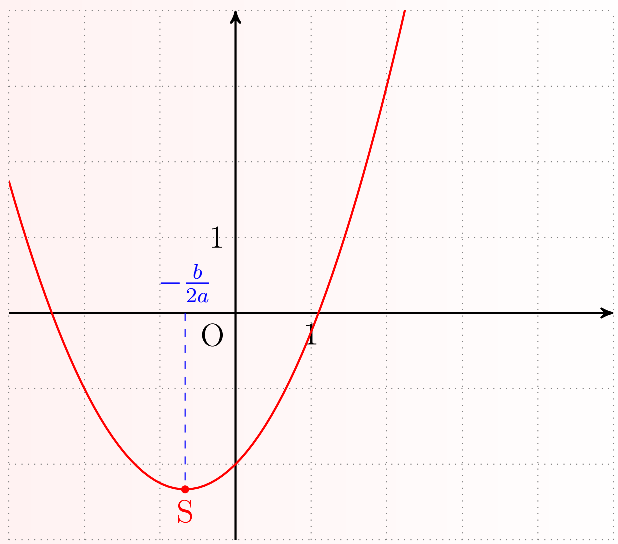
Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	↗		↘

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	↘		↗





La parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemple

Soit $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$.
Cette fonction est représentée par une parabole de sommet S, avec $x_S = -\dfrac{-5}{2 \times 2} = \dfrac{5}{4}$.
D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

Définition *Fonctions homographiques*

Une `fonction homographique` est une fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}_f &\to \mathscr{I}_f \\ x &\mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \end{aligned} \quad , \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}^*,\ d \in \mathbb{R}.$$

Exemple

La fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-3x+7}{2x-1}$$

est une fonction homographique.

Propriété *Domaine de définition d'une fonction homographique*

Soit f une fonction homographique définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Son domaine de définition est :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

Exemple

Le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-3x+7}{2x-1}$$

est :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\} = \left]-\infty\,;\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]\tfrac{1}{2}\,;+\infty\right[.$$

Remarque

Pour trouver la valeur à exclure de $\mathbb{R}$, il suffit de résoudre l'équation :

$$cx+d=0.$$

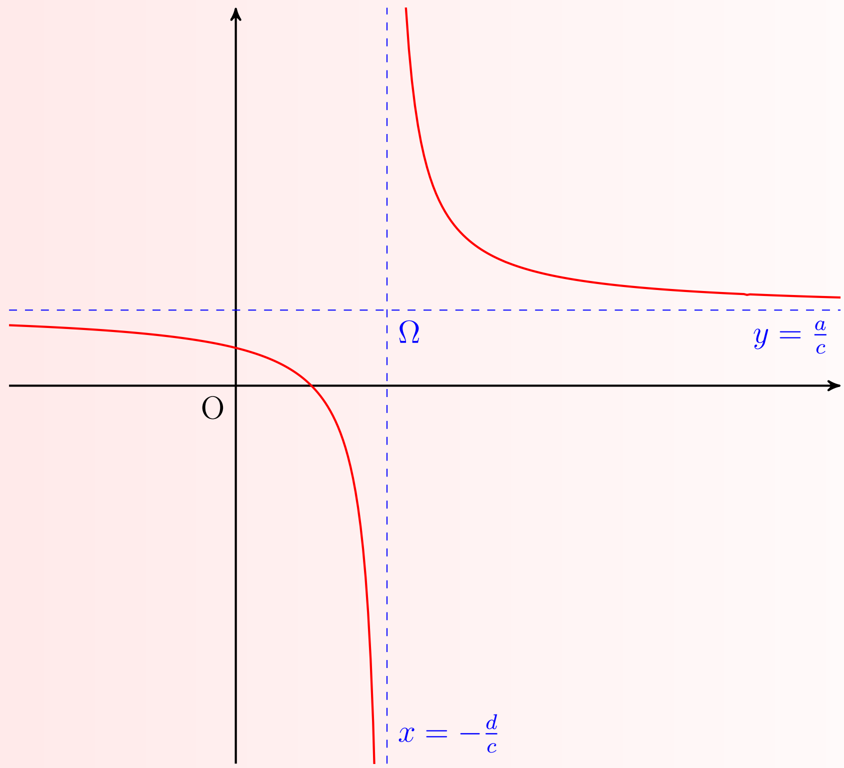
Propriété

Représentation graphique d'une fonction homographique

Soit f définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Sa représentation graphique dans un repère est appelée une `hyperbole` et ressemble à :



Les droites d'équations respectives $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$ sont appelées `asymptotes` à la courbe.

L'hyperbole est symétrique par rapport au point $\Omega\left(-\dfrac{d}{c}\,;\dfrac{a}{c}\right)$.

Exemple

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x-1}{2x+4}.$$

- **Domaine de définition.**

$$\begin{aligned} 2x+4=0 &\Leftrightarrow 2x=-4 \\ &\Leftrightarrow x=-\frac{4}{2} \\ &\Leftrightarrow x=-2. \end{aligned}$$

Donc, le domaine de définition de f est :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Exemple (suite)

- **Asymptotes et centre de symétrie.**
  La première asymptote (Δ) a pour équation : $x = -2$.
  La seconde asymptote $\mathcal{D}$ a pour équation : $y = \dfrac{3}{2}$.

  Ainsi, le centre de symétrie de l'hyperbole est : $\Omega\left(-2\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

- **Représentation graphique.**
  On peut construire un tableau de valeurs supérieures à la valeur interdite -2 :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	$-0,25$	$\frac{1}{3}$	$0,625$	0,8

  On peut ainsi construire une branche de l'hyperbole et, par symétrie par rapport à Ω, l'autre branche :