Sommaire

Définition *Vecteur*

Un `vecteur` représente un déplacement. Il est représenté par une flèche et est défini par :

- une direction (l'inclinaison de la flèche) ;
- un sens (du point de départ vers celui d'arrivée) ;
- une norme (la longueur de la flèche).

Notations *Nom d'un vecteur*

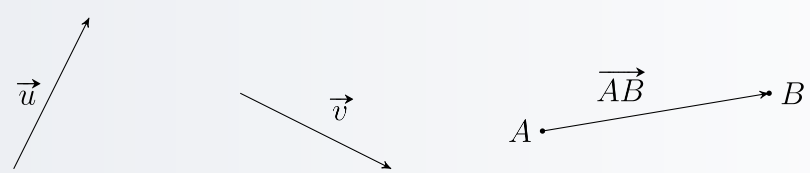
Un vecteur peut être nommé par :

- une lettre minuscule surmontée d'une flèche horizontale allant de la gauche vers la droite : $\vec{u}$, $\vec{a}$, etc.
- deux lettres majuscules surmontées d'une flèche horizontale allant de la gauche vers la droite : $\overrightarrow{AB}$ désignera le vecteur représentant le déplacement de A vers B.

Remarque

Un vecteur peut être mis n'importe où.

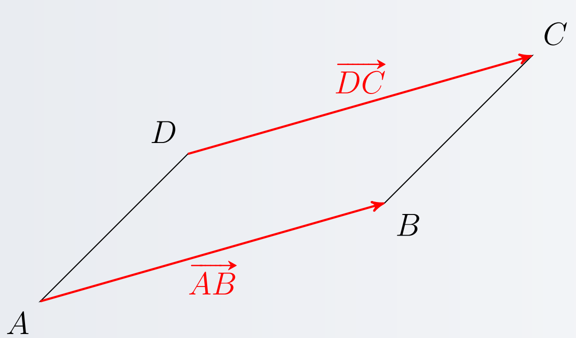
Exemples



Propriété *Propriété vectorielle d'un parallélogramme*

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Exemple



Ici, on voit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont :

- la même direction (les droites (AB) et (CD) sont parallèles) ;
- le même sens (pour aller de A vers B, on va de gauche à droite, comme pour aller de D à C) ;
- la même norme (dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longueur).

Remarque

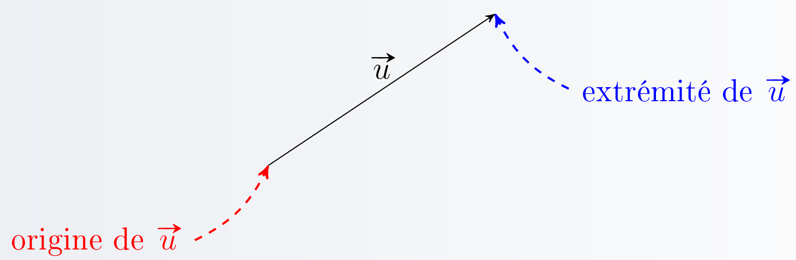
On voit intuitivement que deux vecteurs sont égaux s'ils représentent le même déplacement.

Définitions

Origine et extrémité d'un vecteur

L'`origine` d'un vecteur est le point à partir duquel la flèche part.
L'`extrémité` d'un vecteur est le point où la flèche arrive.

Exemple



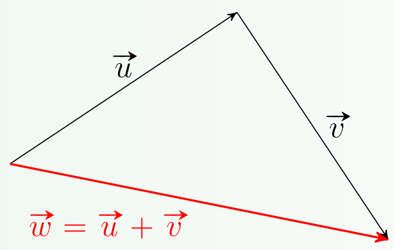
Remarque

Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, « A » (la première lettre) représente toujours l'origine et « B » (la seconde lettre) désigne toujours l'extrémité.

Définition

Somme de deux vecteurs

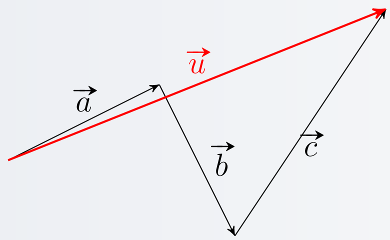
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On définit le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de la façon suivante :



Remarques

- Pour construire la somme de deux vecteurs, on doit les mettre bout-à-bout ; le vecteur somme aura pour origine celle du premier vecteur et pour extrémité celle du second.
- Pour construire la somme de plusieurs vecteurs, on les met tous bout-à-bout (peu importe l'ordre) et la flèche partant de l'origine du premier vecteur jusqu'à l'extrémité du dernier représentera le vecteur somme.

Exemple *Somme de plusieurs vecteurs*



$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

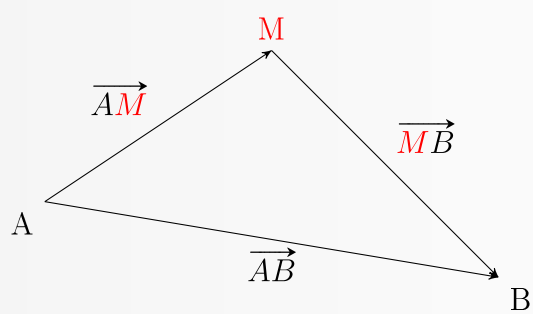
Propriété *Relation de Chasles*

Soient A, B et M trois points quelconques.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}.$$

Remarque

Cette relation signifie que pour aller d'un point (A) à un autre (B), on peut partir du premier (A), puis passer par un autre (M) avant d'arriver au point final (B).



Définition *Vecteur opposé*

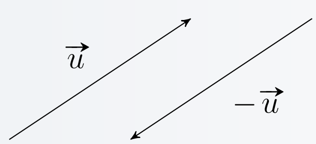
Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque.
On définit le vecteur $-\vec{u}$ comme étant le vecteur ayant :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le sens contraire de $\vec{u}$;
- la même norme que $\vec{u}$.

Dans le cas d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Exemple



Définition *Vecteur nul*

On définit le `vecteur nul` comme étant le vecteur de norme nulle. On le note $\vec{0}$.
Si un vecteur représente un déplacement, le vecteur nul représente, quant à lui, la stabilité : le « non déplacement ».

Remarque

Quel que soit le vecteur $\vec{u}$,

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

Définition *Multiplier un vecteur par un nombre réel*

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et k un nombre réel non nul.

- Si $k > 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

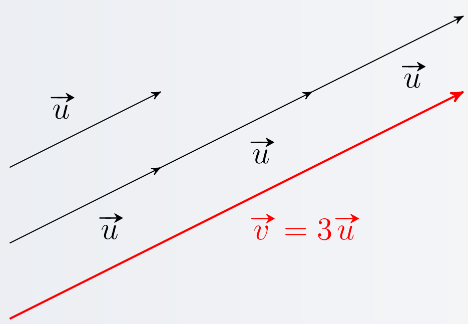
$$\vec{v} = \underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{k \text{ fois}}.$$

- Si $k < 0$, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ comme étant le vecteur somme :

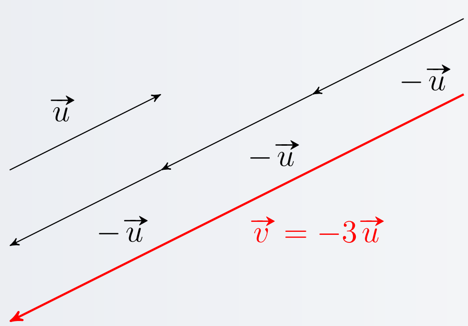
$$\vec{v} = \underbrace{(-\vec{u}) + (-\vec{u}) + \cdots + (-\vec{u})}_{k \text{ fois}}.$$

Exemples

1 $k > 0$:



2 $k < 0$:



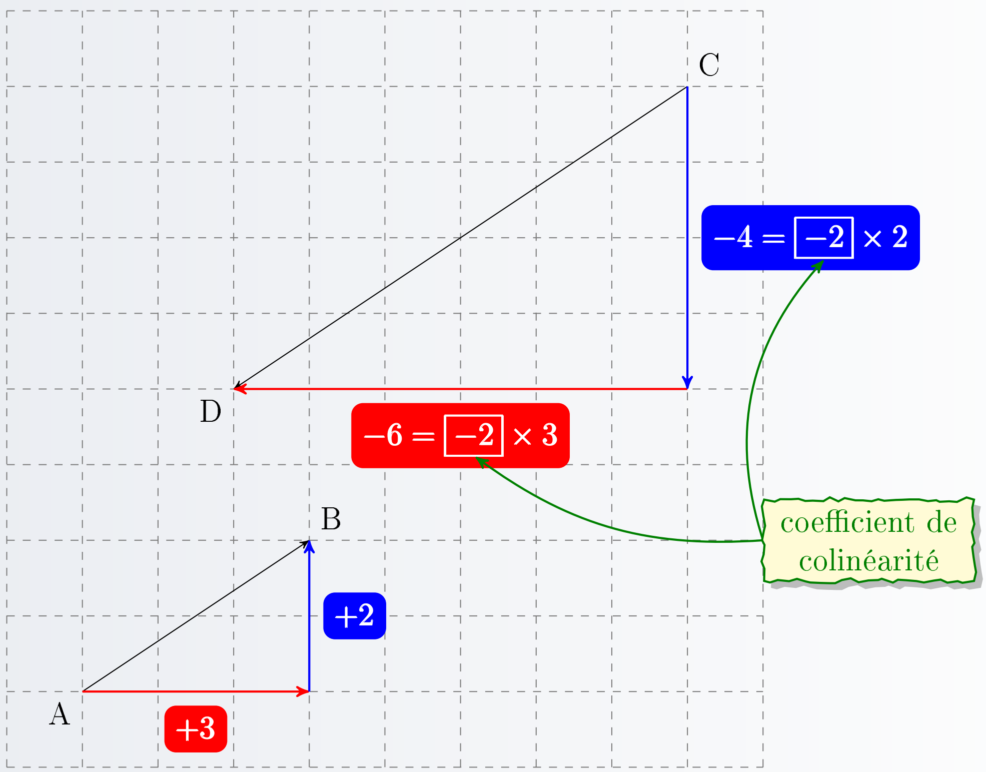
Définition *Vecteurs colinéaires*

Deux vecteurs sont `colinéaires` s'ils ont la même direction.
On peut écrire cette définition de la façon suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \exists\, k \in \mathbb{R}^*,\ \vec{u} = k\vec{v}.$$

On ne peut pas dire que deux vecteurs sont parallèles.
Le terme « parallèle » est uniquement utilisé pour des droites ou des segments, voire éventuellement des courbes, mais pas pour des vecteurs.
Si deux vecteurs sont colinéaires, on pourra dire que leur *support* (les droites qui les supportent) sont parallèles.

Exemple



À l'aide du quadrillage, on peut remarquer ici que $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Remarque *Alignement de trois points*

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

Dans un repère

Définition *Vecteurs unitaires d'un repère*

On considère un repère (O ;I,J).
On appelle `vecteurs unitaires` de ce repère les vecteurs :

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{OI} \qquad \text{et} \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}.$$

Le repère est alors noté : $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

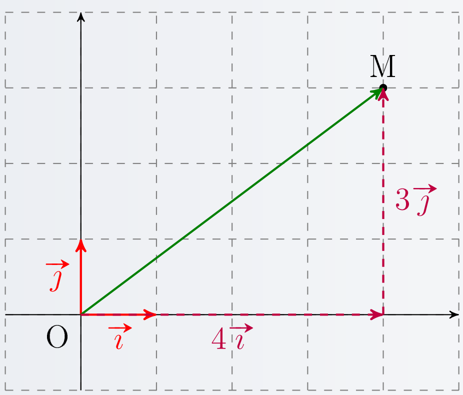
Définition *Coordonnées d'un point*

On considère un point $M\,(x\,;y)$ dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Alors,

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}.$$

Exemple

On considère le point $M\,(4\,;3)$:



$$\overrightarrow{OM} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}.$$

Remarque

Le repère utilisé dans l'exemple est orthonormé (axes perpendiculaires – *ortho* – et mêmes unités sur les axes – *normé*), mais le résultat est valable quel que soit le repère utilisé.

Définition *Coordonnées d'un vecteur*

On considère un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont notées ainsi :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où x représente la dénivellation relative en abscisses et y celle en ordonnées pour passer de A à B.

Propriété

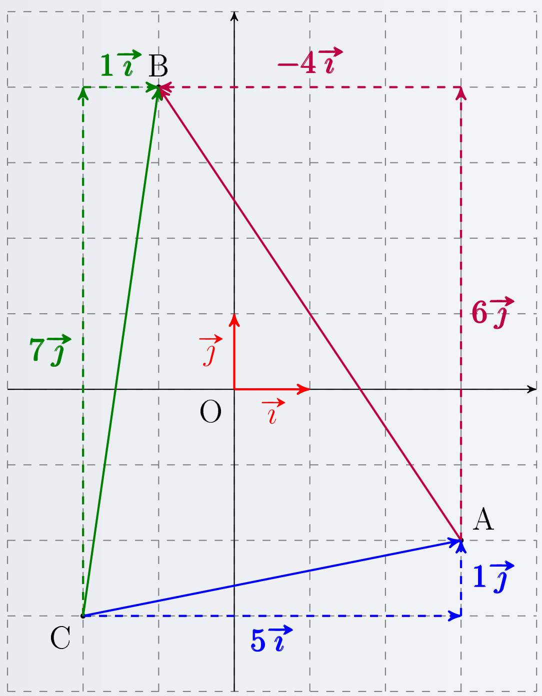
Calcul des coordonnées d'un vecteur

En posant $\mathrm{A}(x_A\,;y_A)$ et $\mathrm{B}(x_B\,;y_B)$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}.$$

Exemples

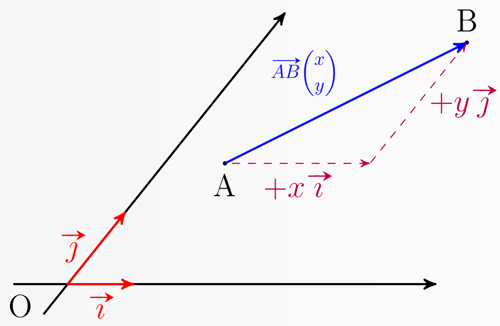
On considère les points $\mathrm{A}(3\,;-2)$, $\mathrm{B}(-1\,;4)$ et $\mathrm{C}(-2\,;-3)$ dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.



- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-3\\4-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3-(-2)\\-2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\4-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

Remarques

- Quand on a terminé un calcul de coordonnées, il est conseillé de regarder la cohérence des résultats sur un graphique (ce que montrent les flèches en pointillés dans l'exemple précédent) ;
- Dans un repère qui n'est pas orthonormé, les flèches en pointillés doivent être parallèles aux axes (et non horizontales ou verticales) :



Propriétés

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

- Le vecteur somme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

- Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées :

$$k\vec{u}\begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}.$$

Exemple

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{w}\begin{pmatrix} -1+3 \\ 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $-3\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \times (-1) \\ -3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Propriété

Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires par le calcul

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$xy' = x'y.$$

Définition

Vecteur directeur d'une droite

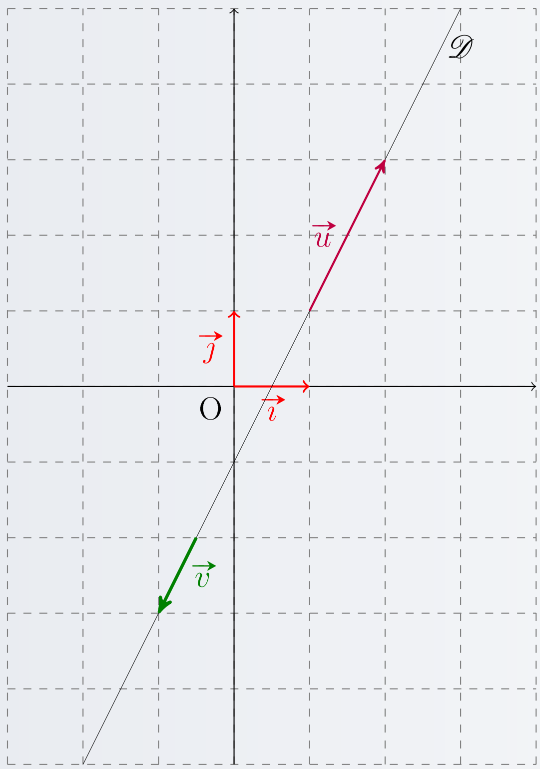
Soit $\mathscr{D}$ une droite dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ quelconque.
Un `vecteur directeur` de $\mathscr{D}$ est un vecteur dont la direction est parallèle à $\mathscr{D}$.

Propriété

Dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = ax + b$.
Alors, un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Exemple



La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :

$$y = 2x - 1.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ (car ils ont la même direction que la droite).

$\vec{u}$ a bien pour coordonnées :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Quant à $\vec{v}$, il doit être colinéaire à $\vec{u}$ car ce sont deux vecteurs directeurs d'une même droite. Ici, nous avons l'égalité :

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}.$$

Propriété

Droites parallèles et sécantes

Soient deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque

Intersection de deux droites

Une fois que l'on a vérifié que deux droites n'étaient pas parallèles, on peut déterminer les coordonnées de leur point d'intersection en résolvant un système linéaire.
En effet, si $\mathscr{D}$ a pour équation $y = ax + b$ et $\mathscr{D}'$ a pour équation $y = a'x + b'$, alors l'équation :

$$ax + b = a'x + b'$$

permet de trouver son abscisse.
Ensuite, on remplace x par la valeur trouvée dans l'équation $y = ax + b$ (ou $y = a'x + b'$) pour trouver son ordonnée.

Exemple

Soient :

$$\begin{cases} \mathscr{D} & : \quad y = -2x + 3 \\ \mathscr{D}' & : \quad y = 5x + 2 \end{cases}$$

On résout l'équation :

$$-2x + 3 = 5x + 2$$

et on trouve :

$$7x = 1 \iff x = \frac{1}{7}.$$

Ensuite, on remplace dans l'équation de $\mathscr{D}$:

$$\begin{aligned} y &= -2 \times \frac{1}{7} + 3 \\ y &= -\frac{2}{7} + \frac{21}{7} \\ y &= \frac{19}{7}. \end{aligned}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent donc en un point de coordonnées $\left(\frac{1}{7}\,; \frac{19}{7}\right)$.