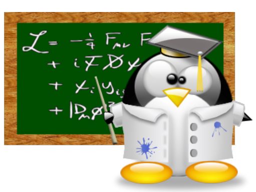
Géométrie dans l'espace

09

Stéphane PASQUET, 14 octobre 2014

Sommaire

Droites & plans de l'espace 2
Droites coplanaires 2
Droites parallèles 2
Plans parallèles 3
Intersection de deux plans 3
Transitivité du parallélisme 3
Plans perpendiculaires 3
Position relative d'une droite et d'un plan 4
Intersection de plans parallèles 4
Droites orthogonales 5
Droite orthogonale à un plan 5



Prérequis

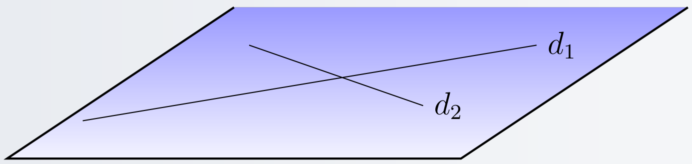
- Géométrie dans le plan

Définition

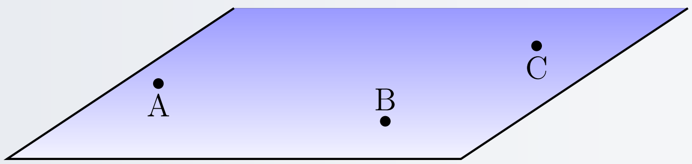
Droites & plans de l'espace

Dans l'espace, une `droite` est définie par un point (par lequel elle passe) et une direction.
Un `plan` est définie par 3 points non alignés (qui appartiennent donc au plan) ou par deux droites sécantes (qui appartiennent donc au plan).

Exemples



Ici, les droites d_1 et d_2 sont sécantes ; elles définissent un plan que l'on schématise par un parallélogramme non fermé.



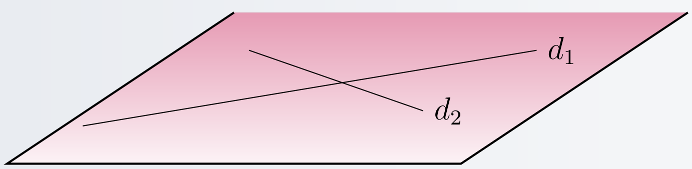
Ici, les trois points A, B et C définissent le plan.

Définition

Droites coplanaires

Dans l'espace, deux droites sont dites `coplanaires` lorsqu'elles appartiennent à un même plan.

Exemples



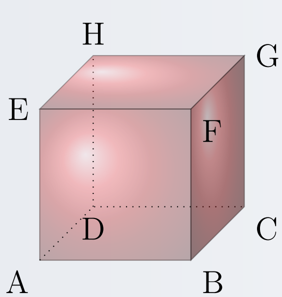
Ici, les droites d_1 et d_2 sont coplanaires.

Définition

Droites parallèles

Dans l'espace, deux droites sont dites `parallèles` lorsqu'elles sont coplanaires et qu'elles ne se coupent pas.

Exemple

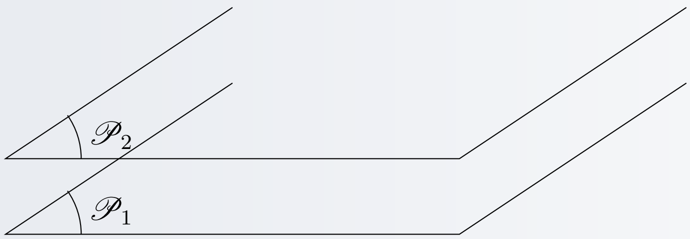


Dans un cube ABCDEFGH, (EH) et (BC) sont parallèles car elles appartiennent au même plan (BEC) et elles ne sont pas sécantes.
Les droites (EH) et (DC) ne se coupent pas mais elles ne sont pas sécantes car elles ne sont pas coplanaires.

Définition *Plans parallèles*

Deux plans sont dits `strictement parallèles` s'ils n'ont aucun point commun.
Deux plans sont dits `parallèles` s'ils sont confondus ou strictement parallèles.

Exemples

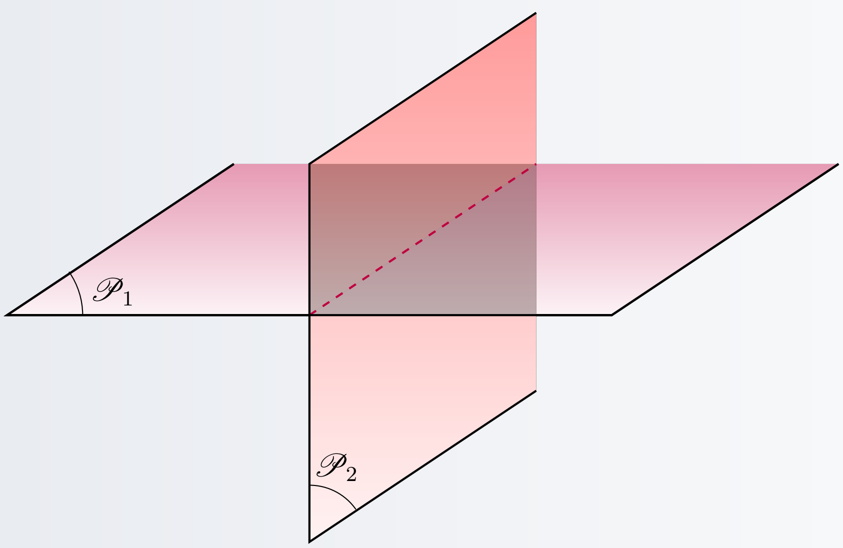


Ici, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.

Propriété *Intersection de deux plans*

Si deux plans sont sécants, alors leur intersection est une droite.

Exemple



Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant la droite en pointillés rouges.
Si on note d cette droite, alors on écrira :

$$d = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \ .$$

Propriété *Transitivité du parallélisme*

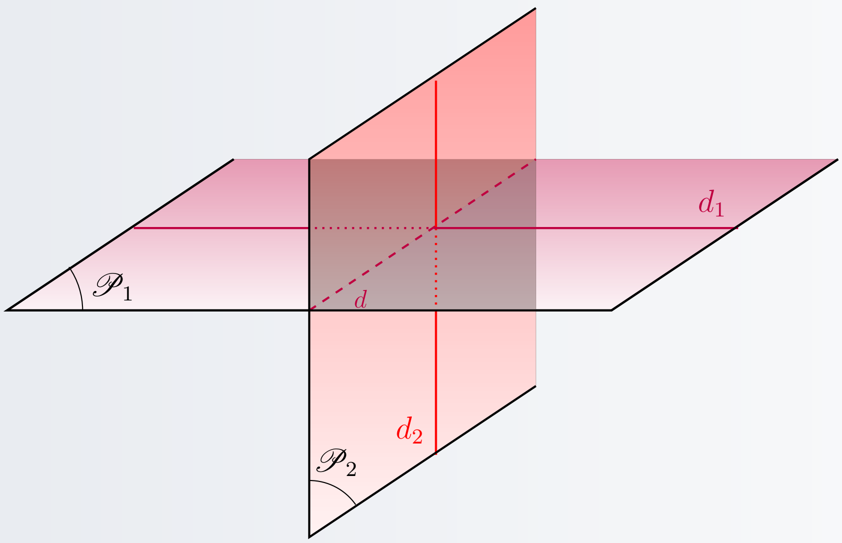
Dans l'espace, en notant d_1, d_2 et d_3 trois droites puis $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ trois plans,

- si $d_1 \mathbin{//} d_2$ et $d_1 \mathbin{//} d_3$ alors $d_2 \mathbin{//} d_3$;
- si $\mathscr{P}_1 \mathbin{//} \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_1 \mathbin{//} \mathscr{P}_3$ alors $\mathscr{P}_2 \mathbin{//} \mathscr{P}_3$.

Définition *Plans perpendiculaires*

Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans de l'espace.
On dit qu'ils sont `perpendiculaires` s'ils sont sécants suivant une droite d si on peut construire une droite d_1 appartenant à $\mathscr{P}_1$ et une droite d_2 appartenant à $\mathscr{P}_2$ telles que $d_1 \perp d$, $d_2 \perp d$ et $d_1 \perp d_2$.

Exemple



$$\begin{cases} d_1 \subset \mathscr{P}_1 \text{ et } d_1 \perp d \;; \\ d_2 \subset \mathscr{P}_2 \text{ et } d_2 \perp d \;; \\ d_1 \perp d_2 \end{cases}$$

Propriété

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

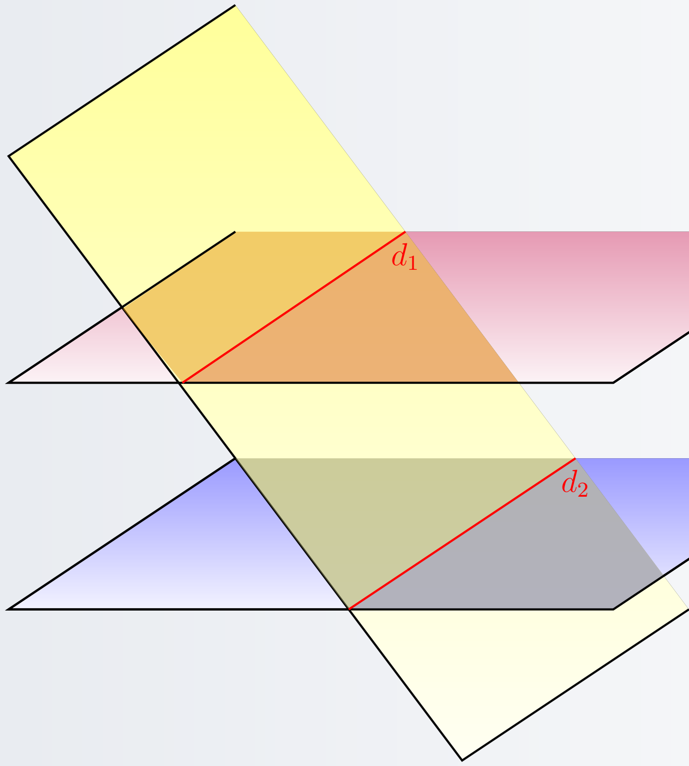
Définition *Position relative d'une droite et d'un plan*

On dit qu'une droite est `strictement parallèle` à un plan si elle ne le coupe pas.
On dit qu'une droite est `parallèle` à un plan si elle est incluse dans ce plan ou si elle lui est strictement parallèle.

Propriété *Intersection de plans parallèles*

Si deux plans sont parallèles, tout plan coupant le premier coupe le second et les droites d'intersection sont parallèles.

Exemple

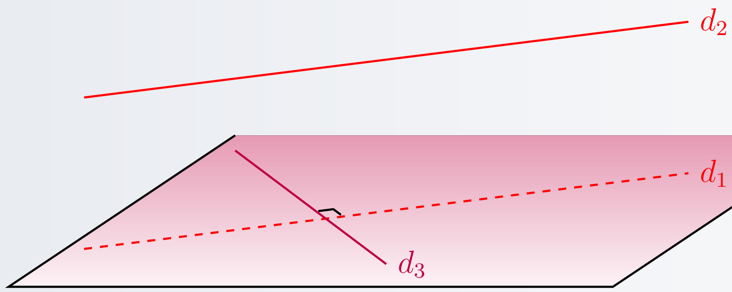


d_1 // d_2

Définition *Droites orthogonales*

On dit que deux droites sont `orthogonales` s'il existe une droite parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

Exemple

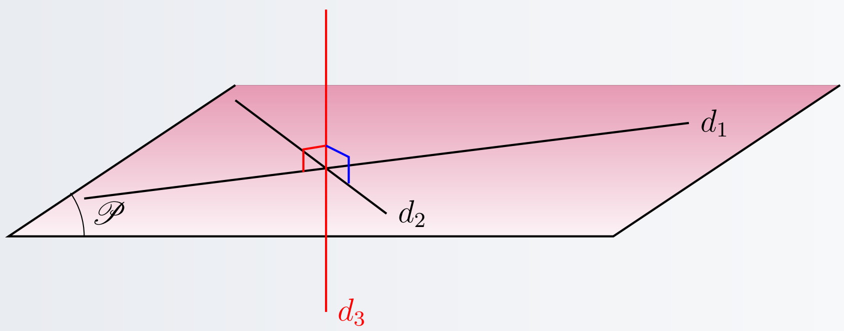


d_2 et d_3 sont orthogonales car il existe une droite (d_1) parallèle à d_2 et perpendiculaire à d_3.

Définition *Droite orthogonale à un plan*

On dit qu'une droite est orthogonale à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple



$d_2 \perp d_3$, $d_1 \perp d_3$, $d_1 \subset \mathscr{P}$ et $d_2 \subset \mathscr{P}$ donc d_3 est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Propriété

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété

Si deux droites sont orthogonales à un plan, alors elles sont parallèles entre elles.

Propriété

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.