

Disponible sur *mathweb.fr*

**131 exercices de
mathématiques pour
2nde générale**

Stéphane PASQUET

3 juin 2018

Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

3 juin 2018

I	Algorithmique	1
I.1	Programme de calculs	1
I.2	Une suite de nombres	2
I.3	Primalité d'un nombre	3
I.4	Laboratoire pharmaceutique	4
I.5	Le site marchand	5
I.6	Avec une fonction	5
I.7	Interprétation d'un algorithme	6
I.8	Complétion d'un algorithme	6
I.9	Écrire un algorithme	7
I.10	Comprendre un algorithme	7
I.11	Écrire un algorithme	8
I.12	Avec une fonction	8
I.13	Avec une suite de nombres	9
I.14	Écrire un programme Python	9
I.15	Écrire un programme Python	9
II	Repérage	19
II.1	Lecture de coordonnées de points	19
II.2	Milieu d'un segment	20
II.3	Lecture de coordonnées	20
II.4	Milieu d'un segment	21
II.5	Calcul de longueurs	21
II.6	Un premier bilan	21
II.7	Exercice de recherche	22
II.8	Trouver un point	22
II.9	Lire des coordonnées	22
II.10	Lire des coordonnées dans un parallélogramme	23
III	Développements	34
III.1	Double distributivité	34
III.2	Identités remarquables	34
III.3	Florilège de développements	34

IV Factorisations	37
IV.1 Avec facteur commun évident	37
IV.2 En faisant apparaître le facteur commun	37
IV.3 À l'aide d'une identité remarquable	37
IV.4 À l'aide de la troisième identité remarquable	38
IV.5 À l'aide des identités remarquables	38
IV.6 À l'aide d'une identité remarquable	38
IV.7 Calculs astucieux	38
V Équations & inéquations	45
V.1 Équations diverses	45
V.2 Équations avec carrés	45
V.3 Dans un triangle équilatéral	46
V.4 Équations avec racines carrées	46
V.5 Résolution graphique	46
V.6 Inéquations diverses	46
V.7 Dans le jardin	48
VI Fonctions : généralités	64
VI.1 Reconnaître la courbe représentative d'une fonction	64
VI.2 Tableau de valeurs à la calculatrice	65
VI.3 Appartenance de points à une courbe	65
VI.4 Images et antécédents	65
VI.5 Construction d'un tableau de variations	66
VI.6 Construction d'un tableau de variations avec valeur interdite	66
VI.7 Lecture d'un tableau de variations	67
VI.8 Résolution graphique d'équations et d'inéquations	68
VI.9 Résolution graphique d'équations et d'inéquations	68
VI.10 Déduction par lecture graphique	69
VI.11 Établir une expression d'une fonction	70
VI.12 Triangle équilatéral	71
VII Équation de droites	82
VII.1 À partir d'un graphique	82
VII.2 À partir des coordonnées de points	82
VII.3 Appartenance de points à une droite	82
VII.4 Intersection de deux droites – Vecteur directeur	83
VII.5 Une histoire d'aire	83
VII.6 Les taxis	84
VIII Systèmes linéaires	89
VIII.1 Quelques systèmes pêle-mêle	89
VIII.2 Avec des coefficients radicaux	89
VIII.3 Avec des coefficients fractionnaires	89
VIII.4 Avec changement de variables	90
VIII.5 Trouver le point d'intersection d'une droite	90
VIII.6 Trouver l'expression d'une fonction affine	90
VIII.7 Concourance de droites	90
VIII.8 Écrire un algorithme	90
VIII.9 Les chocolats	91
VIII.10 Mandarines et clémentines	91

VIII.11 L'âge de Fido (problème de Sam Loyd)	91
VIII.12 Le problème du marché (problème de Sam Loyd)	91
IX Fonctions du second degré	105
IX.1 Forme canonique & factorisation	105
IX.2 Sens de variation	105
IX.3 Aire d'un triangle dans un triangle équilatéral	105
X Trigonométrie	112
X.1 Valeurs remarquables	112
X.2 Conversions	112
X.3 Placer des points sur le cercle trigonométrique	112
X.4 Dédurre un cosinus à partir d'un sinus	113
X.5 Raisonnement	113
X.6 Placer des points sur le cercle trigonométrique	113
X.7 Simplification	113
X.8 Équation trigonométrique	113
XI Vecteurs	120
XI.1 Placement de points	120
XI.2 Égalités de vecteurs	120
XI.3 Relation de Chasles	120
XI.4 Placement de points & alignement de points	121
XI.5 Exprimer un vecteur en fonction d'un autre	121
XI.6 Construction de points, égalité vectorielle	121
XI.7 Dans un repère, trouver des coordonnées	121
XI.8 Alignement de points & nature d'un triangle	122
XI.9 Distance & milieu	122
XI.10 Alignement de points	122
XI.11 Milieu, centre de gravité, points alignés	122
XI.12 À la recherche d'un nombre	123
XI.13 Alignement de points	123
XI.14 Alignement de points avec un triangle isocèle	123
XI.15 Exercice récapitulatif	124
XI.16 Triangles équilatéraux et points alignés	124
XI.17 Prendre des initiatives	125
XII Géométrie dans l'espace	139
XII.1 Tétraèdre & parallélogramme	139
XII.2 Cube & section	139
XII.3 Parallélépipède, distance & volume	140
XII.4 Cube, distance, volume & aire	140
XII.5 Droites & plans parallèles et sécants	141
XII.6 Cube et angle au centre	141
XII.7 Pyramide et intersection	142
XII.8 Construction d'un cube et d'une pyramide	143

XIII Statistiques	150
XIII.1 Caractères discrets : moyenne, e.c.c. et médiane	150
XIII.2 Moyenne, e.c.c. & médiane avec classes	150
XIII.3 Calcul d'effectifs, diagramme en barres	151
XIII.4 Calculs avec classes	151
XIII.5 Salaires dans une entreprise	151
XIV Probabilités	158
XIV.1 QCM	158
XIV.2 Lancer de deux dés équilibrés	158
XIV.3 Réunion et intersection	159
XIV.4 Avec un dé portant des lettres	159
XIV.5 Dans un magasin	159
XIV.6 Dans un sac	160
XIV.7 Changement d'univers	160
XIV.8 Le digicode	161
XIV.9 Chez les profs de math	161
XV Fluctuations et échantillonnage	169
XV.1 Le dé d'Al	169
XV.2 Le Dédale	169
XV.3 Influence de la taille d'un échantillon	169
XV.4 Fourchette de sondage	170
XV.5 Taux de réussite au bac	170
XV.6 Recherche de la taille d'un échantillon	170
XV.7 Inspiré par les comics Marvel (d'après SESAMATH 2014)	170
XV.8 Taux de passage en Premières S et ES	170
XV.9 Effet placebo	171

Règles de navigation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

3 juin 2018

Bonjour.

J'ai souhaité créer ici un document dans lequel il est facile de naviguer. C'est la raison pour laquelle :

- à chaque énoncé d'exercices, vous pouvez cliquer sur le numéro de la page où se trouve le corrigé pour vous y rendre directement ; si celui-ci est suivi du symbole « ✌ », cela signifie que l'exercice et son corrigé ont fait l'objet d'une relecture approfondie afin de minimiser le risque d'erreurs ;
- à tout moment, vous pouvez retourner au sommaire en cliquant sur le petit carré ■ qui se trouve devant chaque titre.

Malgré la vigilance apportée récemment à ce document, il se peut que quelques erreurs soient restées dans les énoncés ou corrections ; si vous avez un doute, n'hésitez pas à me contacter via le formulaire qui se trouve sur mon site (<http://www.mathweb.fr>) afin d'aboutir à un document tendant vers la perfection...

Je vous remercie par avance et vous souhaite un bon travail !

Stéphane Pasquet

Algorithmique

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

Traduire des programmes Scratch en algorithmes

■ Exercice 1. Programme de calculs

★★★★★

R

Corrigé page 10 ✌

On considère le programme Scratch suivant :



Parmi les algorithmes suivants, lequel représente ce programme ?

Algorithme 1

Entrées

x est un nombre

y est un nombre

Traitement

Demander la valeur de x

Affecter à y la valeur $3x - 12/4$

Sortie

Afficher y

Algorithme 2

Entrées

x est un nombre
y est un nombre

Traitement

Demander la valeur de x
Affecter à y la valeur $(3*x-12)/4$

Algorithme 3

Entrées

x est un nombre
y est un nombre

Traitement

Demander la valeur de x
Affecter à y la valeur $(3*x-12)/4$

Sortie

Afficher y

■ Exercice 2. Une suite de nombres

★★★★☆ R

Corrigé page 10

On considère le programme Scratch suivant :



- 1 À l'aide de votre calculatrice (et éventuellement de son tableur), remplissez le tableau suivant en exécutant « à la main » ce programme :

n	0	1	2	3	4	5
u	50					
d	10					

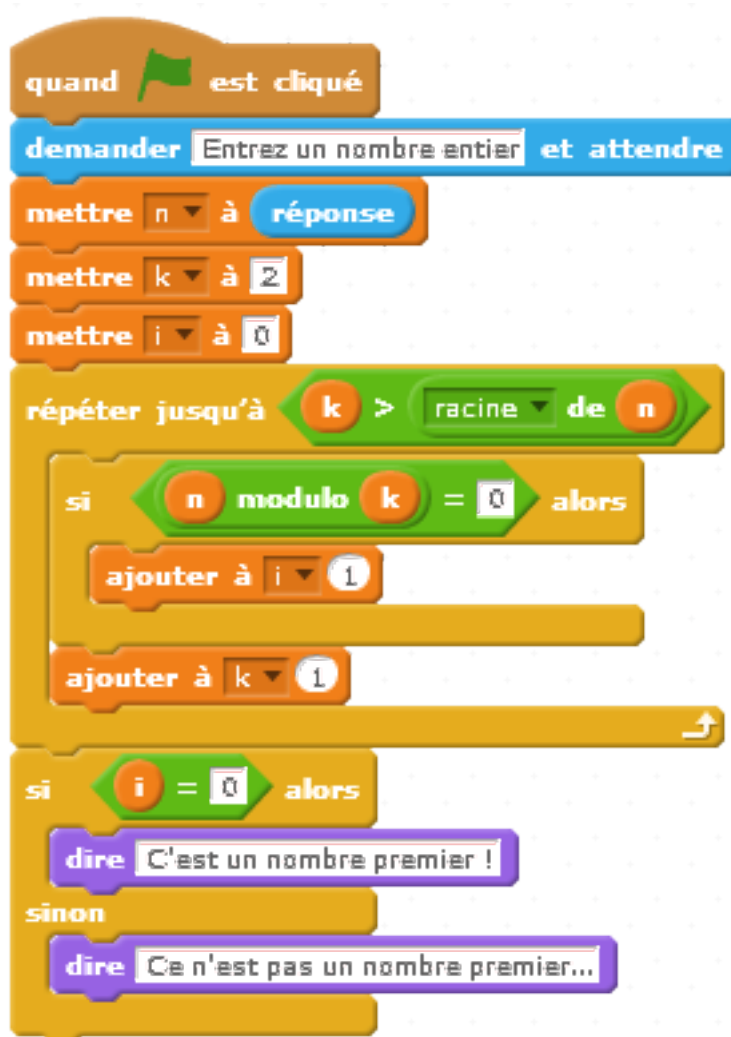
- 2 D'après vous, parmi les boucles « Tant que » et « Pour », laquelle vous semble la plus appropriée dans un algorithme pour traduire la boucle « Répéter jusqu'à » du programme Scratch ?
- 3 Écrire un algorithme traduisant ce programme Scratch.
- 4 Que fait cet algorithme (ou ce programme) ?

■ Exercice 3. Primalité d'un nombre

★★★★★ R

Corrigé page 11

On considère le programme Scratch suivant :



Je rappelle que « n modulo k » représente le reste de la division euclidienne de n par k .

- 1 Tester ce programme à la main si le nombre entré est 23 en indiquant les étapes.

- 2 Même question avec le nombre 24.
- 3 Écrire un algorithme traduisant ce programme Scratch.
- 4 Que semble faire cet algorithme (ou ce programme) ?
- 5 Indiquer la propriété que semble utiliser ce programme pour arriver à ses fins.

L'instruction « Si ... Alors ... »

■ Exercice 4. Laboratoire pharmaceutique

**A**[Corrigé page 12](#)

Un laboratoire produisant un sirop contre la fièvre à destination de nouveaux-nés fournit le protocole médical suivant : pour une température corporelle dépassant $38,5^{\circ}\text{C}$, donner 2 cuillères de sirop. Pour une température corporelle comprise entre $37,5^{\circ}\text{C}$ et $38,5^{\circ}\text{C}$, donner 1 cuillère de sirop. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 4

Entrées

N et T sont deux nombres réels

Initialisation

Saisir T

Traitement

Affecter à N la valeur 0

Si $T > 38.5$ alors

Affecter à N la valeur

sinon

Si $T \geq 37.5$ alors

Affecter à N la valeur

Fin du Si

Fin du Si

Sortie

Afficher N

- 1 Quel est le rôle de cet algorithme ? Préciser à quoi correspondent les variables T et N.
- 2 Recopier et compléter l'algorithme sur votre copie.
- 3 Le cas où le nouveau-né n'a pas de fièvre (température corporelle inférieure à $37,5^{\circ}\text{C}$) est-il prévu dans l'algorithme ? (On pourra justifier la réponse en testant l'algorithme avec le nombre 37 en entrée.)

■ Exercice 5. Le site marchand

★★★★☆ R

Corrigé page 13

Durant tout le week-end, un site marchand propose une promotion pour toute commande d'un montant minimum de 20 €.

Si le montant de la commande est :

- Strictement inférieur à 100 €, une remise de 10 € est offerte.
- Entre 100 € compris et 200 € non compris, une remise de 25 € est offerte.
- Supérieur ou égal à 200 €, une remise de 20 % est offerte.

- 1 Calculer le prix à payer pour une commande d'un montant de 130 €, de 80 € et de 300 €.
- 2 On a commencé un algorithme qui automatise le calcul du prix à payer pour une commande dont on saisit le montant $M \geq 20$:

Algorithme 5: Algorithme de commande

Initialisation

Saisir une valeur $M \geq 20$

Traitement

Si alors

Afficher : « Le prix de la commande à payer est »

sinon

.....

Fin du Si

Sur la copie, recopier et compléter cet algorithme pour qu'il fonctionne correctement.

L'instruction « Pour ... allant de ... à ... »

■ Exercice 6. Avec une fonction

★★★★☆ R

Corrigé page 14

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = -3x + 5.$$

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule et affiche les images par f de tous les entiers compris entre -2 et 5 (compris).

Algorithme 6

Entrées

x est un nombre

f est un nombre

Traitement

Pour x allant de ... à ...

Affecter à f la valeur ...

...

Fin du Pour

■ Exercice 7. Interprétation d'un algorithme

★★★★☆ R

Corrigé page 14

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 7

Entrées

S est un nombre entier

n est un nombre entier

Initialisation

S prend la valeur 0

Traitement

Pour n allant de 1 à 100

S prend la valeur S+n

Fin du Pour

Sortie

Afficher S

1 Compléter le tableau suivant :

Valeurs de n	1	2	3	4
Valeurs de S				

2 Que représente la valeur affichée en sortie de cet algorithme ?

■ Exercice 8. Complétion d'un algorithme

★★★★☆ R

Corrigé page 15

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 8

Entrées

S est un nombre entier

n est un nombre entier

Initialisation

S prend la valeur 0

Traitement

Pour n allant de 1 à ...

S prend la valeur ...

Fin du Pour

Sortie

Afficher S

En vous inspirant de ce qui a été fait dans l'exercice précédent, compléter cet algorithme afin qu'il calcule la valeur de la somme :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 49^2 + 50^2.$$

■ Exercice 9. Écrire un algorithme

★★★★☆ R

Corrigé page 15 🙌

En vous aidant des exercices 7 et 8, écrire un algorithme qui permet de calculer la valeur de la somme suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1000}.$$

La boucle « Tant que »

■ Exercice 10. Comprendre un algorithme

★★★★☆ R

Corrigé page 15 🙌

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 9

Entrées

U est un nombre
n est un nombre entier

Initialisation

U prend la valeur 50

Traitement

Tant que U > 20

U prend la valeur 0.87*U
n prend la valeur n+1

Fin du Tant que

Sortie

Afficher n

1 Compléter le tableau suivant (on pourra arrondir les valeurs au dixième) :

Valeurs de U	50							
Valeurs de n	0	1	2	3	4	5	6	7
U < 20 ?	oui							

2 Quelle est la valeur affichée par cet algorithme ? Que représente-t-elle ?

■ Exercice 11. Écrire un algorithme

★★★★☆ R

Corrigé page 16 🙌

La mémoire RAM d'un smartphone s'use au fil du temps.

La mémoire RAM d'un smartphone de la marque POURAV perd chaque année 18 % de sa capacité. On estime qu'en dessous de 30 % de sa capacité originelle, un smartphone de la marque POURAV n'est plus bon à rien tellement il est lent (toute ressemblance à une quelconque marque existante ne serait que fortuite).

- 1 On note C la capacité de ce smartphone (exprimée en pourcentage par rapport à la capacité initiale). À l'achat, on a donc $C = 100$.
Après une année, que vaut C ?
- 2 Pourquoi peut-on dire que si C représente la capacité à une certaine année alors l'année suivante, la capacité sera égale à $0,82 \times C$?
- 3 En vous inspirant de l'exercice 10, écrire un algorithme permettant de trouver le nombre d'années après l'achat au cours de laquelle le smartphone sera bon à jeter.

Programmer sous Algobox

■ Exercice 12. Avec une fonction

★★★★☆ R

Corrigé page 16 🙌

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 10

Entrées

x est un nombre

f est un nombre

Traitement

Pour x allant de -5 à 5

Affecter à f la valeur $(3*x+1)/(4*x^2+1)$

Afficher f

Fin du Pour

Programmer sous Algobox cet algorithme.

■ Exercice 13. Avec une suite de nombres

★★★★☆ R

Corrigé page 17 🙌

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 11

Entrées

u est un nombre

n est un nombre

Initialisation

Affecter à u la valeur 10

Affecter à n la valeur 0

Traitement

Tant que u > 5.7143

Affecter à n la valeur n+1

Affecter à u la valeur 0.3*u+4

Fin du Tant que

Entrées

Afficher n

Programmer sous Algobox cet algorithme.

Programmer sous Python

■ Exercice 14. Écrire un programme Python

★★★★☆ R

Corrigé page 17 🙌

Programmer en Python l'algorithme 7.

■ Exercice 15. Écrire un programme Python

★★★★☆ R

Corrigé page 17 🙌

1 Programmer en Python un algorithme permettant de calculer la somme :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}.$$

2 Exécuter ce programme, puis changer la valeur « 100 » par « 1 000 », « 10 000 », « 100 000 », etc.

Que peut-on remarquer ?

3 Calculer une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6} \approx 10^{-4}$ près. Que remarque-t-on ?

■ **Corrigé de l'exercice 1.**[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le bon algorithme est l'algorithme 3.

En effet, le programme Scratch demande une valeur de x , puis calcule $y : y = 3x$, puis on soustrait 12 au résultat (donc $y = 3x - 12$ à ce stade du programme), et enfin on divise le résultat par 4 (donc ici, $y = \frac{3x - 12}{4}$).

Or, l'algorithme 1 affiche $3x - \frac{12}{4}$, ce qui n'est pas la bonne valeur.

Quant à l'algorithme 2, il n'affiche rien ; il ne fait que calculer.

■ **Corrigé de l'exercice 2.**[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1	n	0	1	2	3	4	5
	u	50	55	58,5	60,95	62,665	63,8655
	d	10	11,67	8,17	5,717	4,0017	2,80117

- 2 « Répéter jusqu'à » est une boucle avec condition, donc ce qui la traduit le mieux est « Tant que » suivi de la condition.

3 **Algorithme 12****Entrées**

u , d et n sont des nombres

Traitement

Affecter à u la valeur 50

Affecter à d la valeur 10

Affecter à n la valeur 0

Tant que $d \geq 0,01$

Affecter à u la valeur $0,7 * u + 20$

Affecter à d la valeur $200/3 - u$

Affecter à n la valeur $n + 1$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher n

- 4 Ce programme (ou cet algorithme) affiche la première valeur de n pour laquelle $d < 0,01$, c'est-à-dire le nombre de fois que la boucle a été exécutée avant que la différence entre $\frac{200}{3}$ et u soit inférieure à 0,01.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Si le nombre entrée est 23, alors $\sqrt{n} = \sqrt{23} \approx 4,8$.

k	2	3	4	5
$k > \sqrt{n} ?$	non	non	non	oui
n modulo k	1	2	3	—
i	0	0	0	—

Explications : pour $k = 2$, $23 = 2 \times 11 + 1$ donc le « n modulo k » vaut 1. Comme il n'est pas nul, la valeur de i reste la même.

- 2 Si le nombre entrée est 24, alors $\sqrt{n} = \sqrt{24} \approx 4,9$.

k	2	3	4	5
$k > \sqrt{n} ?$	non	non	non	oui
n modulo k	0	0	0	—
i	1	2	3	—

Explications : pour $k = 2$, $24 = 2 \times 12 + 0$ donc le « n modulo k » vaut 0 ; la valeur de i est donc augmentée de 1. Pareil pour $k = 3$ et $k = 4$ car 24 est divisible par 3 et 4.

3 Algorithm 13

Entrées

n , k et i sont des nombres

Initialisation

Demander la valeur de n

Affecter à k la valeur 2

Affecter à i la valeur 0

Traitement

Tant que $k \leq \sqrt{n}$

Si $n \text{ modulo } k = 0$ alors

Affecter à i la valeur $i+1$

Fin du Si

Affecter à k la valeur $k+1$

Fin du Tant que

Si $i = 0$ alors

Afficher : « C'est un nombre premier ! »

sinon

Afficher : « Ce n'est pas un nombre premier... »

Fin du Si

- 4 Cet algorithme semble tester la primalité du nombre entré, c'est-à-dire regarder si le nombre est un nombre premier ou pas.

- 5 On sort de la boucle quand $k > \sqrt{n}$ donc ce programme semble s'appuyer sur la règle suivante :
- « Si un nombre entier supérieur à 2 n'admet aucun diviseur inférieur à sa racine carrée alors il est premier. »

■ **Corrigé de l'exercice 4.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Cet algorithme permet d'afficher le nombre N de cuillères de sirop à donner en fonction de la température T saisie.

2 **Algorithme 14: algorithme complété**

```
Entrées
  N et T sont deux nombres réels
Initialisation
  Saisir T
Traitement
  Affecter à N la valeur 0
  Si T > 38.5 alors
    Affecter à N la valeur 2
  sinon
    Si T ≥ 37.5 alors
      Affecter à N la valeur 1
    Fin du Si
  Fin du Si
Sortie
  Afficher N
```

- 3 Le cas où $T < 37,5$ n'est pas pris en compte dans cet algorithme car si $T > 38,5$, on entre dans le premier test (on affecte à N la valeur 2), mais dans le « sinon », il y a un autre test qui affecte à N la valeur 1 si $T \geq 37,5$. Il faudrait ajouter un « sinon » à cet endroit :

Algorithme 15: algorithme complété

```
Entrées
  N et T sont deux nombres réels
Initialisation
  Saisir T
Traitement
  Affecter à N la valeur 0
  Si T > 38.5 alors
    Affecter à N la valeur 2
  sinon
    Si T ≥ 37.5 alors
      Affecter à N la valeur 1
    sinon
      Affecter à N la valeur 0
    Fin du Si
  Fin du Si
```

Sortie
Afficher N

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 • Pour 130 €, le prix à payer est :

$$130 - 25 = 105 \text{ €} \quad \text{car } 100 \leq 130 < 200.$$

- Pour 80 €, le prix à payer est :

$$80 - 10 = 70 \text{ €} \quad \text{car } 80 < 100.$$

- Pour 300 €, le prix à payer est :

$$\left(1 - \frac{20}{100}\right) \times 300 = 0,8 \times 300 = 240 \text{ €} \quad \text{car } 300 \geq 200.$$

2 Algorithmes 16: algorithme complété

Initialisation

Saisir une valeur $M \geq 20$

Traitement

Si $M < 100$ alors

Afficher : « Le prix de la commande à payer est $M - 10$ € »

sinon

Si $M < 200$ alors

Afficher : « Le prix de la commande à payer est $M - 25$ € »

sinon

Afficher : « Le prix de la commande à payer est $0,8 * M$ € »

Fin du Si

Fin du Si

Algorithme 17: algorithme complété**Entrées**

x est un nombre

f est un nombre

Traitement**Pour** x allant de **-2** à **5**Affecter à f la valeur **$-3 \times x + 5$** **Afficher** f**Fin du Pour**

■ Corrigé de l'exercice 7.

1 Le tableau complété est le suivant :

Valeurs de n	1	2	3	4
Valeurs de S	$0 + 1 = 1$	$1 + 2 = 3$	$3 + 3 = 6$	$6 + 4 = 10$

Explications :

- Avant d'entrer dans la boucle « Pour », S vaut 0.
- Quand on entre dans la boucle, S prend la valeur qu'il y avait juste avant dans la variable S (à savoir 0) en ajoutant la valeur de n (à savoir 1 car c'est le premier passage). Donc $S = 0 + 1 = 1$.
- Pour le deuxième passage, S prend la valeur qu'il y avait juste avant dans S (à savoir 1) en ajoutant la valeur de n (à savoir 2). Donc $S = 1 + 2 = 3$.
- Pour le troisième passage, S prend la valeur 3 (dernière valeur de S calculée juste avant) + 3 (qui est la valeur de n). Donc $S = 3 + 3 = 6$.
- Enfin, pour le quatrième passage, S prend la valeur 6 (qui vient d'être trouvée) et on ajoute 4 (la valeur de n). Donc $S = 6 + 4 = 10$.

2 Le tableau de la question précédente nous permet de comprendre comment sont calculées toutes les valeurs de S .

Si on fait 4 passages dans la boucle, $S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$. Donc, on imagine que pour 100 passages, la valeur affichée sera la valeur de la somme $S = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Il n'y a que très peu de modifications à faire sur l'algorithme de l'exercice précédent afin d'obtenir ce que l'on veut :

Algorithme 18

Entrées

S est un nombre entier
n est un nombre entier

Initialisation

S prend la valeur 0

Traitement

Pour n allant de 1 à **50**

S prend la valeur **$S+n^2$**

Fin du Pour

Sortie

Afficher S

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Il suffit de reprendre la structure des algorithmes des exercices précédents et de changer les valeurs écrites en rouge ici :

Algorithme 19

Entrées

S est un nombre **réel**
n est un nombre entier

Initialisation

S prend la valeur 0

Traitement

Pour n allant de 1 à **1 000**

S prend la valeur **$S+1/n$**

Fin du Pour

Sortie

Afficher S

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1	Valeurs de U	50	43,5	37,845	32,9	28,6	24,9	21,7	18,9
	Valeurs de n	0	1	2	3	4	5	6	7
	U < 20 ?	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non

- 2** La valeur affichée par cet algorithme est la dernière valeur de n calculée avant de sortir de la boucle, donc avant que $U \geq 20$. Donc il affiche la valeur « 7 ».

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Après une année, $C = 100 - \frac{18}{100} \times 100 = 100 - 18 = 82$.
- 2 Si C représente la capacité lors d'une année, alors l'année suivante, on calcule la capacité ainsi :

$$C - \frac{18}{100} \times C = C \left(1 - \frac{18}{100} \right) = C \times 0,82 = 0,82 \times C.$$

- 3 L'algorithme a la même structure que celui de l'exercice 10 :

Algorithme 20

Entrées

C est un nombre
 n est un nombre entier

Initialisation

C prend la valeur 100 (valeur initiale en pourcentage)

Traitement

Tant que $C > 30$

C prend la valeur $0.82 \times C$
 n prend la valeur $n+1$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher n

Explications :

- « Tant que $C > 30$ » : on fait les calculs chaque année tant que la capacité est strictement plus grande que 30%.
- « C prend la valeur $0.82 \times C$ » : on fait le calcul trouvé à la question 2.
- « n prend la valeur $n+1$ » : on ajoute une année. Ici, « n » joue le rôle d'un compteur.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Code de l'algorithme

```

1  VARIABLES
2    x EST_DU_TYPE NOMBRE
3    f EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5    POUR x ALLANT_DE -5 A 5
6      DEBUT_POUR
7        f PREND_LA_VALEUR (3*x+1)/(4*pow(x,2)+1)
8        AFFICHER f
9      FIN_POUR
10  FIN_ALGORITHME

```

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Code de l'algorithme

```

1  VARIABLES
2    u EST_DU_TYPE NOMBRE
3    n EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5    u PREND_LA_VALEUR 10
6    n PREND_LA_VALEUR 0
7    TANT_QUE (u>5.7143) FAIRE
8      DEBUT_TANT_QUE
9        u PREND_LA_VALEUR 0.3*u+4
10       n PREND_LA_VALEUR n+1
11      FIN_TANT_QUE
12    AFFICHER n
13  FIN_ALGORITHME

```

■ Corrigé de l'exercice 14.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Un algorithme Python possible est le suivant :

```

S=0;
for n in range(100):
    S=S+n;
print(S)

```

Ici, « range(100) » désigne l'intervalle des entiers compris entre 0 et 100 (bornes comprises).

Une autre façon de faire la même chose avec la boucle « while » (Tant que) est la suivante :

```

S=0;
n=1;
while (n<100):
    S=S+n;
    n=n+1;
print(S)

```

■ Corrigé de l'exercice 15.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Un algorithme Python possible est le suivant :

```

S=0
n=1
while (n<100):
    S=S+1/(n*n)
    n=n+1
print(S)

```

2 On a les résultats suivants :

Valeur maximale	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
Valeur de S	1,6349	1,6440	1,6448	1,6449	1,6449

On constate alors que plus la valeur maximale est grande, plus la valeur de S se rapproche de 1,6449.

3 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449$; on constate alors qu'il se pourrait que :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Remarque 1 : on peut démontrer, lorsque l'on fait des études supérieures en mathématique, qu'en effet, cette égalité est vraie.

Remarque 2 : pour calculer $\frac{\pi^2}{6}$ avec Python, on tapera :

```
from math import pi  
pi**2/6
```

Repérage

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

Coordonnées de points

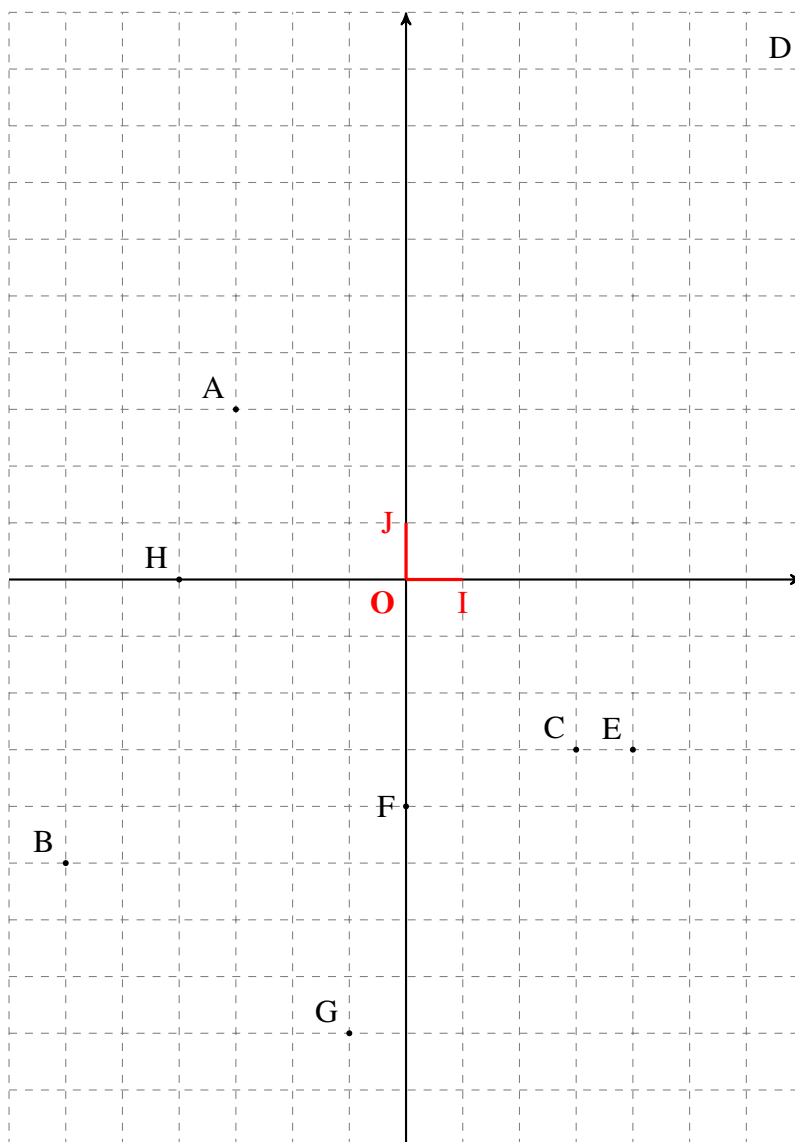
■ Exercice 1. Lecture de coordonnées de points

★★★★★

A

Corrigé page 24 ✌

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ suivant, donner les coordonnées de tous les points.



■ Exercice 2. Milieu d'un segment

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 24

Pour chacun des points A et B suivants, calculer les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$.

1 $A(1;2)$ et $B(3;4)$.

3 $A(2;-1)$ et $B(4;-5)$.

2 $A(-1;2)$ et $B(-3;4)$.

4 $A(-1;-1)$ et $B(5;-7)$.

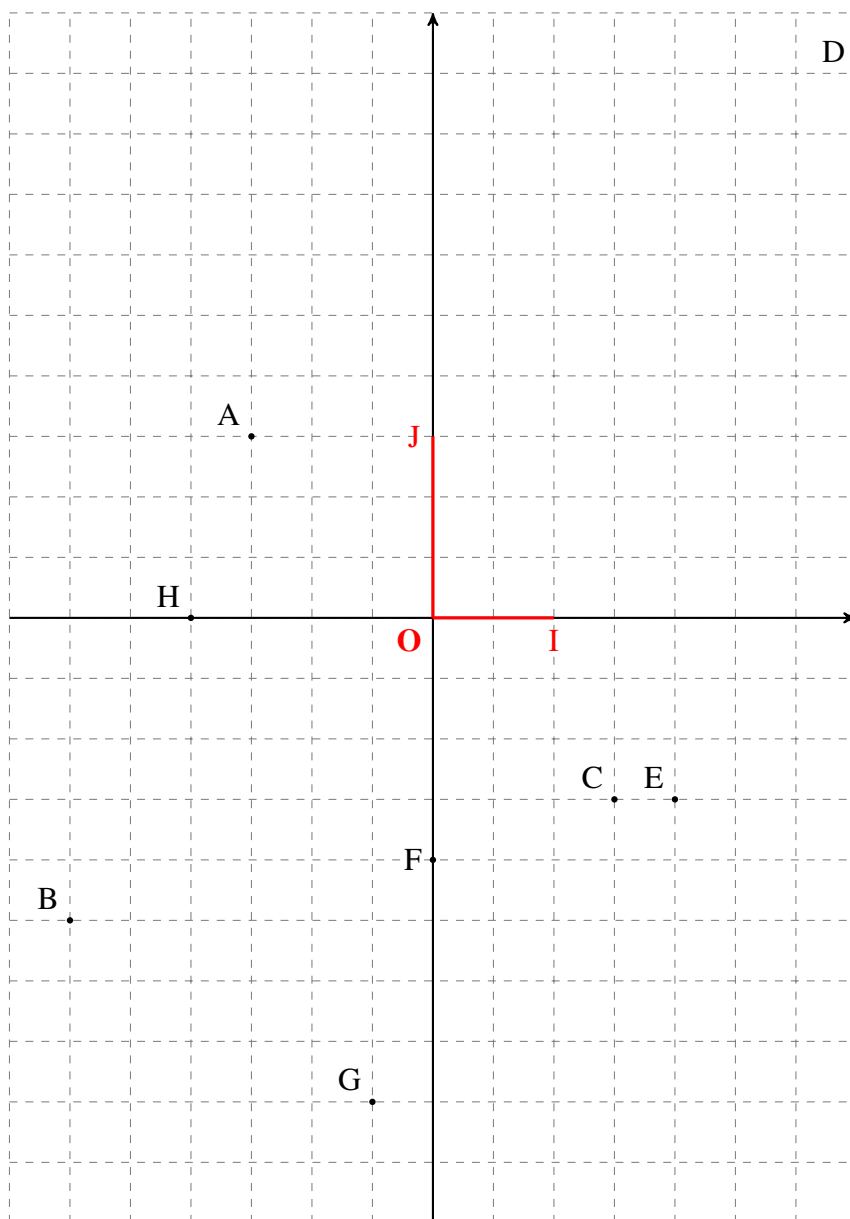
■ Exercice 3. Lecture de coordonnées

★★☆☆☆

A

Corrigé page 25

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ suivant, donner les coordonnées de tous les points.



■ Exercice 4. Milieu d'un segment

★☆☆☆☆ R

Corrigé page 25

Pour chacune des questions suivantes, on a les coordonnées d'un point A ainsi que celles du point I, milieu de [AB].

Déterminer les coordonnées du point B.

1 $A(1;2)$ et $I(3;4)$.

3 $A(2;-1)$ et $I(4;-5)$.

2 $A(-1;2)$ et $I(-3;4)$.

4 $A(-1;-1)$ et $I(5;-7)$.

Longueur

■ Exercice 5. Calcul de longueurs

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 26

Pour chaque question, déterminer la longueur AB.

1 $A(-2;3)$ et $B(-3;5)$

4 $A(3;-2)$ et $B(-2;7)$

2 $A(3;2)$ et $B(8;1)$

5 $A(1;-2)$ et $B(7;-5)$

3 $A(-1;-3)$ et $B(-4;-6)$

6 $A(1;4)$ et $B(-2;-1)$

Exercices récapitulatifs

■ Exercice 6. Un premier bilan

★★★★☆ R

Corrigé page 27

Dans le repère orthonormé (O,I,J), on considère les points $A(-1;1)$, $B(5;-3)$ et $C(4;2)$.

1 Placer les points A, B et C. Vous complétez au fur et à mesure la figure.

2 Quelle est la nature du triangle ABC ?

3 Déterminer les coordonnées du point F, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4 Calculer les coordonnées du milieu E de [AC].

5 En déduire les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

6 Sans calcul, donner la longueur EF.

7 Déterminer les coordonnées de G, symétrique de C par rapport à F.

■ Exercice 7. Exercice de recherche

★★★★☆ R

Corrigé page 29

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;5)$, $B(1;-2)$ et $C(3;y)$, où y est un nombre réel.

Déterminer la valeur de y afin que ABC soit un triangle rectangle en A .

■ Exercice 8. Trouver un point

★★★★☆ R

Corrigé page 29

Soient $A(-3;5)$ et $B(5;2)$ dans un repère orthonormé $(O;I,J)$.

On sait que $M(x;y)$ est à 3 unités de A et à 6 unités de B .

1 Montrer que :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10y - 6x - 25 & \text{à l'aide du point A,} \\ x^2 + y^2 = 4y + 10x + 7 & \text{à l'aide du point B.} \end{cases}$$

En déduire que $y = \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}$.

2 Montrer alors que $73x^2 + 70x + 1 = 0$ (on ne demande pas de résoudre cette équation).

3 Tracer la courbe de la fonction $f(x) = 73x^2 + 70x + 1$ sur votre calculatrice. Conjecturer alors le nombre de valeurs de x possibles.

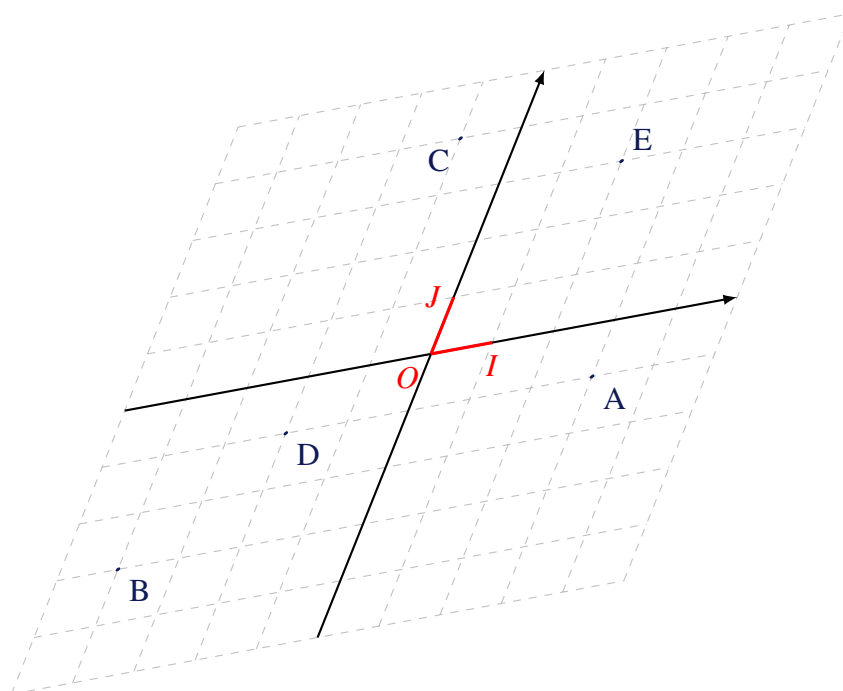
Repères non orthogonaux

■ Exercice 9. Lire des coordonnées

★★★★☆ A

Corrigé page 32

Nous avons placé dans le repère $(O;I,J)$ suivant des points. Donner leurs coordonnées.



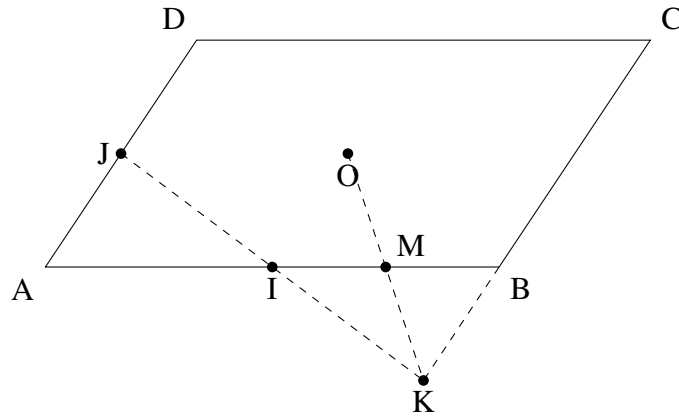
■ Exercice 10. Lire des coordonnées dans un parallélogramme

★★★★☆☆ A

Corrigé page 32

ABCD est un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$. On note K le point d'intersection des droites (IJ) et (BC) .

On note O le centre du parallélogramme ABCD et M le point d'intersection des droites (OK) et (AB) .



Dans le repère $(A; B, D)$, donner les coordonnées de chacun de ces points.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- A(-3;3)
- C(3;-3)
- E(4;-3)
- G(-1;-8)
- B(-6;-5)
- D(7;9)
- F(0;-4)
- H(-4;0)

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)**1** A(1;2) et B(3;4).

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

Ainsi, I(2;3)**2** A(-1;2) et B(-3;4).

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+(-3)}{2} = \frac{-4}{2} = -2. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3. \end{cases}$$

Ainsi, I(-2;3)**3** A(2;-1) et B(4;-5).

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+(-5)}{2} = \frac{-6}{2} = -3. \end{cases}$$

Ainsi, I(3;-3)**4** A(-1;-1) et B(5;-7).

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+(-7)}{2} = \frac{-8}{2} = -4. \end{cases}$$

Ainsi, I(2;-4)

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

• $A\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

• $C\left(\frac{3}{2}; -1\right)$

• $F\left(0; -\frac{4}{3}\right)$

• $B\left(-3; -\frac{5}{3}\right)$

• $D\left(\frac{7}{2}; 3\right)$

• $G\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{3}\right)$

• $E(2; -1)$

• $H(-2; 0)$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $A(1; 2)$ et $I(3; 4)$.

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \iff x_B = 2x_I - x_A = 2 \times 3 - 1 = 5. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \iff y_B = 2y_I - y_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(5; 6)}$

2 $A(-1; 2)$ et $I(-3; 4)$.

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \iff x_B = 2x_I - x_A = 2 \times (-3) - (-1) = -6 + 1 = -5. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \iff y_B = 2y_I - y_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(-5; 6)}$

3 $A(2; -1)$ et $I(4; -5)$.

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \iff x_B = 2x_I - x_A = 2 \times 4 - 2 = 6. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \iff y_B = 2y_I - y_A = 2 \times (-5) - (-1) = -10 + 1 = -9. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(6; -9)}$

4 $A(-1; -1)$ et $I(5; -7)$.

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \iff x_B = 2x_I - x_A = 2 \times 5 - (-1) = 11. \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \iff y_B = 2y_I - y_A = 2 \times (-7) - (-1) = -13. \end{cases}$$

Donc $\boxed{B(11; -13)}$

1 A(-2;3) et B(-3;5).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} \\&= \sqrt{(-3 + 2)^2 + 2^2} \\&= \sqrt{(-1)^2 + 2^2} \\&= \sqrt{1 + 4}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{5}}$$

2 A(3;2) et B(8;1).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(8 - 3)^2 + (1 - 2)^2} \\&= \sqrt{5^2 + (-1)^2} \\&= \sqrt{25 + 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{26}}$$

3 A(-1;-3) et B(-4;-6).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (-6 - (-3))^2} \\&= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \\&= \sqrt{9 + 9} \\&= \sqrt{18}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = 3\sqrt{2}}$$

4 A(3;-2) et B(-2;7).

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (7 - (-2))^2} \\&= \sqrt{(-5)^2 + 9^2} \\&= \sqrt{25 + 81}\end{aligned}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{106}}$$

5 A(1; -2) et B(7; -5).

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(7-1)^2 + (-5-(-2))^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{36+9} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{9 \times 5} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{5} \\ \boxed{AB = 3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

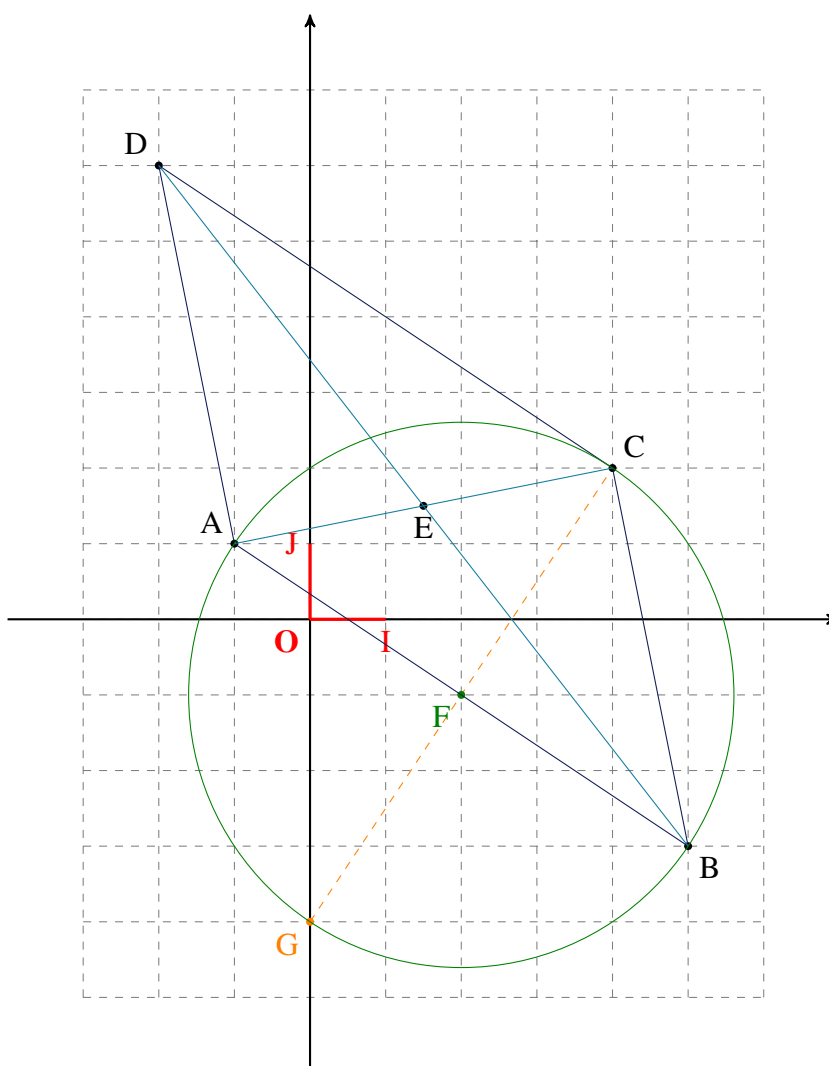
6 A(1; 4) et B(-2; -1).

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-4)^2} \\ &= \sqrt{9+25} \\ &= \sqrt{34} \\ \boxed{AB = \sqrt{34}} \end{aligned}$$

■ **Corrigé de l'exercice 6.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 La figure complétée est la suivante :



2 Calculons la longueur des côtés du triangle ABC :

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 & AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 & BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\
 &= (5 - (-1))^2 + (-3 - 3)^2 & &= (4 - (-1))^2 + (2 - 1)^2 & &= (4 - 5)^2 + (2 - (-3))^2 \\
 &= 6^2 + (-6)^2 & &= 5^2 + 1^2 & &= 1^2 + 5^2 \\
 &= 36 + 36 & &= 25 + 1 & &= 1 + 25 \\
 AB^2 &= 72. & AC^2 &= 26. & BC^2 &= 26.
 \end{aligned}$$

On remarque ainsi que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ et que $AC^2 = BC^2$ (donc que $AC = BC$).

Le triangle ABC est donc rectangle isocèle en C.

3 Le triangle ABC étant rectangle en C, le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse, à savoir [AB].

Ainsi, $F\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, soit $F\left(\frac{-1 + 5}{2}; \frac{1 - 3}{2}\right)$, et donc $F(2; -1)$.

4 E est le milieu de [AC] donc $E\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$, soit $E\left(\frac{-1 + 4}{2}; \frac{3 + 2}{2}\right)$, et donc $E\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

5 Si ABCD est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, F (qui est

le milieu de [AC]) est le milieu de [BD]. On en déduit alors les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x_F = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_F = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$$

D'où, en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{5 + x_D}{2} \\ \frac{3}{2} = \frac{-3 + y_D}{2} \end{cases} \quad \text{ou encore :} \quad \begin{cases} 3 = 5 + x_D \\ 3 = -3 + y_D \end{cases}$$

On en déduit alors que $x_D = 3 - 5 = -2$ et $y_D = 3 + 3 = 6$.

Ainsi, $D(-2; 6)$.

6 E et F sont les milieux respectifs de [AC] et [AB].

Ainsi, d'après le théorème des milieux appliqué au triangle ABC, $EF = \frac{BC}{2}$, soit $EF = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

7 G est le symétrique de C par rapport à F donc F est le milieu de [CG]. Ainsi :

$$\begin{cases} x_F = \frac{x_C + x_G}{2} \\ y_F = \frac{y_C + y_G}{2} \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} 2 = \frac{4 + x_G}{2} \\ -1 = \frac{2 + y_G}{2} \end{cases}$$

ou encore, en multipliant par 2 de chaque côté du signe « = » :

$$\begin{cases} 4 = 4 + x_G \\ -2 = 2 + y_G \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $G(0; -4)$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

ABC rectangle en A $\iff BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\iff (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2] + [(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2]$$

$$\iff (3 - 1)^2 + (y + 2)^2 = [(1 + 3)^2 + (-2 - 5)^2] + [(3 + 3)^2 + (y - 5)^2]$$

$$\iff 4 + y^2 + 4y + 4 = 16 + 49 + 36 + y^2 - 10y + 25$$

$$\iff 4y + 10y = 16 + 49 + 36 + 25 - 4 - 4$$

$$\iff 14y = 118$$

$$\iff y = \frac{118}{14} = \frac{59}{7}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 A(-3;5) et M(x;y) donc :

$$MA^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (-3 - x)^2 + (5 - y)^2.$$

Or, MA = 3 (d'après l'énoncé) donc $MA^2 = 3^2 = 9$ d'où :

$$(-3 - x)^2 + (5 - y)^2 = 9$$

soit, en développant :

$$9 + 6x + x^2 + 25 - 10y + y^2 = 9$$

ou encore :

$$x^2 + y^2 = 10y - 6x - 25. \quad (1)$$

B(5;2) donc, de façon analogue à ce qui vient d'être fait :

$$(5 - x)^2 + (2 - y)^2 = 6^2 = 36$$

soit :

$$25 - 10x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 36$$

ou encore :

$$x^2 + y^2 = 4y + 10x + 7. \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$$10y - 6x - 25 = 4y + 10x + 7$$

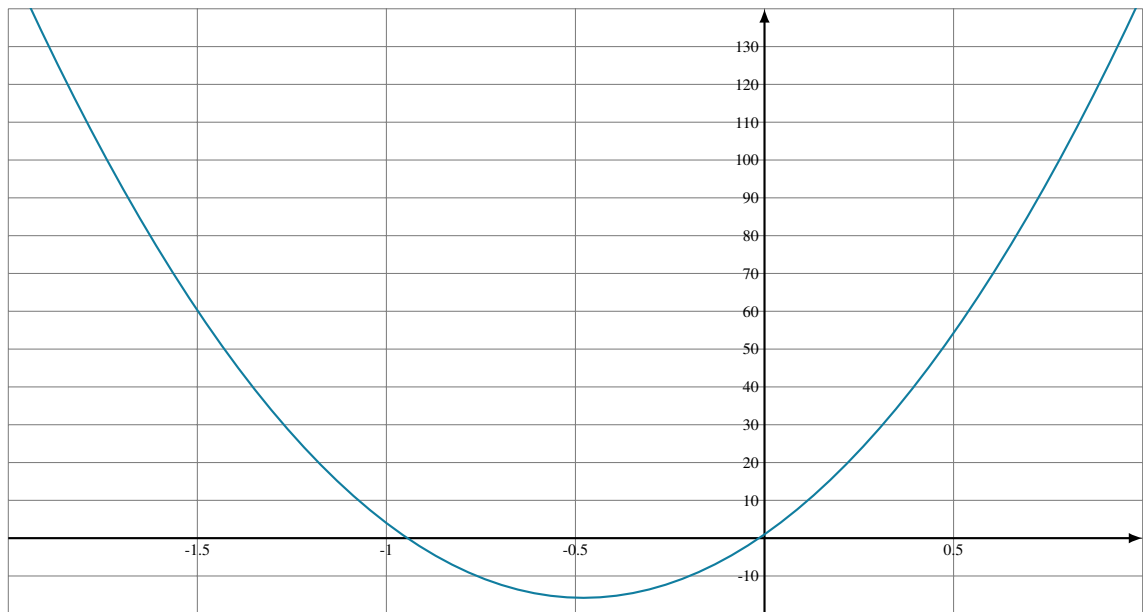
et donc :

$$6y = 16x + 32 \quad \text{soit} \quad \boxed{y = \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}}$$

2 À l'aide de l'égalité (2), en remplaçant y par $\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}$, on obtient :

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right)^2 &= 4\left(\frac{8}{3}x + \frac{16}{3}\right) + 10x + 7 \\ \iff x^2 + \frac{64}{9}x^2 + 2 \times \frac{8}{3}x \times \frac{16}{3} + \frac{16^2}{3^2} &= \frac{32}{3}x + \frac{64}{3} + 10x + 7 \\ \iff \frac{9}{9}x^2 + \frac{64}{9}x^2 + \frac{256}{9}x + \frac{256}{9} &= \frac{96}{9}x + \frac{192}{9} + \frac{90}{9}x + \frac{63}{9} \\ \iff 73x^2 + 256x + 256 &= 186x + 255 \\ \iff 73x^2 + 70x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

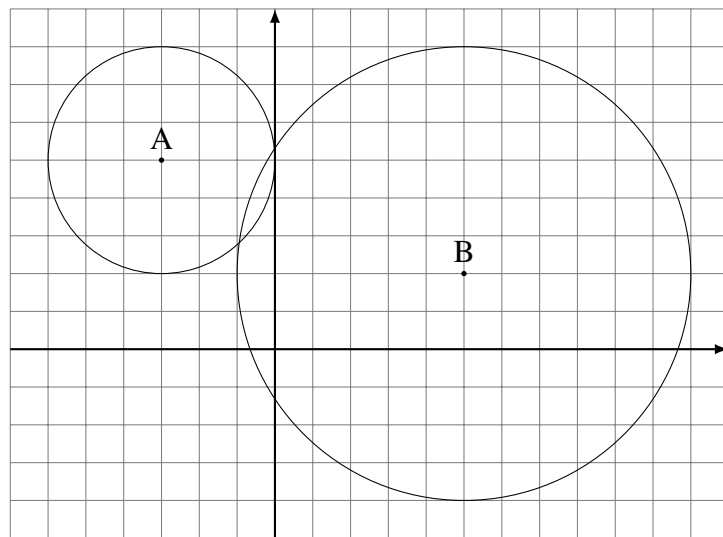
3 Sur la calculatrice, on :



On peut alors conjecturer que $f(x) = 0$ deux fois car il y a 2 points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Il semble donc y avoir 2 points possibles à notre problème.

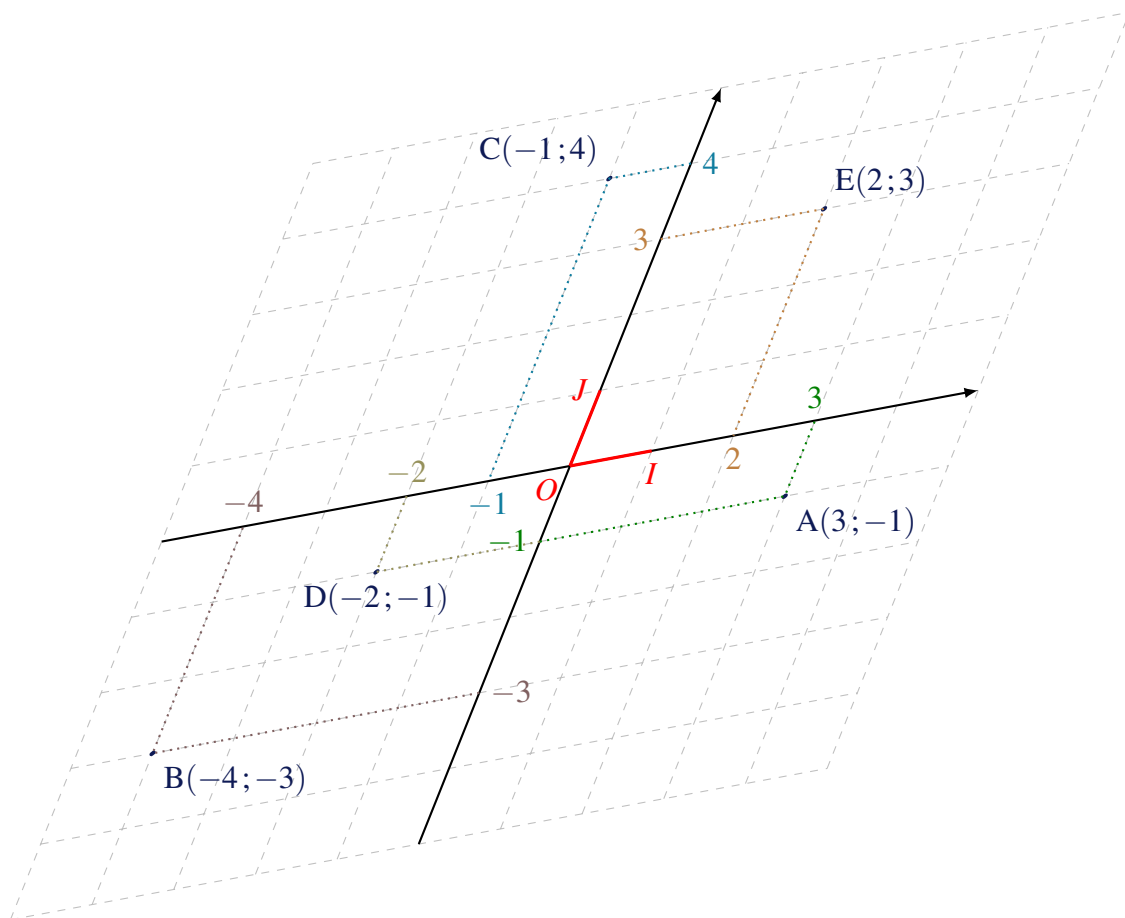
Cela semble cohérent : ces deux points sont les intersections des cercles de centres A et B et de rayons respectifs 3 et 6.



■ Corrigé de l'exercice 9.

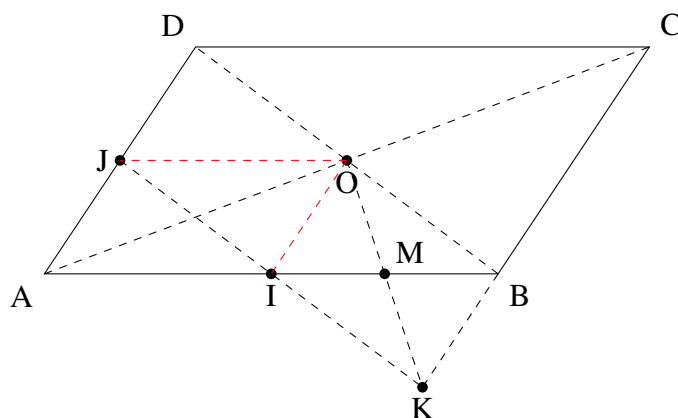
[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Dans un repère, quel qu'il soit, pour lire les coordonnées d'un point, il faut tracer les parallèles aux axes passant par ce point.



■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)



- $A(0;0)$ car A est l'origine du repère.
- $B(1;0)$ car B définit l'unité en abscisses.
- $D(0;1)$ car D définit l'unité en ordonnées.
- $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ car I est le milieu de $[AB]$.

- $J\left(0; \frac{1}{2}\right)$ car J est le milieu de [AD].
- $C(1; 1)$ car $(BC) \parallel (AD)$ (donc l'abscisse de C vaut 1) et $(CD) \parallel (AB)$ (donc l'ordonnée de C vaut 1).
- Dans le triangle ABC, O est le milieu de [AC] et I celui de [AB] donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (OI) est parallèle à (BC) ; donc l'abscisse de O est égale à $\frac{1}{2}$.

De même, dans le triangle ABD, on montre que (OJ) et (AB) sont parallèles donc l'ordonnée de O est égale à $\frac{1}{2}$.

Finalement, $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

- I, J, K d'une part, A, I, B d'autre part sont alignés. De plus, (AJ) et (BK) sont parallèles (ce qui signifie que l'abscisse de K vaut 1), donc I est le milieu de [JK] et $AJ = BK$, donc l'ordonnée de K vaut $-\frac{1}{2}$.

Finalement, $K\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

- Dans le triangle ABD, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AD] donc (IJ) et (BD) sont parallèles. Ainsi, $(IK) \parallel (OB)$.

De plus, $(OI) \parallel (AD)$ et $(AD) \parallel (BC)$ donc $(IO) \parallel (BK)$.

Donc OIKB est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu; donc M est le milieu de [IB].

D'où $M\left(\frac{3}{4}; 0\right)$.

Développements

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

3 juin 2018

■ Exercice 1. Double distributivité

★★★★☆ **A**

Corrigé page 35 👉

Développer les expressions suivantes :

1 $A = (x+2)(x+3)$

2 $B = (3x+2)(5x+3)$

3 $C = (3-5x)(2x-7)$

4 $D = (5x-4)(-3x-2)$

5 $E = (4x-1)(2x+4) + (2x-1)(5x+3)$

6 $F = (x-4)(x+3) - 2(x+1)(x-2)$

7 $G = (x+5)(2x-1) - 5(x+7)(x+1)$

■ Exercice 2. Identités remarquables

★★★★☆ **A**

Corrigé page 35 👉

Développer les expressions suivantes :

1 $A = (x+2)^2$

2 $B = (3x+2)^2$

3 $C = (3-5x)^2$

4 $D = (5x-4)^2$

5 $E = (4x-1)^2$

6 $F = (x-4)(x+4)$

7 $G = (2x+5)(2x-5)$

8 $H = (3x-7)(3x+7)$

■ Exercice 3. Florilège de développements

★★★★☆ **A**

Corrigé page 36 👉

Développer les expressions suivantes :

1 $A = (2x-5)(x+3) + (x+6)^2$

2 $B = (3x+4)^2 - (x-1)(x+1)$

3 $C = (5x-4)(5x+4) - 2(x+3)(x-3)$

4 $D = (8x+3)(3x-8) - 3(x+9)^2$

5 $E = (7x-1)(7x+1) - 5(3x-2)^2$

6 $F = 3(2x-1)^2 + (5x-3)^2$

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 1 \quad A &= (x+2)(x+3) \\ &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ \boxed{A} &= \boxed{x^2 + 6x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad B &= (3x+2)(5x+3) \\ &= 15x^2 + 9x + 10x + 6 \\ \boxed{B} &= \boxed{15x^2 + 19x + 6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad C &= (3-5x)(2x-7) \\ &= 6x - 21 - 10x^2 + 35x \\ \boxed{C} &= \boxed{-10x^2 + 41x - 21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad D &= (5x-4)(-3x-2) \\ &= -15x^2 - 10x + 12x + 8 \\ \boxed{D} &= \boxed{-15x^2 + 2x + 8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad E &= (4x-1)(2x+4) + (2x-1)(5x+3) \\ &= (8x^2 + 16x - 2x - 4) + (10x^2 + 6x - 5x - 3) \\ \boxed{E} &= \boxed{18x^2 + 15x - 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad F &= (x-4)(x+3) - 2(x+1)(x-2) \\ &= (x^2 + 3x - 4x - 12) - 2(x^2 - 2x + x - 2) \\ &= x^2 - x - 12 - 2x^2 + 2x + 4 \\ \boxed{F} &= \boxed{-x^2 + x - 8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad G &= (x+5)(2x-1) - 5(x+7)(x+1) \\ &= (2x^2 - x + 10x - 5) - 5(x^2 + x + 7x + 7) \\ &= 2x^2 + 9x - 5 - 5x^2 - 40x - 35 \\ \boxed{G} &= \boxed{-3x^2 - 31x - 40} \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad A = (x+2)^2 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = \boxed{x^2 + 4x + 4}$$

$$2 \quad B = (3x+2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 2 \times 3x + 2^2 = \boxed{9x^2 + 12x + 4}$$

$$3 \quad C = (3-5x)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times 5x + (5x)^2 = \boxed{9 - 30x + 25x^2}$$

$$4 \quad D = (5x-4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 4 \times 10x + 4^2 = \boxed{25x^2 - 40x + 16}$$

$$5 \quad E = (4x-1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 1 \times 4x + 1^2 = \boxed{16x^2 - 8x + 1}$$

$$6 \quad F = (x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = \boxed{x^2 - 16}$$

$$7 \quad G = (2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = \boxed{4x^2 - 25}$$

$$8 \quad H = (3x-7)(3x+7) = (3x)^2 - 7^2 = \boxed{9x^2 - 49}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 1 \quad A &= (2x-5)(x+3) + (x+6)^2 \\ &= (2x^2 + 6x - 5x - 15) + (x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2) \\ &= 2x^2 + x - 15 + x^2 + 12x + 36 \\ A &= 3x^2 + 13x + 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad B &= (3x+4)^2 - (x-1)(x+1) \\ &= (3x)^2 + 2 \times 4 \times 3x + 4^2 - (x^2 - 1^2) \\ &= 9x^2 + 24x + 16 - x^2 + 1 \\ B &= 8x^2 + 24x + 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad C &= (5x-4)(5x+4) - 2(x+3)(x-3) \\ &= (5x)^2 - 4^2 - 2(x^2 - 3^2) \\ &= 25x^2 - 16 - 2x^2 + 18 \\ C &= 23x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad D &= (8x+3)(3x-8) - 3(x+9)^2 \\ &= 24x^2 - 64x + 9x - 24 - 3(x^2 + 2 \times 9 \times x + 9^2) \\ &= 24x^2 - 55x - 24 - 3(x^2 + 18x + 81) \\ &= 24x^2 - 55x - 24 - 3x^2 - 54x - 243 \\ D &= 21x^2 - 109x - 267 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad E &= (7x-1)(7x+1) - 5(3x-2)^2 \\ &= (7x)^2 - 1^2 - 5[(3x)^2 - 2 \times 2 \times 3x + 2^2] \\ &= 49x^2 - 1 - 5(9x^2 - 12x + 4) \\ &= 49x^2 - 1 - 45x^2 + 60x - 20 \\ E &= 4x^2 + 60x - 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad F &= 3(2x-1)^2 + (5x-3)^2 \\ &= 3(4x^2 - 4x + 1) + (25x^2 - 30x + 9) \\ &= 12x^2 - 12x + 3 + 25x^2 - 30x + 9 \\ F &= 37x^2 - 42x + 12 \end{aligned}$$

Factorisations

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

■ Exercice 1. Avec facteur commun évident

★★★★☆ **A**

Corrigé page 39 ✌

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 1**, à savoir que le facteur commun est explicite dans chaque terme.

1 $A = (2x + 1)(x + 3) - 2(x + 3)(5x + 6)$

2 $B = (x - 4)(2x + 9) + 3(x - 4)(7x + 3)$

3 $C = (3x - 1)(5x + 2) - (5x + 2)(9x + 8)$

■ Exercice 2. En faisant apparaître le facteur commun

★★★★☆ **A**

Corrigé page 39 ✌

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 2**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître sans l'aide d'une identité remarquable.

1 $D = (9x + 6)(4x + 1) + (3x + 2)(1 - 4x)$

2 $E = (2x + 3)(5x - 10) - 3(x - 2)(5x + 9)$

3 $F = (3x - 1)(2x + 7) - 4(1 - 3x)(7 - 2x)$

■ Exercice 3. À l'aide d'une identité remarquable

★★★★☆ **A**

Corrigé page 40 ✌

Factoriser chacune des expressions suivantes à l'aide d'une des trois identités remarquables.

1 $A = x^2 + 2x + 1$

2 $B = 9x^2 - 12x + 4$

3 $C = x^2 - 9$

4 $D = 4x^2 + 12x + 9$

5 $E = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25$

6 $F = 25 - 4x^2$

7 $G = 81x^2 + 126x + 49$

8 $H = 121x^2 - 64$

■ Exercice 4. À l'aide de la troisième identité remarquable

★★★★☆ A

Corrigé page 42

Factoriser chacune des expressions suivantes à l'aide de la troisième identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

1 $A = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$

4 $D = (8 - 4x)^2 + (6x + 4)^2$

2 $B = (2x + 3)^2 - (3x - 2)^2$

5 $E = 36(x - 4)^2 - 64(x + 3)^2$

3 $C = (3 - 4x)^2 - (5x + 1)^2$

6 $F = 25(3 - 7x)^2 - 9(2x + 5)^2$

■ Exercice 5. À l'aide des identités remarquables

★★★★☆ A

Corrigé page 43

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 3**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut le faire apparaître à l'aide d'une identité remarquable.

1 $G = 9x^2 + 6x + 1 - (3x + 1)(4x - 1)$

2 $H = 4x^2 - 12x + 9 + (2x - 3)(7x + 1)$

3 $I = 25x^2 - 4 + 3(5x - 2)(x + 3)$

■ Exercice 6. À l'aide d'une identité remarquable

★★★★★ A

Corrigé page 44

Factoriser chacune des expressions suivantes sachant qu'elles sont toutes de **type 4**, à savoir que le facteur commun n'est pas explicite dans chaque terme mais que l'on peut faire apparaître une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$ pour factoriser.

1 $J = (9x + 18)(x + 2) - (4x + 20)(x + 5)$

2 $K = 2(2x + 3)(4x + 6) - 3(3x + 2)(9x + 6)$

3 $L = 7(7x + 1)(49x + 7) + (1 - 4x)(16x - 4)$

■ Exercice 7. Calculs astucieux

★★★★★ A

Corrigé page 44

Sans utiliser la calculatrice, donner le résultat des opérations suivantes :

1 $A = 897\,526^2 - 897\,525 \times 897\,527$

2 $B = 100\,001^2 - 99\,999^2$

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 A &= (2x+1)(x+3) - 2(x+3)(5x+6) \\
 &= (x+3)[(2x+1) - 2(5x+6)] \\
 &= (x+3)(2x+1-10x-12) \\
 &= (x+3)(-8x-11) \\
 &= \underline{\underline{-(x+3)(8x+11)}}
 \end{aligned}$$

le facteur commun est $(x+3)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -2 le $5x$ et le 6
 on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
 on met en facteur « -1 » pour la lisibilité

$$\begin{aligned}
 B &= (x-4)(2x+9) + 3(x-4)(7x+3) \\
 &= (x-4)[(2x+9) + 3(7x+3)] \\
 &= (x-4)(2x+9+21x+9) \\
 &= \underline{\underline{(x-4)(23x+18)}}
 \end{aligned}$$

le facteur commun est $(x-4)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par 3 le $7x$ et le 3
 on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses

$$\begin{aligned}
 C &= (3x-1)(5x+2) - (5x+2)(9x+8) \\
 &= (5x+2)[(3x-1) - (9x+8)] \\
 &= (5x+2)(3x-1-9x-8) \\
 &= (5x+2)(-6x-9) \\
 &= \underline{\underline{-3(5x+2)(2x+3)}}
 \end{aligned}$$

le facteur commun est $(5x+2)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets en multipliant par -1 le $9x$ et le 8
 on réduit l'expression dans la deuxième paire de parenthèses
 on factorise par -2 ce qu'il y a dans la deuxième paire de parenthèses

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 D &= (9x+6)(4x+1) + (3x+2)(1-4x) \\
 &= \underline{3(3x+2)}(4x+1) + \underline{(3x+2)}(1-4x) \\
 &= (3x+2)[3(4x+1) + (1-4x)] \\
 &= (3x+2)(12x+3+1-4x) \\
 &= (3x+2)(8x+4) \\
 &= \underline{\underline{4(3x+2)(2x+1)}}
 \end{aligned}$$

on factorise $(9x+6)$ par 3 pour faire apparaître $(3x+2)$, qui est dans la deuxième partie
 on factorise par $(3x+2)$
 on enlève les parenthèses dans les crochets
 on réduit l'expression dans la seconde paire de parenthèses
 on factorise par 4 dans le deuxième facteur

$$\begin{aligned}
E &= (2x+3)(5x-10) - 3(x-2)(5x+9) \\
&= \underline{5(x-2)}(2x+3) - 3\underline{(x-2)}(5x+9) && \text{on factorise } (5x-10) \text{ par } 5 \text{ pour faire apparaître } (x-2), \text{ qui est dans la deuxième partie} \\
&= (x-2)[5(2x+3) - 3(5x+9)] && \text{on factorise par } (x-2) \\
&= (x-2)(10x+15-15x-27) && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&= (x-2)(-5x-12) && \text{on réduit l'expression dans le second facteur} \\
&= \underline{-(x-2)(5x+12)} && \text{on factorise par } -1 \text{ dans le deuxième facteur}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= (3x-1)(2x+7) - 4(1-3x)(7-2x) \\
&= (3x-1)(2x+7) + 4(3x-1)(7-2x) && \text{on factorise } (1-3x) \text{ par } (-1) \text{ pour faire apparaître } (3x-1), \text{ qui est dans la première partie} \\
&= (3x-1)[(2x+7) + 4(7-2x)] && \text{on factorise par } (3x-1) \\
&= (3x-1)(2x+7+28-8x) && \text{on enlève les parenthèses dans les crochets} \\
&= \underline{(3x-1)(-6x+35)} && \text{on réduit l'expression dans le second facteur}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Rappelons avant tout les trois identités remarquables :

Formes factorisées = Formes développées
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Quand on souhaite factoriser à l'aide d'une identité remarquable, il faut lire ces égalités de droite à gauche :

Formes développées = Formes factorisées
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

1 $A = x^2 + 2x + 1.$

Nous voyons qu'il y a trois termes dans cette expression ; or, seules les deux premières égalités développées comportent trois termes.

De plus, il n'y a que des signes « + » donc seule la première égalité ne peut convenir.

Il faut donc que :

$$x^2 + 2x + 1 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

ce qui signifie que nous devons avoir :

$$\begin{cases} a^2 = x^2 \\ b^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = x \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{par exemple.}$$

On vérifie que le double produit ($2ab$) est correct :

$$2 \times x \times 1 = 2x ;$$

donc :

$$\boxed{x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2}$$

2 $B = 9x^2 - 12x + 4.$

Nous voyons qu'il y a trois termes dans cette expression ; or, seules les deux premières égalités développées comportent trois termes.

De plus, il y a un signe « $-$ » donc seule la deuxième égalité ne peut convenir.

Il faut donc que :

$$9x^2 - 12x + 4 = a^2 - 2ab + b^2 ,$$

ce qui signifie que nous devons avoir :

$$\begin{cases} a^2 = 9x^2 \\ b^2 = 4 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 3x \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{par exemple.}$$

On vérifie que le double produit ($2ab$) est correct :

$$2 \times 3x \times 2 = 12x ;$$

donc :

$$\boxed{9x^2 - 12x + 4 = (3x + 2)^2}$$

3 $C = x^2 - 9.$

Il n'y a que deux termes dans cette expression donc seule la troisième identité remarquable ne peut convenir. On a :

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = a^2 - b^2 \text{ avec } a = x \text{ et } b = 3$$

donc :

$$\boxed{x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)}$$

4 $D = 4x^2 + 12x + 9.$

On peut écrire :

$$D = (2x)^2 + 2 \times 6x + 3^2.$$

Ainsi, D est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$, d'où :

$$\boxed{D = (2x + 3)^2}$$

5 $E = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25.$

On peut écrire :

$$E = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{5}{2}x + 5^2.$$

Ainsi, E est de la forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \frac{1}{2}x$ et $b = 5$, d'où :

$$\boxed{E = \left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2}$$

6 $F = 25 - 4x^2$.

On peut écrire :

$$F = 5^2 - (2x)^2$$

donc F est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 5$ et $b = 2x$, d'où :

$$\boxed{(5 - 2x)(5 + 2x)}$$

7 $G = 81x^2 + 126x + 49$.

On peut écrire :

$$G = (9x)^2 + 2 \times 63x + 7^2 = (9x)^2 + 2 \times 9x \times 7 + 7^2$$

donc G est de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 9x$ et $b = 7$, d'où :

$$\boxed{G = (9x + 7)^2}$$

8 $H = 121x^2 - 64$.

On peut écrire :

$$H = (11x)^2 - 8^2$$

donc H est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 11x$ et $b = 8$, d'où :

$$\boxed{H = (11x - 8)(11x + 8)}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $A = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$.

A est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (x + 1)$ et $b = (x - 1)$, d'où :

$$\begin{aligned} A &= [(x + 1) - (x - 1)] [(x + 1) + (x - 1)] \\ &= (x + 1 - x + 1)(x + 1 + x - 1) \\ &= 2 \times 2x \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 4x}$$

2 $B = (2x + 3)^2 - (3x - 2)^2$.

B est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (2x + 3)$ et $b = (3x - 2)$, d'où :

$$\begin{aligned} B &= [(2x + 3) - (3x - 2)] [(2x + 3) + (3x - 2)] \\ &= (2x + 3 - 3x + 2)(2x + 3 + 3x - 2) \end{aligned}$$

$$\boxed{B = (-x + 5)(5x + 1)}$$

3 $C = (3 - 4x)^2 - (5x + 1)^2$.

C est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (3 - 4x)$ et $b = (5x + 1)$, d'où :

$$\begin{aligned} C &= [(3 - 4x) - (5x + 1)] [(3 - 4x) + (5x + 1)] \\ &= (3 - 4x - 5x - 1)(3 - 4x + 5x + 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{C = (2 - 9x)(x + 4)}$$

4 $D = (8 - 4x)^2 + (6x + 4)^2.$

D est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = (8 - 4x)$ et $b = (6x + 4)$, d'où :

$$\begin{aligned} D &= [(8 - 4x) - (6x + 4)][(8 - 4x) + (6x + 4)] \\ &= (8 - 4x - 6x - 4)(8 - 4x + 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\boxed{D = (4 - 10x)(2x + 12)}$$

Remarque : on pourrait continuer à factoriser D en écrivant :

$$D = 2(2 - 5x) \times 2(x + 6)$$

$$\boxed{D = 4(2 - 5x)(x + 6)}$$

Cette dernière forme est la *forme factorisée optimale*, mais elle n'a que très peu d'intérêt en classe de Seconde, si ce n'est (nous le verrons dans le chapitre sur les équations) à éviter des simplifications de fractions dans certains cas. Donc ici, la première forme trouvée est suffisante.

5 $E = 36(x - 4)^2 - 64(x + 3)^2.$

E peut s'écrire :

$$E = [6(x - 4)]^2 - [8(x + 3)]^2.$$

Ainsi, E est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 6(x - 4)$ et $b = 8(x + 3)$, d'où :

$$\begin{aligned} E &= [6(x - 4) - 8(x + 3)][6(x - 4) + 8(x + 3)] \\ &= (6x - 24 - 8x - 24)(6x - 24 + 8x + 24) \\ &= (-2x - 48)(14x) \end{aligned}$$

$$\boxed{E = 14x(-2x - 48)}$$

$$= 14x \times (-2)(x + 24)$$

$$\boxed{E = -28x(x + 24)} \quad (\text{forme factorisée optimale})$$

6 $F = 25(3 - 7x)^2 - 9(2x + 5)^2.$

On peut écrire :

$$F = [5(3 - 7x)]^2 - [3(2x + 5)]^2.$$

Ainsi, F est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 5(3 - 7x)$ et $b = 3(2x + 5)$, d'où :

$$\begin{aligned} F &= [5(3 - 7x) - 3(2x + 5)][5(3 - 7x) + 3(2x + 5)] \\ &= (15 - 35x - 6x - 15)(15 - 35x + 6x + 15) \end{aligned}$$

$$\boxed{F = -41x(30 - 29x)}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$G = 9x^2 + 6x + 1 - (3x + 1)(4x - 1)$$

$$= (3x + 1)^2 - (3x + 1)(4x - 1)$$

$$= (3x + 1)[(3x + 1) - (4x - 1)]$$

$$= (3x + 1)(3x + 1 - 4x + 1)$$

$$= \underline{(3x + 1)(-x + 2)}$$

on veut que $9x^2 + 6x + 1$ soit une identité remarquable de la forme $(a + b)^2$, donc il faut que $9x^2 = a^2$ et que $1 = b^2$ donc $a = 3x$ et $b = 1$

on factorise par $(3x + 1)$

on enlève les parenthèses dans les crochets

on réduit l'expression dans le second facteur

$$\begin{aligned}
 H &= 4x^2 - 12x + 9 + (2x - 3)(7x + 1) \\
 &= (2x - 3)^2 + (2x - 3)(7x + 1) && \text{il faut que } 4x^2 = a^2 \text{ et } 9 = b^2, \text{ donc } a = 2x \text{ et } b = 3 \\
 &= (2x - 3)(2x - 3 + 7x + 1) \\
 &= (2x - 3)(9x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= 25x^2 - 4 + 3(5x - 2)(x + 3) \\
 &= (5x)^2 - 2^2 + 3(5x - 2)(x + 3) && \text{on fait apparaître une expression de la forme } a^2 - b^2 \\
 &= (5x - 2)(5x + 2) + 3(5x - 2)(x + 3) && \text{on factorise } a^2 - b^2 \text{ en } (a - b)(a + b) \\
 &= (5x - 2)[5x + 2 + 3(x + 3)] \\
 &= (5x - 2)(5x + 2 + 3x + 9) \\
 &= (5x - 2)(8x + 11)
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 J &= (9x + 18)(x + 2) - (4x + 20)(x + 5) \\
 &= 9(x + 2)(x + 2) - 4(x + 5)(x + 5) \\
 &= [3(x + 2)]^2 - [2(x + 5)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2, \text{ avec } a = 3(x + 2) \text{ et } b = 2(x + 5) \\
 &= [3(x + 2) - 2(x + 5)][3(x + 2) + 2(x + 5)] \\
 &= (3x + 6 - 2x - 10)(3x + 6 + 2x + 10) && \text{on développe dans les crochets} \\
 &= (x - 4)(5x + 16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K &= 2(2x + 3)(4x + 6) - 3(3x + 2)(9x + 6) \\
 &= 2(2x + 3) \times 2(2x + 3) - 3(3x + 2) \times 3(3x + 2) \\
 &= [2(2x + 3)]^2 - [3(3x + 2)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
 &= [2(2x + 3) - 3(3x + 2)][2(2x + 3) + 3(3x + 2)] \\
 &= (4x + 6 - 9x - 6)(4x + 6 + 9x + 6) && \text{on développe dans les crochets} \\
 &= -5x(13x + 12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= 7(7x + 1)(49x + 7) + (1 - 4x)(16x - 4) \\
 &= 7(7x + 1) \times 7(7x + 1) - (4x - 1) \times 4(4x - 1) \\
 &= [7(7x + 1)]^2 - [2(4x - 1)]^2 && \text{on fait apparaître } a^2 - b^2 \\
 &= [7(7x + 1) - 2(4x - 1)][7(7x + 1) + 2(4x - 1)] \\
 &= (49x + 7 - 8x + 2)(49x + 7 + 8x - 2) && \text{on développe dans les crochets} \\
 &= (41x + 9)(57x + 5)
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $A = 897526^2 - 897525 \times 897527.$

Posons $x = 897526$. Alors,

$$\begin{aligned}
 A &= x^2 - (x - 1)(x + 1) \\
 &= x^2 - (x^2 - 1^2) \\
 &= x^2 - x^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 1}$$

2 $B = 100001^2 - 99999^2.$

Posons $x = 100000$. Alors,

$$\begin{aligned}
 B &= (x + 1)^2 - (x - 1)^2 \\
 &= [(x + 1) - (x - 1)][(x + 1) + (x - 1)] \\
 &= 4x.
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{B = 4 \times 100000 = 400000}.$

Équations & inéquations

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

Équations

■ Exercice 1. Équations diverses

★★★★☆ **A**

Corrigé page 49 ✌

Résoudre les équations suivantes :

1 $-3x + 7 = 0$

2 $\frac{3}{5}x - 6 = 0$

3 $-\frac{2}{7}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{21}x + 2$

4 $(-3x + 1)(5x - 7) = 0$

5 $\left(-\frac{1}{2}x - 5\right)\left(\frac{3}{4}x + 2\right) = 0$

6 $2x(5x - 1)(2x + 3) = 0$

7 $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$

8 $\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$

9 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 2$

10 $\frac{2}{x-1} = 1 - \frac{x}{x+1}$

■ Exercice 2. Équations avec carrés

★★★★☆ **A**

Corrigé page 51

Résoudre les équations suivantes :

1 $(3x - 5)^2 = 16$

2 $(x^2 - 4)^2 = 81$

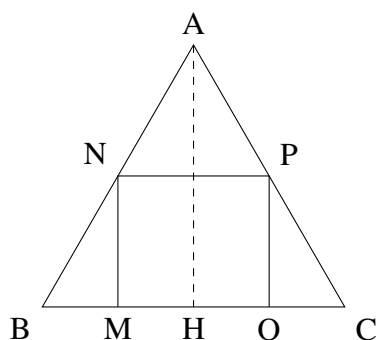
3 $(3x^2 - 4)^2 = 9$

4 $\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25$

■ Exercice 3. Dans un triangle équilatéral

★★★★☆ R

Corrigé page 53



Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 6$ et soit H le milieu de $[BC]$.

M est un point de $[BH]$. On place les points N et P respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$ tels que MNPQ soit un rectangle d'axe de symétrie (AH) .

On pose $BM = x$.

1 a. Exprimer MN en fonction de x .

b. Justifier que $MQ = 6 - 2x$.

2 On veut que MNPQ soit un carré.

a. Montrer alors que $x\sqrt{3} = 6 - 2x$.

b. Calculer x .

■ Exercice 4. Équations avec racines carrées

★★★★☆ A

Corrigé page 54

Résoudre les équations suivantes :

1 $\sqrt{3x-2} = 7$.

3 $\sqrt{x^2+x+1} = x+1$.

2 $\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3$.

4 $x\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{7} - x\sqrt{2}$.

5 $\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4)$.

Inéquations

■ Exercice 5. Résolution graphique

★★★★☆ A

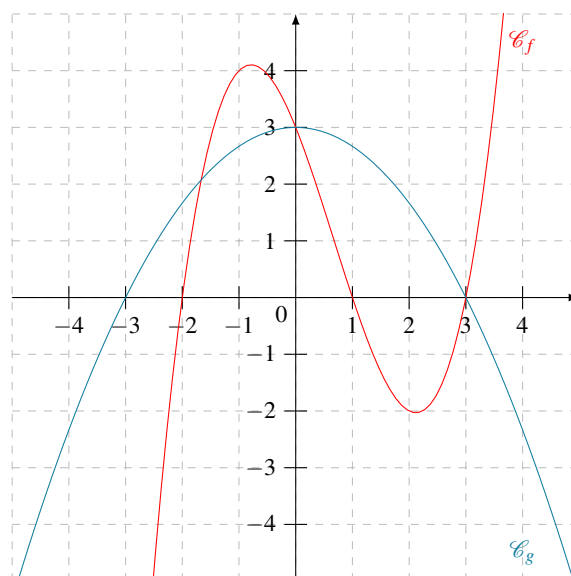
Corrigé page 57

Résoudre graphiquement sur $[-5;5]$ les inéquations suivantes à l'aide du graphique ci-contre :

1 $f(x) > g(x)$

2 $f(x) \geq 0$

3 $g(x) \leq 0$



■ Exercice 6. Inéquations diverses

★★★★☆☆ A

Corrigé page 59 📖

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $(x-1)(x+2) \leq 0$

2 $(3x-2)(5x-7) \geq 0$

3 $(5x-1)(-x+9)(2x+1) > 0$

4 $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} < \frac{2x+6}{4x^2-1}$

5 $\frac{5x+4}{2x-3} + \frac{(8-x)(10x+8)}{(2x-3)^2} \leq 0$

6 $\frac{(4-3x)(9x^2-10x-3)}{2x-7} < 4-3x$

7 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{x(x^2-1)}$

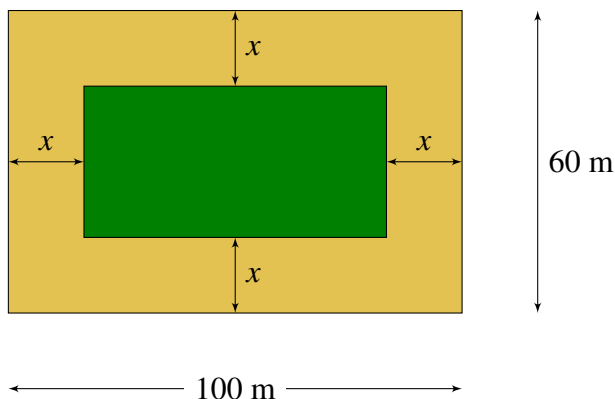
8 $\frac{1-2x}{16x^2-9} \geq \frac{1-2x}{4x+3}$

■ Exercice 7. Dans le jardin

★★★★★ R

Corrigé page 62 🙌

Un jardin à forme rectangulaire est représenté ci-dessous :



On note $f(x)$ l'aire (en m^2) de la partie extérieure à l'espace vert.

- 1 Montrer que $f(x) = -4x(x - 80)$.
- 2 Montrer que $f(x) = -4(x - 40)^2 + 6400$.

On souhaite savoir pour quelles valeurs de x cette aire est inférieure ou égale à $1\,500\text{ m}^2$.

- 3 Montrer alors que $(75 - x)(x - 5) \leq 0$.
- 4 Résoudre cette dernière inéquation et conclure.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad -3x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7}{-3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7}{3}}$$

$$2 \quad \frac{3}{5}x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \times \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 10}$$

$$3 \quad -\frac{2}{7}x + \frac{1}{2} = \frac{2}{21}x + 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{7}x - \frac{2}{21}x = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{21}x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{21}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{63}{16}}$$

$$4 \quad (-3x + 1)(5x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x + 1 = 0 \text{ ou } 5x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{7}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{7}{5} \right\}}$$

$$\begin{aligned}
5 \quad & \left(-\frac{1}{2}x-5\right)\left(\frac{3}{4}x+2\right)=0 \\
& \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x-5=0 \text{ ou } \frac{3}{4}x+2=0 \\
& \Leftrightarrow x=-10 \text{ ou } x=-\frac{8}{3} \\
& \Leftrightarrow S=\left\{-10; -\frac{8}{3}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 \quad & 2x(5x-1)(2x+3)=0 \\
& \Leftrightarrow 2x=0 \text{ ou } 5x-1=0 \text{ ou } 2x+3=0 \\
& \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{1}{5} \text{ ou } x=-\frac{3}{2} \\
& \Leftrightarrow S=\left\{0; \frac{1}{5}; -\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7 \quad & \frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}, x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x^2-4}, x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\
& \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-4}, x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\
& \Leftrightarrow x-2=1, x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \\
& \Leftrightarrow x=3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \quad & \frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1}, x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow x^2+1=2x, x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow x^2-2x+1=0, x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow (x-1)^2=0, x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow x=1, x \neq 1 \\
& \Leftrightarrow S=\emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \quad & \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=2, x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{2x(x+1)}{x(x+1)}, x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x+1+x=2x(x+1), x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow 2x+1=2x^2+2x, x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}, x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\
& \Leftrightarrow S=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10 \quad & \frac{2}{x-1} = 1 - \frac{x}{x+1}, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow 2(x+1) = x^2 - 1 - x(x-1), \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow 2x+2 = x^2 - 1 - x^2 + x, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow 2x+2 - x^2 + 1 + x^2 - x = 0, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x+3 = 0, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow x = -3, \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \boxed{S = \{-3\}}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
1 \quad (3x-5)^2 = 16 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 = 4 \\ \text{ou} \\ 3x-5 = -4 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ \text{ou} \\ 3x = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{On a alors : } \boxed{\mathcal{S} = \left\{ 3; \frac{1}{3} \right\}}.$$

$$\begin{aligned}
2 \quad (x^2-4)^2 = 81 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 = 9 \\ \text{ou} \\ x^2-4 = -9 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 13 \\ \text{ou} \\ x^2 = -5 \end{cases} \leftarrow \text{impossible car } x^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{13} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{On a alors : } \boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{13}; \sqrt{13}\}}.$$

$$\begin{aligned}
3 \quad (3x^2 - 4)^2 = 9 &\iff \begin{cases} 3x^2 - 4 = 3 \\ \text{ou} \\ 3x^2 - 4 = -3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x^2 = 7 \\ \text{ou} \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \frac{7}{3} \\ \text{ou} \\ x^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7}{3}} & \text{ou} & x = -\sqrt{\frac{7}{3}} \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{ou} & x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a alors : $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{7}{3}} ; -\sqrt{\frac{7}{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$

$$\begin{aligned}
4 \quad \left(\frac{2x-1}{x-7} \right)^2 = 25 &\iff \begin{cases} \begin{cases} \frac{2x-1}{x-7} = 5 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} = -5 \end{cases} \\ x-7 \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \begin{cases} \frac{2x-1}{x-7} - 5 = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} + 5 = 0 \end{cases} \\ x \neq 7 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \begin{cases} \frac{2x-1}{x-7} - \frac{5(x-7)}{x-7} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} + \frac{5(x-7)}{x-7} = 0 \end{cases} \\ x \neq 7 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \begin{cases} \frac{2x-1}{x-7} - \frac{5x-35}{x-7} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1}{x-7} + \frac{5x-35}{x-7} = 0 \end{cases} \\ x \neq 7 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \begin{cases} \frac{2x-1-5x+35}{x-7} = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{2x-1+5x-35}{x-7} = 0 \end{cases} \\ x \neq 7 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2x-1}{x-7}\right)^2 = 25 \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x-1-5x+35=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1+5x-35=0 \\ x \neq 7 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} -3x+34=0 \\ \text{ou} \\ 7x-36=0 \\ x \neq 7 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} x=\frac{34}{3} \\ \text{ou} \\ x=\frac{36}{7} \\ x \neq 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{36}{7}; \frac{34}{3} \right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** a. Dans le triangle équilatéral ABC, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Dans le triangle NBM rectangle en M,

$$\tan \widehat{NBM} = \frac{NM}{BM}$$

donc :

$$\tan 60^\circ = \frac{NM}{x}.$$

On a donc :

$$MN = x \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$$

- b. Par symétrie, $BM = QC = x$ et $MH = HQ = 3 - x$.

Donc, $MQ = 2 \times (3 - x)$, soit $MQ = 6 - 2x$.

- 2** On veut que MNPQ soit un carré.

- a. La condition mène à l'égalité :

$$MQ = MN$$

c'est-à-dire, d'après la question 1 :

$$x\sqrt{3} = 6 - 2x$$

- b. Si $x\sqrt{3} = 6 - 2x$, alors $x\sqrt{3} + 2x = 6$.

Ainsi, $(\sqrt{3} + 2)x = 6$, soit :

$$x = \frac{6}{2 + \sqrt{3}}$$

N.B. On aurait pu mettre le résultat de sorte que le dénominateur ne comporte pas de radical, comme il est de coutume de faire :

$$\begin{aligned}\frac{6}{2+\sqrt{3}} &= \frac{6(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} \\ &= \frac{12-6\sqrt{3}}{4-3} \\ &= 12-6\sqrt{3}\end{aligned}$$

et on peut aussi s'assurer que $x < 3$ en trouvant une valeur approchée :

$$x \approx 1,6.$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Rappel. Dès lors que l'équation à résoudre est de la forme :

$$\sqrt{f(x)} = a,$$

où f est une fonction et a un nombre réel positif, il faut s'assurer avant tout que ce qu'il y a sous la racine carrée soit positif ou nul ; c'est la première condition.

Ensuite, on élève au carré chaque membre de l'équation pour résoudre l'équation :

$$f(x) = a^2.$$

$$\begin{aligned}1 \quad \sqrt{3x-2} = 7 &\iff \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 3x-2 = 7^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x \geq 2 \\ 3x = 49+2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x = \frac{51}{3} = 17 \end{cases}\end{aligned}$$

$17 \geq \frac{2}{3}$ donc l'ensemble solution de l'équation est : $\boxed{\mathcal{S} = \{17\}}$.

$$\begin{aligned}2 \quad \sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3 &\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ \frac{5x-4}{3x+1} = 9 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{5x-4}{3x+1} - 9 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{5x-4}{3x+1} - \frac{9(3x+1)}{3x+1} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{5x-4}{3x+1}} = 3 &\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{5x-4-27x-9}{3x+1} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ \frac{-22x-13}{3x+1} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ -22x-13 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{5x-4}{3x+1} \geq 0 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ x = -\frac{13}{22} \end{cases}
\end{aligned}$$

On calcule maintenant $\frac{5x-4}{3x+1}$ pour $x = -\frac{13}{22}$ afin de voir si cette solution est valable :

$$\frac{5x-4}{3x+1} = 9 > 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{13}{22}\right\}}$.

$$\begin{aligned}
\textbf{3} \quad \sqrt{x^2+x+1} = x+1 &\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+x+1 = (x+1)^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x^2+x+1 = x^2+2x+1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On vérifie que $x^2+x+1 \geq 0$ pour $x = 0$ (assez facilement) donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$.

$$\begin{aligned}
4 \quad x\sqrt{7} + \sqrt{2} &= \sqrt{7} - x\sqrt{2} \iff x\sqrt{7} + x\sqrt{2} = \sqrt{7} - \sqrt{2} \\
&\iff x(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} \\
&\iff x = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} \\
&\iff x = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} \\
&\iff x = \frac{(\sqrt{7})^2 - 2\sqrt{7} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} \\
&\iff x = \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{9 - 2\sqrt{14}}{5} \right\}.$

$$\begin{aligned}
5 \quad \sqrt{(x-2)(3x+4)} &= 2(3x+4) \iff \begin{cases} 2(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) = [2(3x+4)]^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) = 4(3x+4)^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3x \geq -4 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (x-2)(3x+4) - 4(3x+4)^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)[(x-2) - 4(3x+4)] = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)(x-2-12x-16) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ (3x+4)(-11x-18) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ \left(\begin{array}{l} 3x+4=0 \\ \text{ou} \\ -11x-18=0 \end{array} \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-2)(3x+4)} = 2(3x+4) \iff \begin{cases} x \geq -4/3 \\ (x-2)(3x+4) \geq 0 \\ \left(\begin{array}{l} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{18}{11} \end{array} \right. \end{cases}$$

On regarde maintenant si $(x-2)(3x+4) \geq 0$ pour $x = -\frac{4}{3}$ et pour $x = -\frac{18}{11}$.

Pour $x = -\frac{4}{3}$, on obtient 0, donc cette valeur convient.

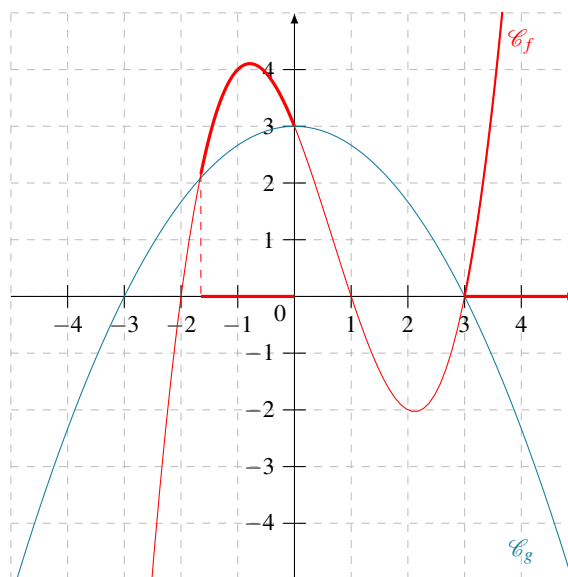
Pour $x = -\frac{18}{11}$, on obtient $\frac{400}{121} > -\frac{4}{3}$ donc cette valeur convient.

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{3}; -\frac{18}{11} \right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

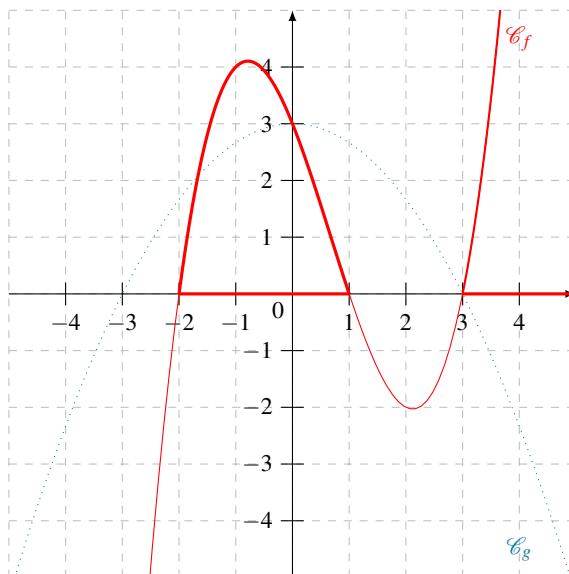
1 $f(x) > g(x)$: il faut regarder les portions de courbes de $\mathcal{C}_f$ qui sont au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.



Les intervalles de x qui correspondent à ces « morceaux » de courbes sont $] -1, 6; 0[$ et $] 3; 5]$ (les bornes ne sont pas incluses – sauf 5 – car l'inégalité doit être stricte : $f(x) > g(x)$). L'ensemble solution est donc :

$$\mathcal{S} =] -1, 6; 0[\cup] 3; 5]$$

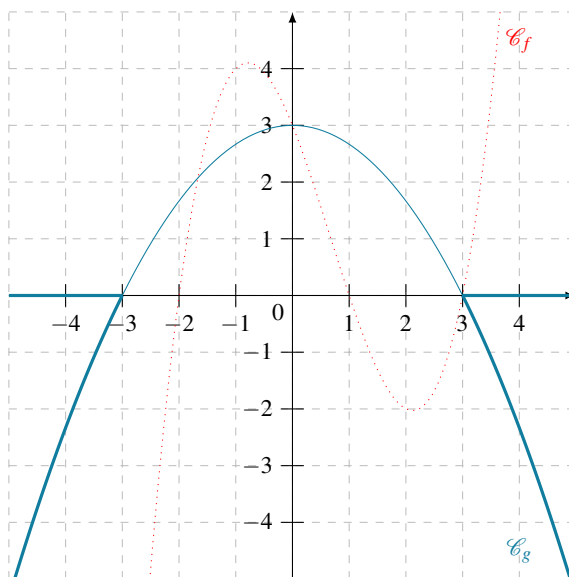
2 $f(x) \geq 0$. Il faut regarder les portions de la courbe $\mathcal{C}_f$ qui sont au-dessus de l'axe des abscisses.



L'ensemble solution est :

$$S = [-2; 1] \cup [3; 5]$$

3 $g(x) \leq 0$. Il faut regarder ici les morceaux de la courbe $\mathcal{C}_g$ sous l'axe des abscisses.



L'ensemble solution est :

$$S = [-5; -3] \cup [3; 5]$$

■ **Corrigé de l'exercice 6.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $(x-1)(x+2) \leq 0$.

Les valeurs de x qui annulent le produit $(x-1)(x+2)$ sont les solutions des équations $x-1=0$ et $x+2=0$, donc sont égales à $x=1$ et $x=-2$.

De plus, le coefficient de x dans chaque facteur est positif, donc pour chacun d'eux, le signe sera : $-0+$, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	
$(x-1)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $S = [-2; 1]$

2 $(3x-2)(5x-7) \geq 0$.

Les valeurs de x qui annulent le produit $(3x-2)(5x-7)$ sont les solutions des équations $3x-2=0$ et $5x-7=0$, donc sont égales à $x=\frac{2}{3}$ et $x=\frac{7}{5}$, où $\frac{2}{3} < \frac{7}{5}$.

De plus, le coefficient de x dans chaque facteur est positif, donc pour chacun d'eux, le signe sera : $-0+$, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$+\infty$	
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$	
$5x - 7$	$-$	$-$	0	$+$	
$(3x - 2)(5x - 7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $S = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{7}{5}; +\infty \right[$

3 $(5x-1)(-x+9)(2x+1) > 0$.

Les valeurs de x qui annulent le produit $(5x-1)(-x+9)(2x+1)$ sont les solutions des équations $5x-1=0$, $-x+9=0$ et $2x+1=0$, donc sont égales à $x = \frac{1}{5}$, $x=9$ et $x = -\frac{1}{2}$, où $-\frac{1}{2} < \frac{1}{5} < 9$.

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	9	$+\infty$			
$5x-1$		-	-	0	+	+		
$-x+9$		+	+	+	0	-		
$2x+1$		-	0	+	+	+		
Produit		+	0	-	0	+	0	-

Donc $S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{5}; 9[$

4 $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} < \frac{2x+6}{4x^2-1}$
 $\Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x+1)(2x-1)} < \frac{2x+6}{4x^2-1}$
 $\Leftrightarrow \frac{(2x+1-2x+1)(2x+1+2x-1) - 2x-6}{4x^2-1} < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{8x-2x-6}{(2x-1)(2x+1)} < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{6(x-1)}{(2x+1)(2x-1)} < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	—	—	—	0	+
$2x+1$	—	0	+	+	+
$2x-1$	—	—	0	+	+
Fraction	—	+	—	0	+

Donc $S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[$

5 $\frac{5x+4}{2x-3} + \frac{(8-x)(10x+8)}{(2x-3)^2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(5x+4)(2x-3) + 2(8-x)(5x+4)}{(2x-3)^2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(5x+4)(2x-3+16-2x)}{(2x-3)^2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{13(5x+4)}{(2x-3)^2} \leq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$5x+4$		$-$	0	$+$
$(2x-3)^2$		$+$	$+$	0
Fraction		$-$	0	$+$

Donc $S = \left] -\infty; -\frac{4}{5} \right]$

6
$$\frac{(4-3x)(9x^2-10x-3)}{2x-7} < 4-3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(9x^2-10x-3) - (4-3x)(2x-7)}{2x-7} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(9x^2-10x-3-2x+7)}{2x-7} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(9x^2-12x+4)}{2x-7} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4-3x)(3x-2)^2}{2x-7} < 0$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$4-3x$		$+$	$+$	0	$-$
$(3x-2)^2$		$+$	0	$+$	$+$
$2x-7$		$-$	$-$	$-$	0
Fraction		$-$	0	$-$	$+$

Donc $S = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right] \cup \left] \frac{4}{3}; \frac{7}{2} \right] \cup \left] \frac{7}{2}; +\infty \right[$

7
$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{x(x^2-1)}, x \neq 0, x \neq -1, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1) - x(x-1) - (x+1)(x-1) - 2}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \quad (\text{on aura remarqué que } (x^2-1) = (x-1)(x+1))$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - x^2 - 1}{x(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1) > 0, \text{ car } (x-1)^2 > 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Fraction	$-$	$+$	$-$	$+$	

Donc $S =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

8
$$\frac{1-2x}{16x^2-9} \geq \frac{1-2x}{4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2x) - (1-2x)(4x+3)}{16x^2-9} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2x)(1-4x+3)}{16x^2-9} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(1-2x)(1-x)}{(4x-3)(4x+3)} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$1-2x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$4x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$4x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
Fraction	$+$	$-$	0	$+$	$-$	0

Donc $S = \left] -\infty; -\frac{3}{4} \right[\cup \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right[\cup]1; +\infty[$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1
$$\begin{aligned} f(x) &= 100 \times 60 - (100 - 2x)(60 - 2x) \\ &= 6000 - 6000 + 200x + 120x - 4x^2 \\ &= -4x^2 + 320x \end{aligned}$$

$$f(x) = -4x(x - 80)$$

2 On a :
$$\begin{aligned} -4(x-40)^2 + 6400 &= -4(x^2 - 80x + 1600) + 6400 \\ &= -4x^2 + 320x - 6400 + 6400 \\ &= -4x^2 + 320x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3 \quad f(x) \leq 1500 &\iff -4(x-40)^2 + 6400 \leq 1500 \\
&\iff -4(x-40)^2 + 6400 - 1500 \leq 0 \\
&\iff 4900 - 4(x-40)^2 \leq 0 \\
&\iff 70^2 - [2(x-40)]^2 \leq 0 \\
&\iff [70 - 2(x-40)][70 + 2(x-40)] \leq 0 \\
&\iff (70 - 2x + 80)(70 + 2x - 80) \leq 0 \\
&\iff (150 - 2x)(2x - 10) \leq 0 \\
&\iff 2(75 - x) \times 2(x - 5) \leq 0 \\
&\iff (75 - x)(x - 5) \leq 0
\end{aligned}$$

4 Dressons le tableau de signes du produit $(75 - x)(x - 5)$ sur $[0; 30]$ (car x ne peut pas dépasser 30 mètres, soit la moitié de la largeur du rectangle extérieur) :

x	0	5	30
$75 - x$	+		+
$x - 5$	-	0	+
$(75 - x)(x - 5)$	-	0	+

Ainsi, l'aire jaune est inférieure à $1\,500 \text{ m}^2$ pour $0 \leq x \leq 5$.

Fonctions : généralités

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

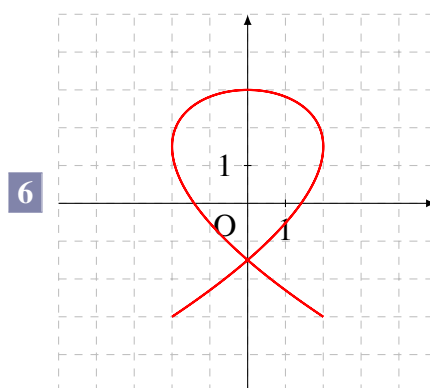
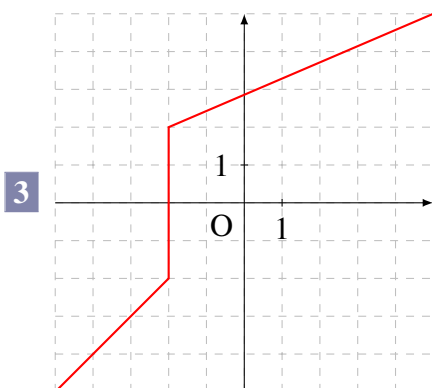
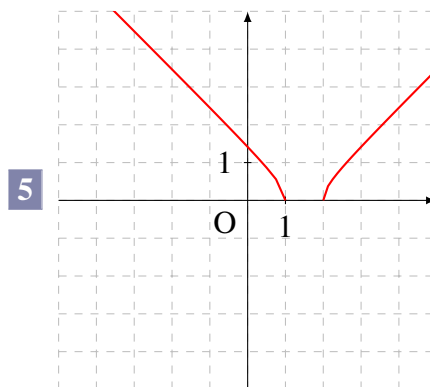
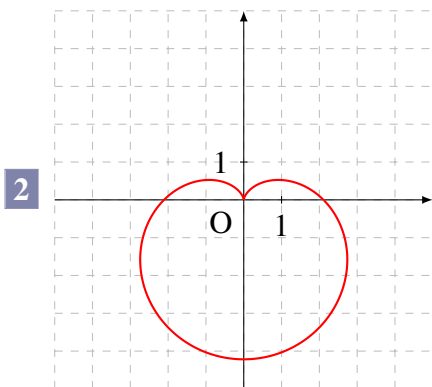
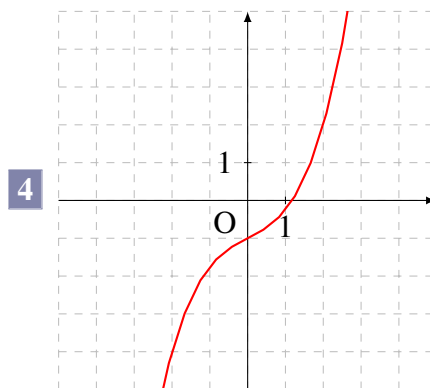
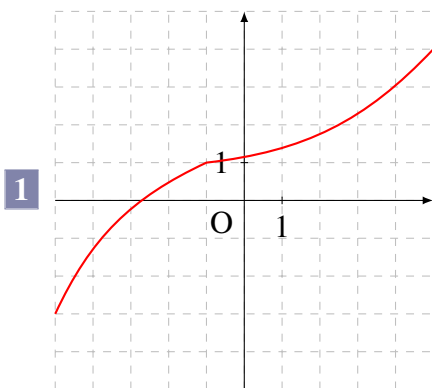
■ Exercice 1. Reconnaître la courbe représentative d'une fonction

★★★★★

A

Corrigé page 72 ✌

Pour chaque courbe dessinée ci-dessous, dire si elle représente une fonction en justifiant.



■ Exercice 2. Tableau de valeurs à la calculatrice

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 72

À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de valeurs donné pour chaque fonction.

1 $f(x) = x^2 - 3x + 6.$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

2 $g(x) = \frac{1}{x-3}.$

x	-1	0	1	2	2,25	2,5	2,75	3,25	3,5	3,75	4	5	6
$g(x)$													

3 $h(x) = \sqrt{4-x^2}.$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$									

■ Exercice 3. Appartenance de points à une courbe

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 73

Soit f une fonction et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si le point A (dont les coordonnées sont données à chaque fois) appartient ou non à $\mathcal{C}_f$.

1 $f(x) = -5x + 2, A(-1; 7).$

2 $f(x) = x^2 + x + 1, A(-2; 3).$

3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, A(2; 0,25).$

4 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, A(\sqrt{2}; \sqrt{3}).$

■ Exercice 4. Images et antécédents

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 74

1 Soit $f(x) = -3x + 2.$

- Donner l'image des nombres $-1, 0$ et $\sqrt{2}$ par la fonction f .
- -1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?
- Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f .

2 Soit $g(x) = x^2 - 5x + 2.$

- Donner l'image des nombres $-1, 1$ et $\sqrt{2}$ par la fonction g .
- -2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?
- Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g .

Tableau de variations

■ Exercice 5. Construction d'un tableau de variations

★★★★☆

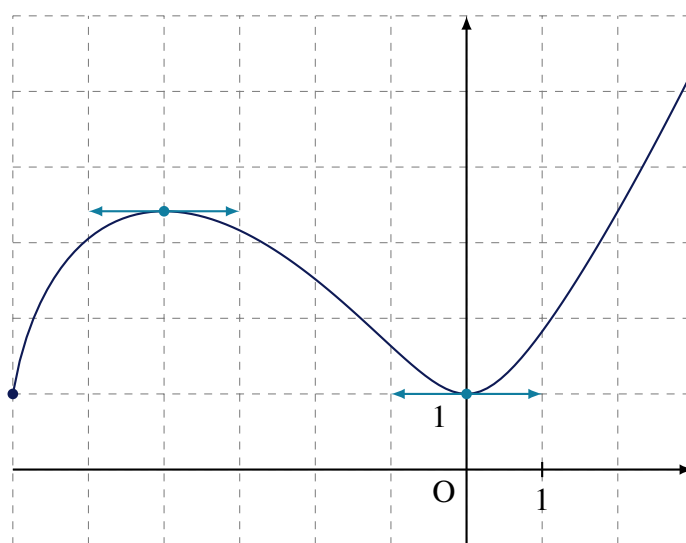
A

Corrigé page 75

On considère la fonction f définie sur $[-6; 3]$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est la suivante :



Construire le tableau de variations de f sur $[-6; 3]$ en précisant les valeurs des extrema locaux (maximum et minimum dans cet intervalle).

■ Exercice 6. Construction d'un tableau de variations avec valeur interdite

★★★★☆

A

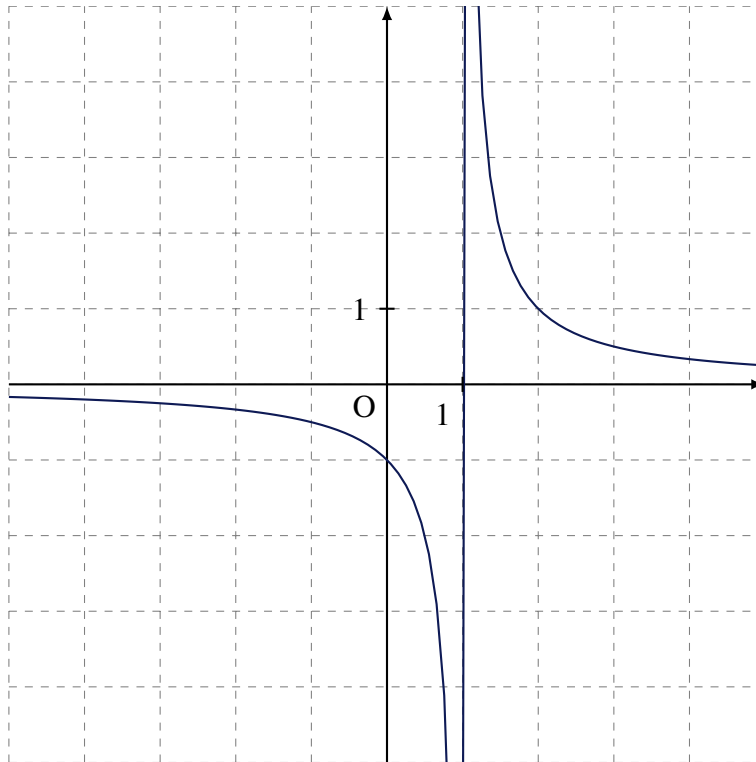
Corrigé page 75

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

dont la courbe représentative dans un repère orthonormé (dessinée à l'aide d'un logiciel de tracé de courbes) est donnée page suivante.

Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.



■ Exercice 7. Lecture d'un tableau de variations

★★★★☆ A

Corrigé page 75

On considère la fonction f définie sur $[-6; 5]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-6	-3	0	1	5
$f(x)$	2	5	-3	0	-4

- 1 Quel est le maximum de la fonction f sur $[-6; 5]$?
- 2 Quel est le minimum de la fonction f sur $[-6; 5]$?
- 3 Comparer $f(-5)$ et $f(-4)$. Justifier.
- 4 Peut-on comparer $f(-5)$ et $f(3)$? Justifier.
- 5 Peut-on comparer $f(-1)$ et $f(4)$? Justifier.

Lectures graphiques

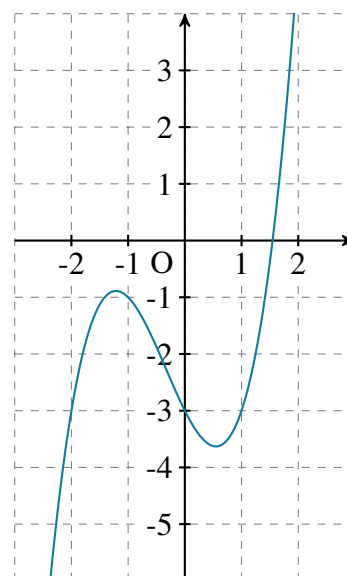
■ Exercice 8. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

★★★★☆

A

Corrigé page 76

On considère la fonction f définie sur $[-3; 3]$ représentée par la courbe ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

- 1 Résoudre l'équation : $f(x) = 0$ sur $[-3; 3]$.
- 2 Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq -3$ sur $[-3; 3]$.
- 3 Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$ sur $[-3; 3]$.

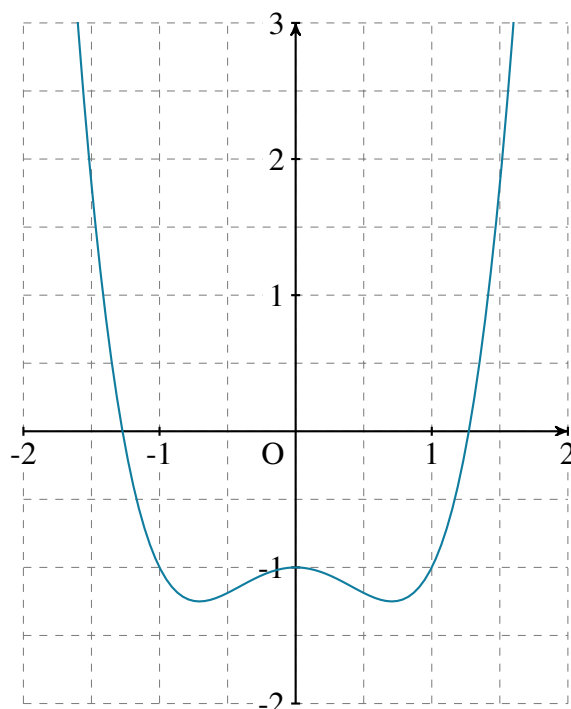
■ Exercice 9. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

★★★★☆

A

Corrigé page 77

On considère la fonction f définie sur $[-2; 2]$ représentée par la courbe ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

- 1 Résoudre l'équation : $f(x) = -1$ sur $[-2; 2]$.
- 2 Résoudre l'inéquation : $f(x) \geq -1$ sur $[-2; 2]$.
- 3 Résoudre l'inéquation : $f(x) < -2$ sur $[-2; 2]$.

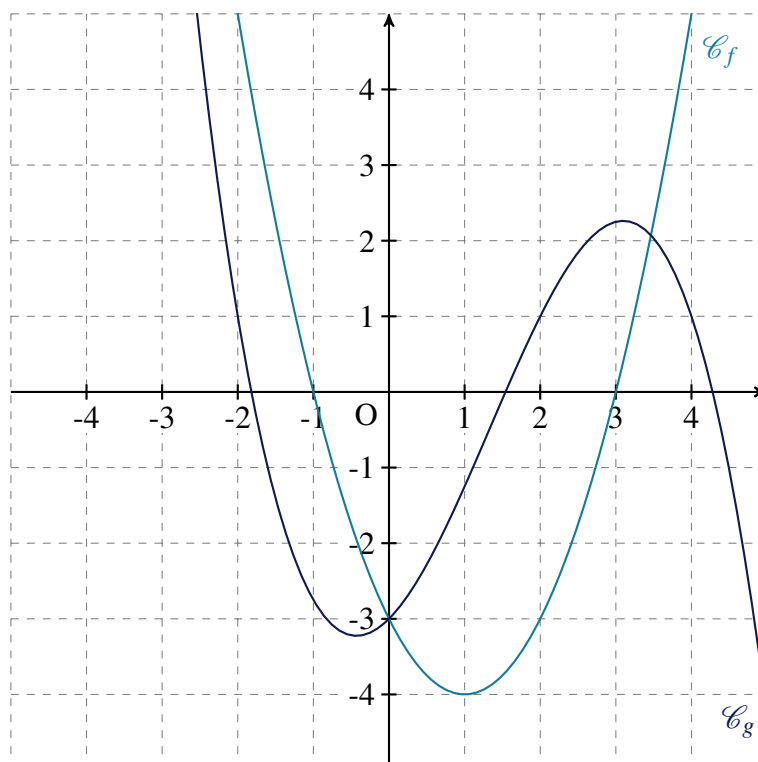
■ Exercice 10. Dédution par lecture graphique

★★★★☆

A

Corrigé page 77

On considère deux fonctions f et g définies sur $[-5; 5]$ dont les courbes représentatives sont dessinées ci-dessous :



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

- 1 Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$ sur $[-5; 5]$.
- 2 Résoudre l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ sur $[-5; 5]$.
- 3 Combien l'équation $g(x) = 3$ possède-t-elle de solution(s) ?
- 4 Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[-5; 5]$.
- 5 Dresser un tableau de signes de la fonction g sur $[-5; 5]$.

Établir l'expression d'une fonction

■ Exercice 11. Établir une expression d'une fonction

★★★★☆ (R)

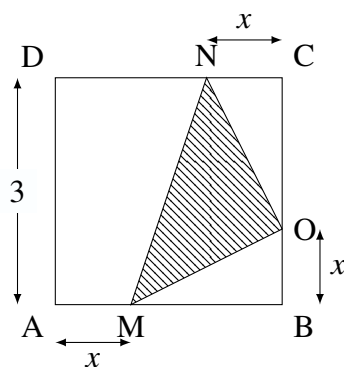
Corrigé page 79

Pour chacune des questions suivantes, exprimer $f(x)$ sous sa forme la plus simple, puis donner son domaine de définition.

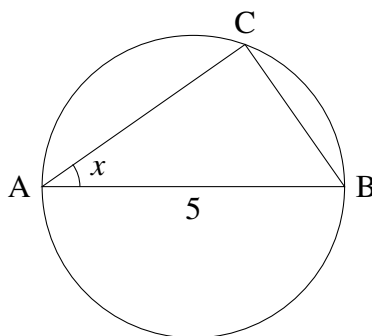
- 1 Un complexe sportif est composé de plusieurs activités. Pour pouvoir y avoir accès, on doit payer un droit d'entrée de 5 € puis payer 2 € par heure.

$f(x)$ représente le prix à payer pour x heures.

- 2 $f(x)$ représente l'aire hachurée dans le carré ABCD suivant :

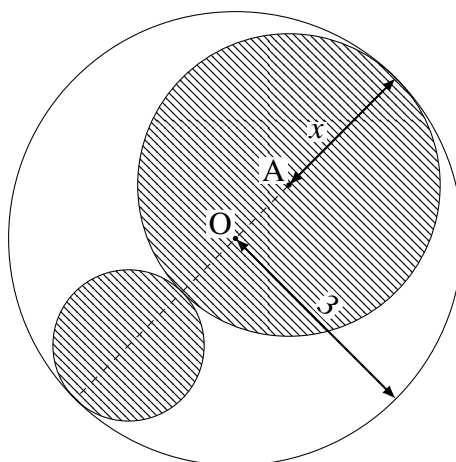


- 3 $f(x)$ représente l'aire du triangle ABC inscrit dans le cercle de diamètre [AB] :



- 4 On choisit un nombre x . $f(x)$ représente alors la différence entre le carré de son précédent et celui de son suivant.

- 5 $f(x)$ représente l'aire du domaine blanc de la figure suivante, où O est le centre du cercle de rayon 3 et A le centre du cercle de rayon x :



■ Exercice 12. Triangle équilatéral



R

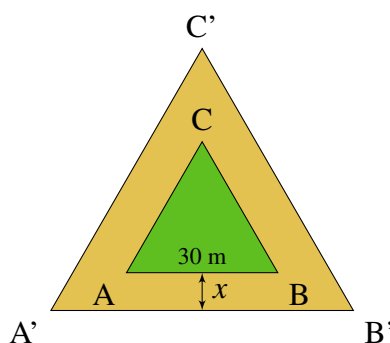
Corrigé page 80

Le jardin ABC est un triangle équilatéral de côté 30 mètres, entouré d'une allée de largeur x mètres (représentée en jaune ci-contre). Le triangle $A'B'C'$ est lui aussi équilatéral.

On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'allée est égale à celle du jardin.

On admettra les valeurs suivantes :

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



- 1
 - a. On note h la hauteur de ABC. Montrer que $h = 15\sqrt{3}$ mètres.
 - b. Montrer alors que l'aire de ABC est : $\mathcal{A} = 225\sqrt{3} \text{ m}^2$.
- 2
 - a. En considérant le point P de $[A'B']$ de sorte que $A'AP$ soit un triangle rectangle d'hypoténuse AA' , montrer que $A'B' = 30 + 2x\sqrt{3}$.
 - b. En déduire que l'aire de $A'B'C'$ est : $\mathcal{A}' = (15 + x\sqrt{3})^2\sqrt{3}$.
- 3
 - a. Montrer que chercher x pour que l'aire de l'allée soit égale à celle du jardin revient à résoudre l'équation $\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$.
 - b. Trouver alors la valeur exacte, puis approchée, de x .

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La courbe représente bien une fonction malgré la singularité au point d'abscisse -1 (regardez bien ce qui se passe au point de coordonnées $(-1; 1)$: la courbe se « brise » mais ce n'est pas vraiment grave...). En effet, chaque valeur de x dans $[-5; 5]$ n'admet qu'une image $f(x)$: si on prend une valeur de x quelconque dans $[-5; 5]$, on ne peut trouver qu'un seul point de la courbe qui a pour abscisse x .
- 2 La courbe ne représente pas une fonction car il existe au moins un x pour lequel deux images par f existent. Par exemple, pour $x = 1$, les points de coordonnées $(1; 0,5)$ et $(1; -4)$ sont sur cette courbe.
- 3 Cette courbe ne représente pas une fonction car on voit qu'il existe plusieurs points de cette courbe dont l'abscisse vaut -2 .
- 4 La courbe représente bien une fonction car sur $[-5; 5]$, chaque valeur de x admet une unique image.
- 5 Cette courbe représente bien une fonction malgré le fait qu'elle possède un « trou » sur $[1; 2]$. En effet, chaque valeur de x dans $[-5; 1]$ possède une unique image et il en est de même pour chaque valeur de x dans $[2; 5]$.
- 6 Cette courbe n'est pas représentative d'une fonction car il existe au moins une valeur de x qui possède deux images. Par exemple, pour $x = 0$, il y a deux images : 3 et $-1,5$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Sur CASIO, appuyer sur la touche [MENU], puis appuyer sur la touche [7] (ou sélectionner [TABLE]). Ensuite, entrer l'expression de chaque fonction en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche $[X, t, \theta, n]$ est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [EXE].

Pour construire le tableau de valeurs d'une fonction, positionnez-vous sur la ligne correspondant à la fonction souhaitée, puis appuyer sur la touche [F5] (SET) pour paramétrer la valeur initiale et la valeur finale de x , en précisant le pas (Step).

Sur TI, appuyer sur la touche $[f(x)]$ pour rentrer l'expression des fonctions en Y1, Y2 et Y3. Noter que la touche $[X, t, \theta, n]$ est à utiliser pour la variable X. Valider en appuyant sur la touche [ENTRER]. Pour paramétrer le tableau de valeurs, appuyer sur [2nd]+[F4] (afin de sélectionner "TblSet").

1 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -5
- End : 5
- Step : 1

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -5
- Δtbl : 1

On obtient :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	46	34	24	16	10	6	4	4	6	10	16

2 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -1
- End : 6
- Step : 0.25

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -1
- Δtbl : 0.25

On obtient :

x	-1	0	1	2	$2,25$	$2,5$	$2,75$	$3,25$	$3,5$	$3,75$	4	5	6
$g(x)$	$-0,25$	$-0,333$	$-0,5$	-1	$-1,333$	-2	-4	4	2	$1,333$	1	$0,5$	$0,333$

3 Ici, pour la **CASIO**, on entrera :

- Start : -2
- End : 2
- Step : 0.5

Pour la **T.I.**, on entrera :

- TblStart : -2
- Δtbl : 0.5

On obtient :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$h(x)$	0	$1,323$	$1,732$	$1,936$	2	$1,936$	$1,732$	$1,323$	0

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = -5x + 2$, $A(-1; 7)$.

$$f(-1) = -5 \times (-1) + 2 = 5 + 2 = 7 = y_A. \text{ Donc } A \in \mathcal{C}_f.$$

2 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A(-2; 3)$.

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 2 + 1 = 3 = y_A \text{ donc } A \in \mathcal{C}_f.$$

3 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $A(2; 0,25)$.

$$f(2) = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{4 + 1} = \frac{1}{5} = 0,2 \neq y_A. \text{ Donc } A \notin \mathcal{C}_f.$$

4 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $A(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} = y_A \text{ donc } A \in \mathcal{C}_f.$$

1 Soit $f(x) = -3x + 2$.

a. Donner l'image des nombres -1 , 0 et $\sqrt{2}$ par la fonction f .

$$\begin{aligned} f(-1) &= -3 \times (-1) + 2 = 5 & ; & & f(0) &= -3 \times 0 + 2 = 2 & ; \\ f(\sqrt{2}) &= -3\sqrt{2} + 2. \end{aligned}$$

b. -1 est-il un antécédent de 1 par la fonction f ?

$f(-1) = -3 \times (-1) + 2 = 3 + 2 = 5 \neq 1$ donc -1 n'est pas un antécédent de 1 par la fonction f .

c. Trouver tous les antécédents de -3 par la fonction f .

Rechercher les antécédents de -3 par f revient à trouver toutes les valeurs de x telles que $f(x) = -3$. Il faut donc résoudre cette équation.

$$\begin{aligned} f(x) = -3 &\iff -3x + 2 = -3 \\ &\iff -3x = -5 \\ &\iff x = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, le seul antécédent de -3 par f est $\frac{5}{3}$.

2 $g(x) = x^2 - 5x + 2$.

a. Donner l'image des nombres -1 , 1 et $\sqrt{2}$ par la fonction g .

$$\begin{aligned} g(-1) &= (-1)^2 - 5(-1) + 2 = 8 & ; & & g(1) &= 1^2 - 5 \times 1 + 2 = -2 & ; \\ g(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}^2 - 5\sqrt{2} + 2 = 4 - 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

b. -2 est-il un antécédent de 1 par la fonction g ?

$g(-2) = (-2)^2 - 5(-2) + 2 = 4 + 10 + 2 = 16 \neq 1$ donc -2 n'est pas un antécédent de 1 par g .

c. Donner tous les antécédents de 2 par la fonction g .

$$\begin{aligned} g(x) = 2 &\iff x^2 - 5x + 2 = 2 \\ &\iff x^2 - 5x = 0 \\ &\iff x(x - 5) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 5. \end{aligned}$$

Les antécédents de 2 par g sont donc 0 et 5 .

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Avant de construire le tableau de variations de f , calculons la valeur des extremas locaux :

- il y a un maximum local pour $x = -4$, et :

$$f(-4) = \sqrt{\frac{1}{3} \times (-4)^3 + 2 \times (-4)^2 + 1} = \sqrt{-\frac{64}{3} + 32 + 1} = \sqrt{\frac{35}{3}}.$$

- il y a un minimum local pour $x = 0$ et $f(0) = 1$.
- $f(-6) = 1$.
- $f(3) = 2\sqrt{7}$.

Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	-6	-4	0	3
$f(x)$	1	$\sqrt{\frac{35}{3}}$	1	$2\sqrt{7}$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Avant de construire le tableau de variations de f , remarquons qu'il a été tracée une droite verticale en $x = 1$. Cette droite ne fait pas partie de la courbe mais a été tracée par le logiciel automatiquement pour signifier qu'en $x = 1$, il y a une valeur interdite. En effet, l'expression de la fonction montre que l'on divise par $x - 1$ et que ce n'est pas possible de le faire quand $x - 1 = 0$, soit quand $x = 1$.

De plus, il semblerait que la courbe se rapproche de l'axe des abscisses aux infinis, donc que $f(x)$ se rapproche de 0 aux infinis.

Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	0

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le maximum de la fonction f sur $[-6; 5]$ est 5 ; il est atteint pour $x = -3$.
- 2 Le minimum de la fonction f sur $[-6; 5]$ est -4 ; il est atteint pour $x = 5$.
- 3 $-6 < -5 < -4 < -3$. De plus, sur $[-6; -3]$, f est strictement croissante donc $f(-6) < f(-5) < f(-4) < f(-3)$ (les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents quand la fonction est strictement croissante).

Ainsi, $f(-5) < f(-4)$.

- 4 $-6 < -5 < -3$ et f est strictement croissante sur $[-6; -3]$ donc $f(-6) < f(-5) < f(-3)$, soit $2 < f(-5) < 5$.

De plus, $1 < 3 < 5$ et f est strictement décroissante sur $[1; 5]$ donc $f(1) > f(3) > f(5)$, soit $0 > f(3) > -4$, que l'on peut aussi écrire : $- < f(3) < 0$.

Donc $f(3)$ est négatif et $f(-5)$ est positif.

Ainsi, $f(-5) > f(3)$.

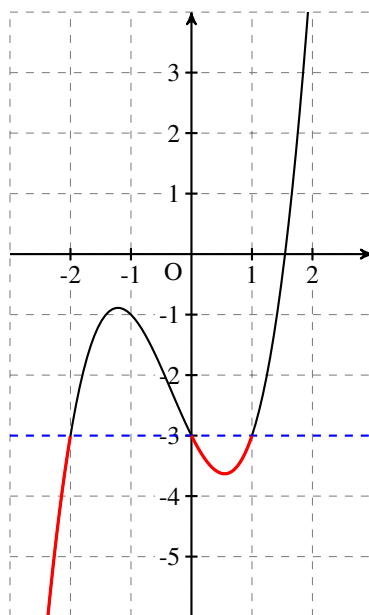
- 5 De la même manière, $-3 < f(-1) < 5$ et $-4 < f(4) < 0$. On ne peut donc pas comparer $f(-1)$ et $f(4)$ car les intervalles sur lesquels ils sont (à savoir $]-3; 5[$ et $]-4; 0[$) ne sont pas disjoints, c'est-à-dire que leur réunion n'est pas vide.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

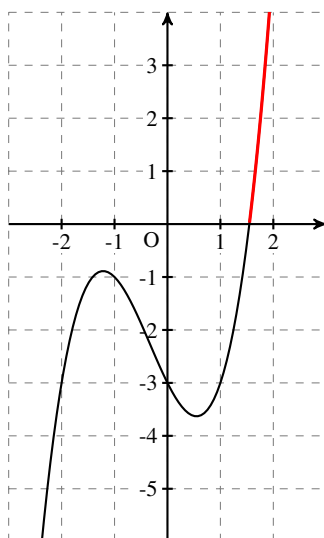
- 1 $f(x) = 0$ admet pour ensemble solution : $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ car la courbe semble couper l'axe des abscisses en $x = 1,5 = \frac{3}{2}$.

- 2 Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq -3$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont sous la droite horizontale passant par $y = -3$, donc sur les parties en rouge ci-dessous :



Ces parties sont sur les intervalles $[-3; -2]$ et $[0; 1]$ donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq -3$ est : $S = [-3; -2] \cup [0; 1]$.

- 3 Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles les points de la courbe d'abscisse x sont au-dessus de l'axe des abscisses, donc sur la branche violette ci-dessous :



Donc l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[-3; 3]$ est : $S = \left] \frac{3}{2}; 3 \right]$.

■ Corrigé de l'exercice 9.

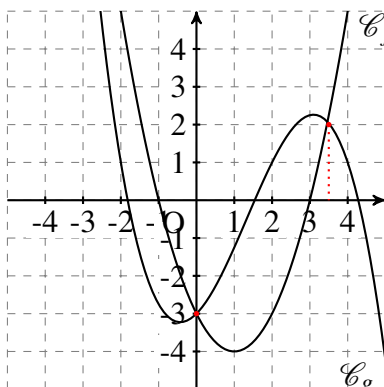
[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 L'équation $f(x) = -1$ admet pour ensemble solution : $S = \{-1; 0; 1\}$ car la droite horizontale passant par $y = -1$ coupe la courbe en 3 points d'abscisses respectives -1 , 0 et 1 .
- 2 L'inéquation : $f(x) \geq -1$ admet pour ensemble solution : $S = [-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; 2]$ car les parties de la courbe se trouvant au-dessus de la droite horizontale passant par $y = -1$ (ou sur cette droite) se trouvent respectivement sur $[-2; -1]$, $[1; 2]$ et au point d'abscisse 0 .
- 3 L'inéquation $f(x) < -2$ admet pour ensemble solution $S = \emptyset$ car la courbe n'est jamais sous de la droite horizontale passant par $y = -2$.

■ Corrigé de l'exercice 10.

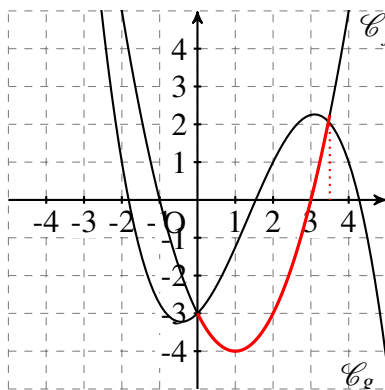
[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Il y a deux points d'intersection (en rouge ci-dessous) :



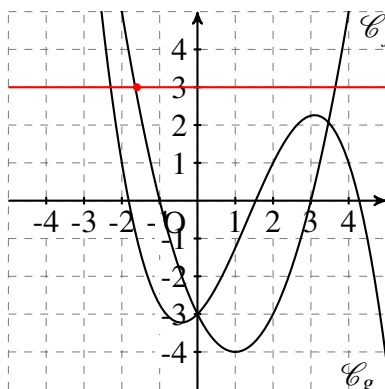
Les solutions à l'équation $f(x) = g(x)$ sont donc $x = 0$ et $x = 3$.

- 2 Repassons en rouge la partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ sous $\mathcal{C}_g$:



La partie repassée en rouge correspond aux images des x compris entre 0 à 3,5.
Donc, l'inéquation a pour solution l'intervalle $[0; 3,5]$.

- 3 Pour savoir combien l'équation $f(x) = 3$ admet de solution(s), on regarde combien il y a de points d'intersection entre la droite d'équation $y = 3$ et $\mathcal{C}_f$:



Il n'y a qu'un seul point d'intersection donc il n'y a qu'une solution à l'équation $f(x) = 3$.

- 4 Le tableau de variations de la fonction g est :

x	-5	-0,5	3,1	5
$g(x)$		↘ -3,2	↗ 2,2	↘ -4,2

- 5 Le tableau de signes de la fonction g est :

x	-5	-1,9	1,5	4,4	5
$g(x)$	+	0	-	0	-

Remarque : les valeurs mises pour les deux dernières réponses sont approximatives.

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = 5 + 2x$. Son domaine de définition est $[0; +\infty[$ car x ne peut pas être négatif (vu que x représente un nombre d'heures).

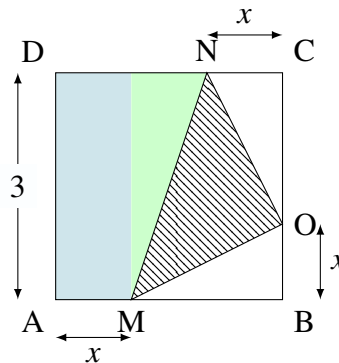
2 • L'aire du carré ABCD est : 9.

• L'aire des triangles MBO et NCO est : $\frac{x(3-x)}{2}$.

• L'aire du trapèze AMND est la somme des aires des figures violette et verte :

$$3x + \frac{3(3-2x)}{2} = \frac{6x + 9 - 6x}{2} = \frac{9}{2}$$

(soit la moitié de l'aire du carré ABCD... coïncidence ? Je ne crois pas...)



L'aire du triangle MON est donc :

$$f(x) = 9 - \frac{9}{2} - 2 \times \frac{x(3-x)}{2} = \frac{9}{2} - x(3-x) = x^2 - 3x + \frac{9}{2}.$$

Son domaine de définition est $[0; 3]$ car x ne peut pas être négatif ni plus grand que la mesure d'un côté de ABCD.

3 Le triangle ABC est rectangle en C donc :

$$\cos x = \frac{AC}{5} \quad ; \quad \sin x = \frac{BC}{5}$$

donc $AC = 5 \cos x$ et $BC = 5 \sin x$.

L'aire de ABC est donc $f(x) = \frac{AC \times BC}{2} = \frac{25}{2} \sin x \cos x$.

x étant un angle aigu, le domaine de définition de f est $[0; 90[$, si x est exprimé en degrés.

4 Le carré du précédent de x est $(x-1)^2$.

Le carré du suivant de x est $(x+1)^2$.

Ainsi, $f(x) = (x-1)^2 - (x+1)^2 = -4x$. C'est une fonction linéaire dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

5 L'aire du disque de rayon 3 est : 9π (formule : $\pi \times r^2$).

L'aire du disque de rayon x est : πx^2 .

L'aire du « petit disque » est : $(3-x)^2 \pi$.

Ainsi, l'aire blanche est :

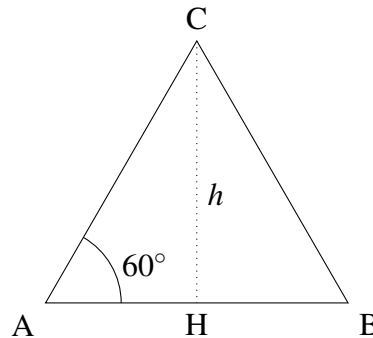
$$\begin{aligned} 9\pi - \pi x^2 - (3-x)^2\pi &= [9 - x^2 - (9 - 6x + x^2)]\pi \\ &= (6x - 2x^2)\pi \\ \boxed{f(x) = 2x(3-x)\pi} \end{aligned}$$

Le domaine de définition de f est $[0; 3]$.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 a. Nous avons le schéma suivant :



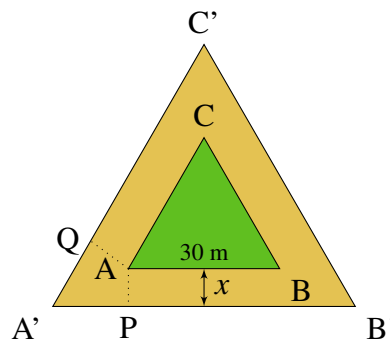
Dans le triangle ACH rectangle en H :

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{AC} \quad \text{donc} \quad h = AC \sin 60^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

b. L'aire d'un triangle est donnée par la formule : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ donc l'aire de ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times h}{2} = \frac{30 \times 15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = 225\sqrt{3} \text{ m}^2}$$

2 a. Considérons les points P et Q comme indiqués ci-dessous, de sorte que AA'P et AA'Q soient rectangles respectivement en P et Q :



$$\left. \begin{array}{l} AP = AQ \\ (AP) \perp (A'B') \text{ et } (AQ) \perp (A'C') \end{array} \right\} \Rightarrow (A'A) \text{ est la bissectrice de } \widehat{B'A'C'}.$$

Ainsi, $\widehat{B'A'A} = 30^\circ$. Dans le triangle A'AP, rectangle en P, on a donc :

$$\tan \widehat{PA'A} = \frac{AP}{A'P} \Rightarrow A'P = \frac{AP}{\tan 30^\circ} \Rightarrow A'P = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow A'P = x\sqrt{3}.$$

Pour des raisons de symétrie de la figure, on a : $A'B' = 2A'P + AB$, soit $\underline{A'B' = 30 + 2x\sqrt{30}}$.

b. D'après ce qui a été fait dans la question 1 b., l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= (A'B')^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= (30 + 2x\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \left[2(15 + x\sqrt{3})\right]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \boxed{\mathcal{A}' &= (15 + x\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}\end{aligned}$$

3 a. L'aire de l'allée ($\mathcal{A}' - \mathcal{A}$) est égale à celle du jardin ($\mathcal{A}$) donc $\mathcal{A}' - \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

En ajoutant $\mathcal{A}$ à droite et à gauche du signe « = », on arrive à l'équation : $\mathcal{A}' = 2\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}b. \mathcal{A}' &= 2\mathcal{A} \iff (15 + x\sqrt{3})^2 \sqrt{3} = 450\sqrt{3} \\ &\iff (15 + x\sqrt{3})^2 = 450 \\ &\iff 15 + x\sqrt{3} = \sqrt{450} \quad (\text{car } 15 + x\sqrt{3} > 0) \\ &\iff x\sqrt{3} = \sqrt{450} - 15 \\ &\iff x = \frac{\sqrt{450} - 15}{\sqrt{3}} \\ &\iff x = \frac{15\sqrt{2} - 15}{\sqrt{3}} \\ &\iff x = \frac{15(\sqrt{2} - 1)\sqrt{3}}{3} \\ &\iff \boxed{x = 5\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)}\end{aligned}$$

Équation de droites

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

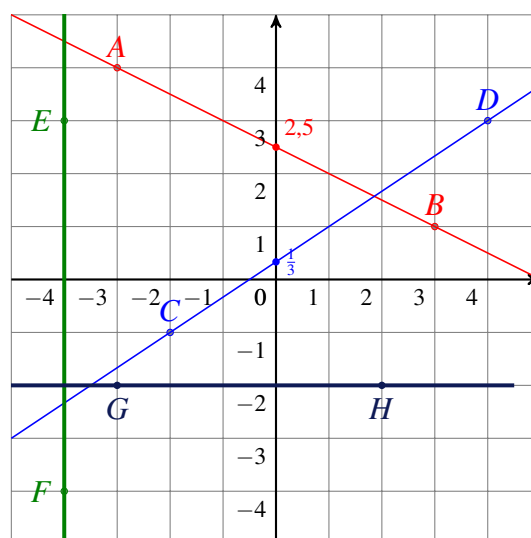
■ Exercice 1. À partir d'un graphique

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 85 ✌

Donner l'équation réduite de chacune des droites représentées dans le repère suivant en lisant directement sur le graphique le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.



■ Exercice 2. À partir des coordonnées de points

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 85 ✌

Pour chaque question, déterminer l'équation de la droite (AB).

1 $A(-1; 2)$ et $B(3; -1)$

2 $A(2; -2)$ et $B(-3; 4)$

3 $A(-1; -2)$ et $B(3; -1)$

■ Exercice 3. Appartenance de points à une droite

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 86 ✌

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -2x + 3$. Les points suivants appartiennent-ils à $\mathcal{D}$?

1 $A(1; -1)$

2 $B(-1; 5)$

3 $C\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

4 $D\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$

■ Exercice 4. Intersection de deux droites – Vecteur directeur

★★★★☆

A

Corrigé page 87

1 Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ -x + 5y - 11 = 0 \end{cases}$$

2 Soient $(\mathcal{D}_1)$ d'équation $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ et $(\mathcal{D}_2)$ d'équation $y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$ deux droites du plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Donner un vecteur directeur de ces deux droites.

Ces deux droites sont-elles parallèles ? Justifier.

b. Donner les coordonnées de leur point d'intersection.

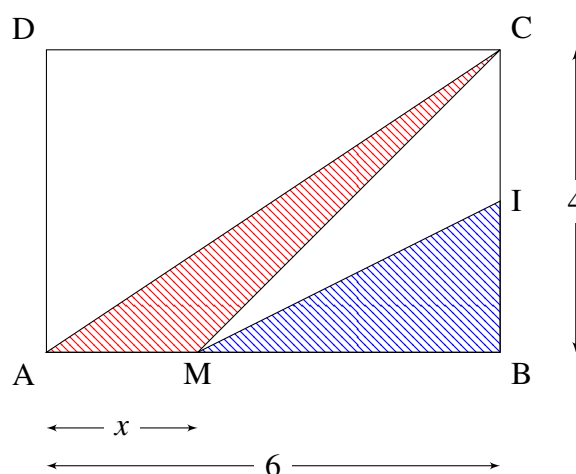
■ Exercice 5. Une histoire d'aire

★★★★☆

R

Corrigé page 88

On considère la figure suivante :



ABCD est un rectangle. I est le milieu de [BC] et M est un point mobile sur [AB]. On note $AM = x$.

1 Exprimer en fonction de x l'aire $f(x)$ du triangle AMC.

La fonction f est-elle affine ? Linéaire ?

2 Exprimer en fonction de x l'aire $g(x)$ du triangle MIB.

La fonction g est-elle affine ? Linéaire ?

3 Représenter sur un graphique les fonctions f et g . Pour quelle position de M les deux aires sont-elles égales ?

■ Exercice 6. Les taxis



Corrigé page 88

Hugo et Noémie doivent se retrouver au zoo.

Hugo part de chez lui en taxi qui prend 5 € de prise en charge et 0,40 € par kilomètres parcourus.

Noémie part de chez elle en location particulière de véhicule qui lui coûte 0,60 € par kilomètres parcourus.

En se retrouvant devant le zoo, ils constatent qu'ils ont payé la même somme d'argent pour le taxi.

L'objectif de cet exercice est de trouver la distance qui sépare leurs domiciles du zoo.

- 1 On note $f(x)$ la somme versée par Hugo, où x est le nombre de kilomètres parcourus.
Donner une expression de $f(x)$.
- 2 On note $g(x)$ la somme versée par Noémie, où x est le nombre de kilomètres parcourus.
Donner une expression de $g(x)$.
- 3 Quelle est alors la distance cherchée ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

L'ordonnée à l'origine est $2,5 = \frac{5}{2}$.

Donc (AB) : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

- 2 Le coefficient directeur de (CD) est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

L'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{3}$.

Donc (CD) : $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

- 3 La droite (EF) est verticale donc son équation est $x = -4$ (car l'abscisse de E et F est -4).

- 4 La droite (GH) est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0. Donc son équation est $y = -2$ (car l'ordonnée de G et H est -2).

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le coefficient directeur de (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{3 - (-1)} = \frac{-3}{4}$$

Donc (AB) : $y = -\frac{3}{4}x + b$.

De plus, $A \in (AB)$ donc :

$$y_A = -\frac{3}{4}x_A + b$$

$$\Leftrightarrow 2 = -\frac{3}{4} \times (-1) + b$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{4} = b$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Donc :

$$(AB) : y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

2 Le coefficient directeur de (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-2)}{-3 - 2} = \frac{6}{-5}$$

Donc (AB) : $y = -\frac{6}{5}x + b$.

De plus, $A \in (AB)$ donc :

$$\begin{aligned}y_A &= -\frac{6}{5}x_A + b \\ \Leftrightarrow -2 &= -\frac{6}{5} \times 2 + b \\ \Leftrightarrow -2 + \frac{12}{5} &= b \\ \Leftrightarrow b &= -\frac{10}{5} + \frac{12}{5} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Donc :

$(AB) : y = -\frac{6}{5}x + \frac{2}{5}$

3 Le coefficient directeur de (AB) est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

Donc (AB) : $y = \frac{1}{4}x + b$.

De plus, $A \in (AB)$ donc :

$$\begin{aligned}y_A &= \frac{1}{4}x_A + b \\ \Leftrightarrow -2 &= \frac{1}{4} \times (-1) + b \\ \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{4} &= b \\ \Leftrightarrow b &= -\frac{8}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}\end{aligned}$$

Donc :

$(AB) : y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $A \in \mathcal{D}$ si $y_A = -2x_A + 3$.
Or, $-2x_A + 3 = -2 \times 1 + 3 = -2 + 3 = 1 \neq y_A$.
Donc $A \notin \mathcal{D}$.

2 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $B \in \mathcal{D}$ si $y_B = -2x_B + 3$.
Or, $-2x_B + 3 = -2 \times (-1) + 3 = 2 + 3 = 5 = y_B$.
Donc $B \in \mathcal{D}$.

3 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $C \in \mathcal{D}$ si $y_C = -2x_C + 3$.
 Or, $-2x_C + 3 = -2 \times \frac{1}{2} + 3 = -1 + 3 = 2 = y_C$.
 Donc $C \in \mathcal{D}$.

4 $\mathcal{D} : y = -2x + 3$ donc $D \in \mathcal{D}$ si $y_D = -2x_D + 3$.
 Or, $-2x_D + 3 = -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{2}{3} + \frac{9}{3} = \frac{11}{3} \neq y_D$.
 Donc $D \notin \mathcal{D}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1
$$\begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ -x + 5y - 11 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 2y + 7 = 0 \\ -3x + 15y - 33 = 0 \end{cases} \text{ en multipliant par 3}$$

En ajoutant les deux équations, on a :

$$13y - 26 = 0 \quad \text{d'où :} \quad y = 2.$$

Ainsi, en remplaçant y par 2 dans la 2^e équation du 1^{er} système, on a :

$$-x + 5 \times 2 - 11 = 0,$$

soit :

$$x = -1.$$

Le système admet donc pour solution le couple $(-1; 2)$.

2 a. Un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax + b$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Donc, un vecteur directeur de $(\mathcal{D}_1)$ est $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, ou encore $2\vec{u}' = \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de $(\mathcal{D}_2)$ est $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont parallèles, alors leurs vecteur directeur sont nécessairement colinéaires.

Or, deux vecteurs $\vec{w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{r} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires signifie que $xy' = x'y$.

Or, $2 \times 1 \neq 5 \times 3$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et donc les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ne sont pas parallèles.

b. $(\mathcal{D}_1) : y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

Cette équation est équivalente à :

$$2y = 3x + 7$$

en multipliant tous les coefficients par 2. Et donc, elle est équivalente à :

$$0 = 3x - 2y + 7.$$

$(\mathcal{D}_2) : y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$.

Cette équation est équivalente, en multipliant tous les coefficients par 5, à :

$$5y = x + 11 \quad \text{soit} \quad -x + 5y - 11 = 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont donc solution du système de la question **1**.

Ainsi, $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ se coupent au point de coordonnées $(-1; 2)$.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

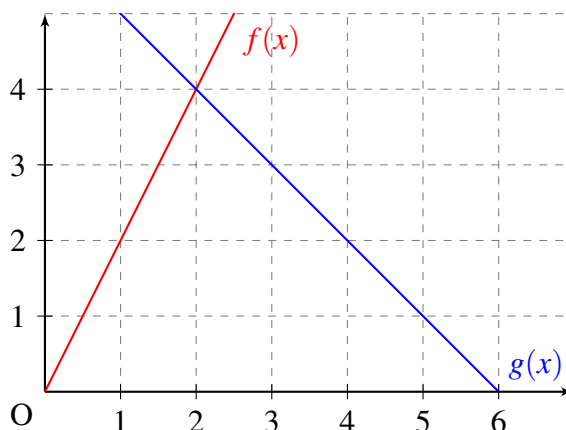
1 $f(x) = \frac{B \times h}{2} = \frac{AM \times BC}{2} = \frac{4 \times x}{2} = 2x.$

f est une fonction linéaire.

2 $g(x) = \frac{MB \times BI}{2} = \frac{(6-x) \times 2}{2} = 6-x.$

g est une fonction affine.

3 On a :



Les deux droites se coupent en un point dont l'abscisse est 2. Donc pour $x = 2$, les deux aires sont égales.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = 5 + 0,4x$. En effet, il doit payer 5 € quelle que soit la distance parcourue et ajouter 0,40 € pour chaque kilomètre, soit au final $0,4x$ €.

2 $g(x) = 0,6x$ car Noémie ne paie que pour la distance parcourue. Donc en parcourant x kilomètres et en payant 0,60 € par kilomètre, le tarif total est $0,60 \times x = 0,6x$.

3 Noémie et Hugo paient la même somme, donc $f(x) = g(x)$, où x est le nombre de kilomètres parcourus.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 5 + 0,4x = 0,6x \\ &\iff 5 = 0,6x - 0,4x \\ &\iff 5 = 0,2x \\ &\iff x = \frac{5}{0,2} \\ &\iff x = 25. \end{aligned}$$

Ainsi, Hugo et Noémie ont parcouru 25 kilomètres depuis leur domicile.

Systemes lineaires

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de reflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

3 juin 2018

Systemes sans contexte

■ Exercice 1. Quelques systemes pèle-mêle

★★★★☆ **A**

Corrigé page 92 👉

Résoudre les systemes suivants par la methode de votre choix.

1
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases}$$

4
$$\begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 9x - 7y = 4 \end{cases}$$

7
$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} -3x + 3y = 14 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

8
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + 3y = 7 \\ 3x + 6y = 14 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 9x - 7y = 36 \end{cases}$$

6
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 7y = 4 \end{cases}$$

9
$$\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 6x - 15y = 20 \end{cases}$$

■ Exercice 2. Avec des coefficients radicaux

★★★★☆ **A**

Corrigé page 95 👉

Résoudre les systemes suivants par la methode de votre choix.

1
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} \sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x + \sqrt{5}y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} \sqrt{7}x + \sqrt{5}y = 1 \\ \sqrt{5}x - \sqrt{7}y = -1 \end{cases}$$

■ Exercice 3. Avec des coefficients fractionnaires

★★★★☆ **A**

Corrigé page 96 👉

Résoudre les systemes suivants par la methode de votre choix.

1
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -1 \end{cases}$$

2
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 9 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y = 8 \end{cases}$$

3
$$\begin{cases} \frac{2}{7}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{3}{7}x + \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$$

■ Exercice 4. Avec changement de variables

★★★★☆ A

Corrigé page 97

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de votre choix.

$$\begin{array}{lll} \textbf{1} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2x^2 + 3y^2 = 10 \end{cases} & \textbf{2} \quad \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 1 \\ 2x^2 + 3y^2 = 7 \end{cases} & \textbf{3} \quad \begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 14 \\ 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 12 \end{cases} \end{array}$$

Intersection de droites

■ Exercice 5. Trouver le point d'intersection d'une droite

★★★★☆ A

Corrigé page 98

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ après avoir vérifié que ces dernières étaient sécantes.

$$\begin{array}{ll} \textbf{1} \quad \mathcal{D}_1 : y = 5x + 3 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = -5x + 7. & \textbf{3} \quad \mathcal{D}_1 : y = \frac{1}{2}x + 4 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = x + 8. \\ \textbf{2} \quad \mathcal{D}_1 : y = -8x - 5 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = 3x - 2. & \textbf{4} \quad \mathcal{D}_1 : y = 3x + 4 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = 3x + 8. \end{array}$$

■ Exercice 6. Trouver l'expression d'une fonction affine

★★★★☆ A

Corrigé page 99

Soit $f(x) = ax + b$ donc la représentation graphique dans un repère orthonormé est une droite (d) . A et B sont deux points de (d) .

Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de a et b .

$$\begin{array}{lll} \textbf{1} \quad A(-5; 3) \text{ et } B(2; -2). & \textbf{2} \quad A(2; -1) \text{ et } B(-2; 5). & \textbf{3} \quad A(9; -7) \text{ et } B(-7; 9). \end{array}$$

■ Exercice 7. Concourance de droites

★★★★☆ R

Corrigé page 100

Soient (d_1) , (d_2) et (d_3) trois droites d'équations réduites :

$$(d_1) : y = -3x + 5 \quad ; \quad (d_2) : y = 2x - 1 \quad ; \quad (d_3) : y = mx + 2, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la valeur de m telle que ces droites soient concourantes.

■ Exercice 8. Écrire un algorithme

★★★★☆ A

Corrigé page 101

Soit $f(x) = mx + p$ donc la représentation graphique dans un repère orthonormé est une droite (d) . $A(a; b)$ et $B(c; d)$ sont deux points de (d) .

- 1 Écrire un algorithme permettant de calculer m et p .
- 2 Écrire un programme Python permettant de saisir les valeurs de a , b , c et d puis de calculer et d'afficher l'expression de $f(x)$.

Problèmes

■ Exercice 9. Les chocolats

★★★★☆

R

Corrigé page 102

Jean-Raymond est très gourmand. Il achète une boîte de 100 chocolats dans laquelle il y a des chocolats blancs et des chocolats noirs. Il aime tellement ça qu'il décide d'acheter une boîte de ces mêmes chocolats mais avec 2 fois plus de chocolats blancs et 3 fois plus de chocolats noirs. Cette dernière boîte contient alors 260 chocolats.

Combien y avait-il de chocolats noirs et blancs lors de l'achat de la boîte ?

■ Exercice 10. Mandarines et clémentines

★★★★☆

R

Corrigé page 103

Un primeur vend des cageots de mandarines et clémentines.

Dans les cageots « spécial enfants », il y a 25 fruits.

Dans les cageots « spécial familles nombreuses », il y a 2 fois plus de mandarines et le même nombre de clémentines. En tout, il y a 40 fruits.

Déterminer le nombre de clémentines et de mandarines dans le cageots « spécial enfants ».

■ Exercice 11. L'âge de Fido (problème de Sam Loyd)

★★★★☆

R

Corrigé page 103

Charley Slowpop était sur le point de faire sa demande en mariage à son amie, lorsque le petit frère de celle-ci et son chien Fido entrèrent dans le salon.

« Tu ne peux pas connaître l'âge d'un chien à son collier, dit l'enfant terrible. Mais il y a cinq ans, ma sœur était cinq fois plus âgée que Fido et à présent, elle est trois fois plus âgée que lui ! »

Charley Slowpop est très curieux de savoir l'âge de Fido. Pouvez-vous l'aider ?

■ Exercice 12. Le problème du marché (problème de Sam Loyd)

★★★★☆

R

Corrigé page 103

Un fermier et son épouse vont au marché échanger leurs poulets pour du bétail au taux de 85 poulets pour un cheval et une vache, 5 chevaux valant exactement autant que 12 vaches.

« John, dit la femme, prenons encore une fois autant de chevaux que nous en avons déjà pris. Nous n'aurons ainsi que 17 chevaux et vaches à nourrir cet hiver. »

« Je crois que nous devrions avoir plus de vaches que cela dit John. D'ailleurs, si nous avions 2 fois plus de vaches que jusqu'à maintenant, cela nous ferait 19 vaches et chevaux en tout et nous aurions juste assez de poulets à donner en échange. »

Combien les paysans ont-ils apporté de poulets au marché ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)**1** Utilisons la méthode par substitution ici.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 1 + y \\ 2(1 + y) + 3y = 22 \end{cases} \quad (\text{on a remplacé } x \text{ par } 1 + y) \\
&\iff \begin{cases} x = 1 + y \\ 2 + 2y + 3y = 22 \end{cases} \quad (\text{on a utilisé la distributivité}) \\
&\iff \begin{cases} x = 1 + y \\ 5y = 20 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 1 + y \\ y = 4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \{(5; 4)\}$.

2 On va ici utiliser la méthode d'addition (méthode par combinaison linéaire).

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y = 5 & L_1 \\ x - y = 1 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x = 6 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2y = 4 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \{(3; 2)\}$.

3 On va ici utiliser la méthode par substitution.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 9x - 7y = 36 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ 9x - 7(8 - 2x) = 36 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ 9x - 56 + 14x = 36 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ 23x = 92 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ x = 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \{(4;0)\}$.

4 On va utiliser ici la méthode d'addition (méthode par combinaison linéaire).

On commence par vouloir calculer y donc on multiplie par 9 la première équation (« 9 » étant le coefficient de x dans la seconde équation) et on multiplie par 5 la seconde équation (« 5 » étant le coefficient de x dans la première équation).

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 5x + 3y = 16 & L_1 \\ 9x - 7y = 4 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 45x + 27y = 144 & L_1 \leftarrow 9L_1 \\ 45x - 35y = 20 & L_2 \leftarrow 5L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 45x + 27y = 144 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 62y = 124 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 45x + 27y = 144 \\ y = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Une fois trouvé y , on reprend le système initial et on trouve x :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 5x + 3y = 16 & L_1 \\ 9x - 7y = 4 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 35x + 21y = 112 & L_1 \leftarrow 7L_1 \\ 27x - 21y = 12 & L_2 \leftarrow 3L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 35x + 21y = 112 & L_1 \leftarrow L_1 \\ 62x = 124 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 35x + 21y = 112 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \{(2;2)\}$.

Autre façon de présenter : afin de raccourcir la résolution, on peut aussi opter pour la rédaction suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 5x + 3y = 16 & L_1 \\ 9x - 7y = 4 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 62y = 124 & L_1 \leftarrow 9L_1 - 5L_2 \\ 62x = 124 & L_2 \leftarrow 7L_1 + 3L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

5 Nous allons utiliser ici la méthode par substitution.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} -3x + 3y = 14 \\ x - 2y = 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} -3x + 3y = 14 \\ x = 4 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3(4 + 2y) + 3y = 14 \\ x = 4 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -12 - 6y + 3y = 14 \\ x = 4 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3y = 26 \\ x = 4 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -\frac{26}{3} \\ x = 4 + 2 \times \left(-\frac{26}{3}\right) = \frac{12-52}{3} = -\frac{40}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \left\{ \left(-\frac{40}{3}; -\frac{26}{3} \right) \right\}$.

6 On va utiliser la méthode par addition (méthode par combinaison linéaire).

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 3x - 2y = 5 & L_1 \\ 4x + 7y = 4 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} -29y = 8 & L_1 \leftarrow 4L_1 - 3L_2 \\ 29x = 43 & L_2 \leftarrow 7L_1 + 2L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -\frac{8}{29} \\ x = \frac{43}{29} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \left\{ \left(\frac{43}{29}; -\frac{8}{29} \right) \right\}$.

7 Nous avons le système suivant : $\begin{cases} 4x - 2y = 8 & L_1 \\ -2x + y = -4 & L_2 \end{cases}$.

On remarque que $-2L_2$ donne : $4x - 2y = 8$, soit L_1 . Ainsi, $L_1 \iff L_2$. Le système est donc composé d'une unique équation : $y = 2x - 4$ (si on prend L_2). Il admet donc une infinité de solutions :

$$S = \{(x, 2x - 4), x \in \mathbb{R}\}$$

8 Nous avons le système suivant : $\begin{cases} \frac{3}{2}x + 3y = 7 & L_1 \\ 3x + 6y = 14 & L_2 \end{cases}$.

On remarque que $2L_1 \iff L_2$ donc le système est composé d'une unique équation : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{3}$ donc il admet une infinité de solutions :

$$S = \left\{ \left(x; -\frac{1}{2}x + \frac{7}{3} \right) \right\}$$

9 Nous avons le système :
$$\begin{cases} 2x - 5y = 7 & L_1 \\ 6x - 15y = 20 & L_2 \end{cases}$$

On remarque que $3L_1 \iff 6x - 15y = 21$. Le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} 6x - 15y = 21 \\ 6x - 15y = 20 \end{cases}$$

Or, $L_1 - L_2 \iff 0 = 1$, ce qui est impossible (en tout cas, dans mon monde... je ne sais pas ce qu'il en est dans le vôtre...). Donc le système n'admet aucune solution :

$$\boxed{S = \emptyset} \quad (\text{ensemble vide})$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Utilisons la méthode d'addition (méthode par combinaison linéaire).

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 & L_1 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 2 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} -5y = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} & L_1 \leftarrow \sqrt{3}L_1 - \sqrt{2}L_2 \\ 5x = \sqrt{2} + 2\sqrt{3} & L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_1 + \sqrt{3}L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5} \\ x = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{L'ensemble solution est donc } S = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{5}; \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5} \right) \right\}.$$

2 Utilisons la méthode d'addition (méthode par combinaison linéaire).

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x + \sqrt{5}y = -\sqrt{3} \end{cases} &\iff \begin{cases} -2y = \sqrt{6} + \sqrt{15} & L_1 \leftarrow \sqrt{3}L_1 - \sqrt{5}L_2 \\ 2x = \sqrt{10} + 3 & L_2 \leftarrow \sqrt{5}L_1 - \sqrt{3}L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{10}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{L'ensemble solution est donc } S = \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{15}}{2} \right) \right\}.$$

3 Utilisons la méthode d'addition (méthode par combinaison linéaire).

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{7}x + \sqrt{5}y = 1 \\ \sqrt{5}x - \sqrt{7}y = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 12y = \sqrt{5} + \sqrt{7} & L_1 \leftarrow \sqrt{5}L_1 - \sqrt{7}L_2 \\ 12x = \sqrt{7} - \sqrt{5} & L_2 \leftarrow \sqrt{7}L_1 + \sqrt{5}L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{12} \\ y = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{12} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{L'ensemble solution est donc } S = \left\{ \left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{12}; \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{12} \right) \right\}.$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Avant tout, pour se débarrasser des fractions, nous allons multiplier les deux équations par le plus petit dénominateur commun (ici à 2 et 3), donc par 6.

Ensuite, nous utiliserons la méthode d'addition (combinaison linéaire).

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3x - 2y = 6 & L_1 \leftarrow 6L_1 \\ 2x - 3y = -6 & L_2 \leftarrow 6L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5y = 30 & L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \\ 5x = 30 & L_2 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \{(6; 6)\}$.

- 2 Pour le système $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 9 & L_1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y = 8 & L_2 \end{cases}$, on constate qu'en ajoutant les deux équations, les y s'annulent :

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &\iff \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)x = 9 + 8 && \iff \frac{17}{12}x = 17 \\ &\iff x = 12. \end{aligned}$$

Pour trouver y , on peut multiplier par 5 l'équation L_1 :

$$\begin{aligned} 5L_1 &\iff \frac{10}{3} \times 12 + y = 45 \\ &\iff y = 45 - 40 = 5. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \{(12; 5)\}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{2}{7}x - \frac{1}{3}y = 1 & L_1 \\ \frac{3}{7}x + \frac{2}{3}y = -1 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{4}{7}x - \frac{2}{3}y = 2 & L_1 \leftarrow 2L_1 \\ \frac{3}{7}x + \frac{2}{3}y = -1 & L_2 \leftarrow L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 1 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \frac{3}{7}x + \frac{2}{3}y = -1 & L_2 \leftarrow L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On remplace alors } x \text{ par 1 dans } L_2 : L_2 &\iff \frac{2}{3}y = -1 - \frac{3}{7} \\ &\iff \frac{2}{3}y = -\frac{10}{7} \\ &\iff y = -\frac{10}{7} \times \frac{3}{2} \\ &\iff y = -\frac{15}{7} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $S = \left\{\left(1; -\frac{15}{7}\right)\right\}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Pour résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ 2x^2 + 3y^2 = 10 \end{cases}$, nous allons poser :
- $$X = x^2 \quad \text{et} \quad Y = y^2.$$

Le système est donc équivalent à :

$$\begin{aligned} \begin{cases} X - Y = 7 & L_1 \\ 2X + 3Y = 10 & L_2 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} -5Y = 4 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 5X = 31 & L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} X = \frac{31}{5} \\ Y = -\frac{4}{5} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{31}{5} \\ y^2 = -\frac{4}{5} \end{cases} \leftarrow \text{impossible} \end{aligned}$$

L'ensemble solution du système linéaire est donc $S = \emptyset$.

- 2 En posant $X = x^2$ et $Y = y^2$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x^2 - 3y^2 = 1 \\ 2x^2 + 3y^2 = 7 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2X - 3Y = 1 & L_1 \\ 2X + 3Y = 7 & L_2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 6Y = 6 & L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 4X = 8 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} Y = 1 \\ X = 2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble solution du système linéaire est donc :

$$S = \left\{ (\sqrt{2}; 1), (\sqrt{2}; -1), (-\sqrt{2}; 1), (-\sqrt{2}; -1) \right\}$$

- 3 En posant $X = \sqrt{x}$ et $Y = \sqrt{y}$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 14 \\ 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 12 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} 5X - 3Y = 14 & L_1 \\ 2X + 2Y = 12 & L_2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 5X - 3Y = 14 & L_1 \leftarrow L_1 \\ X + Y = 6 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 8X = 32 & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ -8Y = -16 & L_2 \leftarrow L_1 - 5L_2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow X = \sqrt{x} = 4 \text{ et } Y = \sqrt{y} = 2 \\ &\Longleftrightarrow x = 16 \text{ et } y = 4 \end{aligned}$$

Donc $S = \{(16;4)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\mathcal{D}_1 : y = 5x + 3$ et $\mathcal{D}_2 : y = -5x + 7$.

Les droites ont pour coefficients directeurs respectifs 5 et -5 , donc deux nombres différents ; par conséquent, elles ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes (elles se coupent).

Posons alors $M(x_M; y_M)$ ce point d'intersection.

- $M \in \mathcal{D}_1 \iff y_M = 5x_M + 3$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}_1$;
- $M \in \mathcal{D}_2 \iff y_M = -5x_M + 7$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}_2$).

Ainsi,

$$\begin{aligned}y_M = 5x_M + 3 = -5x_M + 7 &\iff 5x_M + 5x_M = 7 - 3 \\&\iff 10x_M = 4 \\&\iff x_M = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

De plus,

$$y_M = 5x_M + 3 = 5 \times \frac{2}{5} + 3 = 2 + 3 = 5.$$

Ainsi, les droites se coupent en un point de coordonnées $\left(\frac{2}{5}; 5\right)$.

2 $\mathcal{D}_1 : y = -8x - 5$ et $\mathcal{D}_2 : y = 3x - 2$.

Les droites ont pour coefficients directeurs respectifs -8 et 3 , donc deux nombres différents ; par conséquent, elles ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes (elles se coupent).

Posons alors $M(x_M; y_M)$ ce point d'intersection.

- $M \in \mathcal{D}_1 \iff y_M = -8x_M - 5$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}_1$;
- $M \in \mathcal{D}_2 \iff y_M = 3x_M - 2$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}_2$).

Ainsi,

$$\begin{aligned}y_M = -8x_M - 5 = 3x_M - 2 &\iff -8x_M - 3x_M = -2 + 5 \\&\iff -11x_M = 3 \\&\iff x_M = -\frac{3}{11}.\end{aligned}$$

De plus,

$$y_M = 3x_M - 2 = -3 \times \frac{3}{11} - 2 = \frac{-9 - 22}{11} = -\frac{31}{11}$$

Ainsi, les droites se coupent en un point de coordonnées $\left(-\frac{3}{11}; -\frac{31}{11}\right)$.

3 $\mathcal{D}_1 : y = \frac{1}{2}x + 4$ et $\mathcal{D}_2 : y = x + 8$.

Les droites ont pour coefficients directeurs respectifs $\frac{1}{2}$ et 1, donc deux nombres différents ; par conséquent, elles ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes (elles se coupent).

Posons alors $M(x_M; y_M)$ ce point d'intersection.

- $M \in \mathcal{D}_1 \iff y_M = \frac{1}{2}x_M + 4$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}_1$;
- $M \in \mathcal{D}_2 \iff y_M = x_M + 8$ (ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}_2$).

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_M = \frac{1}{2}x_M + 4 = x_M + 8 &\iff \frac{1}{2}x_M - x_M = 8 - 4 \\ &\iff -\frac{1}{2}x_M = 4 \\ &\iff x_M = -8. \end{aligned}$$

De plus,

$$y_M = x_M + 8 = -8 + 8 = 0.$$

Ainsi, les droites se coupent en un point de coordonnées $(-8; 0)$.

4 $\mathcal{D}_1 : y = 3x + 4$ et $\mathcal{D}_2 : y = 3x + 8$.

Les droites ont les mêmes coefficients directeurs (3) donc elles sont parallèles.

De plus, leurs ordonnées à l'origine (respectivement 4 et 8) sont différentes, donc les deux droites sont distinctes.

Par conséquent, elles ne se coupent pas.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $A(-5; 3)$ et $B(2; -2)$.

- $A \in (d) \iff f(-5) = 3 \iff a \times (-5) + b = 3 \iff -5a + b = 3$;
- $B \in (d) \iff f(2) = -2 \iff a \times 2 + b = -2 \iff 2a + b = -2$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -5a + b = 3 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} &\iff \begin{cases} 7a = -5 \\ 7b = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + 5L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} a = -\frac{5}{7} \\ b = -\frac{4}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = -\frac{5}{7}x - \frac{4}{7}$.

2 $A(2; -1)$ et $B(-2; 5)$.

- $A \in (d) \iff f(2) = -1 \iff a \times 2 + b = -1 \iff 2a + b = -1;$
- $B \in (d) \iff f(-2) = 5 \iff a \times (-2) + b = 5 \iff -2a + b = 5.$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2a + b = -1 & L_1 \\ -2a + b = 5 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 4a = -6 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2b = 4 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$.

3 $A(9; -7)$ et $B(-7; 9)$.

- $A \in (d) \iff f(9) = -7 \iff a \times 9 + b = -7 \iff 9a + b = -7;$
- $B \in (d) \iff f(-7) = 9 \iff a \times (-7) + b = 9 \iff -7a + b = 9.$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9a + b = -7 & L_1 \\ -7a + b = 9 & L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} 16a = -16 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 16b = 32 & L_2 \leftarrow 7L_1 + 9L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = -x + 2$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Plan de la résolution :

- 1** on trouve les coordonnées du point d'intersection I de (d_1) et (d_2) ;
- 2** pour que les droites soient concourantes, il faut que $i \in (d_3)$ donc que ses coordonnées vérifient son équation.

Résolution :

- 1** Trouvons les coordonnées du point $I(x_I; y_I)$, intersection de (d_1) et (d_2) .

- $I \in (d_1) \iff y_I = -3x_I + 5$ (ses coordonnées vérifient l'équation de (d_1));
- $I \in (d_2) \iff y_I = 2x_I - 1$ (ses coordonnées vérifient l'équation de (d_2)).

Donc :

$$-3x_I + 5 = 2x_I - 1 \iff 5 + 1 = 2x_I + 3x_I \iff x_I = \frac{6}{5}.$$

Donc :

$$y_I = 2x_I - 1 = 2 \times \frac{6}{5} - 1 = \frac{12}{5} - \frac{5}{5} = \frac{7}{5}.$$

Ainsi, $I\left(\frac{6}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

$$\begin{aligned}
2 \quad I \in (d_3) &\iff y_I = mx_I + 2 \\
&\iff \frac{7}{5} = m \times \frac{6}{5} + 2 \\
&\iff \frac{7}{5} - 2 = \frac{6}{5}m \\
&\iff \frac{-3}{5} = \frac{6}{5}m \\
&\iff -3 = 6m \text{ (on a multiplié par 5 de part et d'autre du signe « = »)} \\
&\iff m = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \\
\text{Ainsi, } (d_3) : y &= -\frac{1}{2}x + 2.
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Avant de construire l'algorithme, regardons comment calculer m et p en fonction de a , b , c et d :

- $A \in (d) \iff f(a) = b \iff am + p = b$;
- $B \in (d) \iff f(c) = d \iff cm + p = d$.

En soustrayant les deux équations, on a :

$$am - cm = b - d \quad \text{d'où} \quad m = \frac{b-d}{a-c} \text{ si } a \neq c.$$

Ensuite, on part de l'égalité $am + p = b$ (par exemple) pour écrire :

$$p = b - am = b - a \times \frac{b-d}{a-c}.$$

Si $a = c$ cela signifie que les deux points ont la même abscisse ($x = a$) et donc qu'ils appartiennent à la droite verticale d'équation $x = a$.

1 Un algorithme possible est le suivant :

Algorithme 21

Entrées

Saisir a , b , c et d

Traitement

Si $a \neq c$ **alors**

m prend la valeur $(b-d)/(a-c)$ p prend la valeur $b-a*m$ Afficher
: "La droite a pour équation $y =$ " Afficher m Afficher " $x +$ "
Afficher p

sinon

Afficher : "La droite a pour équation $x =$ " Afficher a

Fin du Si

2 Un algorithme Python possible est le suivant :

```
a = float(input("Saisir l'abscisse de A :"))
b = float(input("Saisir l'ordonnée de A :"))
c = float(input("Saisir l'abscisse de B :"))
d = float(input("Saisir l'ordonnée de B :"))
if (a != c): # si a est différent de c alors on fait...
    m = (b-d)/(a-c)
    p = b - a*m
    if (m != 0): # si m n'est pas égale à zéro...
        if (p==0): # si l'ordonnée à l'origine est nulle...
            print("f(x)=",m,"x") # ... on n'affiche pas p
        else: # ... sinon
            if (p > 0): # si p est positif...
                print("f(x)=",m,"x+",p)
            else: #... sinon (si p est négatif) on n'affiche
                pas le signe "+" avant
                print("f(x)=",m,"x",p)
        else: # cas d'une droite horizontale
            print("f(x)=",p)
else: # cas d'une droite verticale
    print("La droite a pour équation x=",a)
```

Explications.

- la commande input permet de saisir quelque chose au clavier;
- la commande float permet de convertir ce que l'on a saisi en nombre réel.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons n le nombre de chocolats noirs et b le nombre de chocolats blancs dans la boîte lors de son achat. Alors,

$$n + b = 100.$$

La nouvelle boîte contient alors $3n$ chocolats noirs et $2b$ chocolats blancs donc :

$$3n + 2b = 260.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} n + b = 100 \\ 3n + 2b = 260 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} n = 100 - b \\ 3(100 - b) + 2b = 260 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} n = 100 - b \\ -b = 260 - 300 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} n = 100 - b \\ b = 40 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} n = 100 - 40 = 60 \\ b = 40 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y avait donc dans la petite boîte 40 chocolats blancs et 60 chocolats noirs.

■ **Corrigé de l'exercice 10.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons m le nombre de mandarines et c le nombre de clémentines dans le cageot « spécial enfants ». Alors,

$$m + c = 25.$$

Le contenu de l'autre cageot nous dit que :

$$\begin{array}{c} \text{2 fois plus de mandarines} \\ \swarrow \\ 2m + c = 40. \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{même nombre de clémentines} \quad \text{pour un total de 40 fruits} \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m + c = 25 \\ 2m + c = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 25 - c \\ 2(25 - c) + c = 40 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 25 - c \\ -c = 40 - 50 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 25 - c \\ c = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 25 - 10 = 15 \\ c = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc dans le cageot « spécial enfants » 10 clémentines et 15 mandarines.

■ **Corrigé de l'exercice 11.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons f l'âge de Fido et s celui de la sœur à notre époque.

- Il y a 5 ans, $s - 5 = 5(f - 5)$, donc $s = 5f - 20$.
- À présent, $s = 3f$.

De ces deux égalités, on obtient :

$$5f - 20 = 3f \quad \text{soit} \quad f = 10.$$

Fido a donc 10 ans.

■ **Corrigé de l'exercice 12.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

La première phrase nous dit que :

$$85 \text{ poulets} = 1 \text{ cheval} + 1 \text{ vache} \quad \text{et} \quad 5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches}.$$

On en déduit alors :

$$5 \times 85 \text{ poulets} = 5 \text{ chevaux} + 5 \text{ vaches}$$

soit :

$$425 \text{ poulets} = 17 \text{ vaches} \quad \text{soit} \quad 1 \text{ vache} = 25 \text{ poulets}.$$

Et donc,

$$5 \text{ chevaux} = 12 \text{ vaches} = 12 \times 25 \text{ poulets} = 300 \text{ poulets}$$

donc :

$$1 \text{ cheval} = 60 \text{ poulets}.$$

Notons maintenant :

- x le nombre de chevaux que le couple a déjà achetés ;
- y le nombre de vaches que le couple a déjà achetées.

Le dialogue entre le mari et la femme donne alors le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 17 & (L_1) \\ x + 2y = 19 & (L_2) \end{cases}$$

$2(L_2) - (L_1)$ donne : $3y = 38 - 17$, soit $y = 7$.

$2(L_1) - (L_2)$ donne : $3x = 34 - 19$, soit $x = 5$.

Le couple a donc déjà acheté 5 chevaux et 7 vaches.

Ainsi, s'il achète 7 vaches, il lui faut :

$$7 \times 25 \text{ poulets} = 175 \text{ poulets.}$$

Les paysans ont donc amené 175 poulets.

Fonctions du second degré

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

■ Exercice 1. Forme canonique & factorisation

★★★★☆ **A**

Corrigé page 106 ✌

Pour chacune des fonctions suivantes, donner sa forme canonique et en déduire sa factorisation :

1 $f(x) = x^2 + 2x - 15$

2 $g(x) = -4x^2 + 2x + 6$

3 $h(x) = -3x^2 - 6x + 24$

■ Exercice 2. Sens de variation

★★★★☆ **A**

Corrigé page 107 ✌

Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, donner son sens de variation sur $\mathbb{R}$.

■ Exercice 3. Aire d'un triangle dans un triangle équilatéral

★★★★☆ **A**

Corrigé page 109

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 10$ cm.

Sur $[AC]$, on place un point M tel que $AM = x$ cm.

La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe $[BC]$ en N.

La perpendiculaire à (MN) passant par N coupe $[AB]$ en P.

1 Faire une figure.

2 Montrer que les valeurs que peut prendre x sont sur l'intervalle $[5; 10]$.

3 Montrer que $MN = \sqrt{3}(10 - x)$.

4 Montrer que $NC = 2(10 - x)$.

5 Montrer que PNB est un triangle équilatéral.

En déduire que $PN = 2(x - 5)$.

6 En déduire que l'aire du triangle MNP est :

$$\mathcal{A}(x) = \sqrt{3}(x - 5)(10 - x).$$

7 Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ?

8 Représenter la fonction $\mathcal{A}$ dans un repère orthonormé.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)**1** On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 + 2x - 15 \\
 &= \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{=(x+1)^2} - 1 - 15 \\
 &= (x+1)^2 - 16 \quad \leftarrow \text{Forme canonique} \\
 &= (x+1)^2 - 4^2 \\
 &= (x+1-4)(x+1+4) \\
 &= (x-3)(x+5) \quad \leftarrow \text{Forme factorisée}
 \end{aligned}$$

2 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 g(x) &= -4x^2 + 2x + 6 \\
 &= -4 \left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) \\
 &= -4 \left[\underbrace{x^2 - 2 \times \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} \right)^2}_{=(x-\frac{1}{4})^2} - \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{3}{2} \right] \\
 &= -4 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right] \quad \leftarrow \text{Forme canonique} \\
 &= -4 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{5}{4} \right)^2 \right] \\
 &= -4 \left(x - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \right) \left(x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \right) \\
 &= -4 \left(x - \frac{3}{2} \right) (x+1) \quad \leftarrow \text{Forme factorisée} \\
 &= \underline{-2(2x-3)(x+1)} \quad (\text{autre possibilité d'écriture})
 \end{aligned}$$

3 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}h(x) &= -3x^2 - 6x + 24 \\&= -3(x^2 + 2x - 8) \\&= -3(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{=(x+1)^2} - 1 - 8) \\&= -3[(x+1)^2 - 9] \leftarrow \text{Forme canonique} \\&= -3[(x+1)^2 - 3^2] \\&= -3(x+1-3)(x+1+3) \\&= \underline{-3(x-2)(x+4)} \leftarrow \text{Forme factorisée}\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Posons $a < b$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= b^2 + 2b - 15 - a^2 - 2a + 15 \\&= \textcolor{red}{b^2} - \textcolor{red}{a^2} + 2(b-a) \\&= \textcolor{red}{(b-a)(b+a)} + 2(b-a) \\&= \underline{(b-a)(a+b+2)}\end{aligned}$$

$a < b$ donc $(b-a) > 0$. Ainsi, $f(b) - f(a)$ est du signe de $(a+b+2)$.

La forme canonique de $f(x)$ est (voir exercice 1) :

$$f(x) = (x+1)^2 - 16$$

donc les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f est $(-1; 16)$ (-1 est la valeur de x pour laquelle $(x+1)^2 = 0$).

Ainsi, si $a < b < -1$, $f(b) - f(a) < 0$ donc f est décroissante sur $] -\infty; -1[$.

Donc f est croissante sur $] -1; +\infty[$.

2 $g(x) = -4x^2 + 2x + 6$. Posons $a < b$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}g(b) - g(a) &= -4b^2 + 2b + 6 + 4a^2 - 2a - 6 \\&= 4(a^2 - b^2) + 2(b-a) \\&= -4(b^2 - a^2) + 2(b-a) \\&= (b-a)[-4(b+a) + 2] \\&= \underline{(b-a)(2-4b-4a)}\end{aligned}$$

$a < b$ donc $(b-a) > 0$. Ainsi, $g(b) - g(a)$ est du signe de $(2-4b-4a)$.

La forme canonique de $g(x)$ est :

$$g(x) = -4 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right]$$

donc les coordonnées du sommet de la parabole qui représente g sont $\left(\frac{1}{4}; \frac{25}{4} \right)$ (car $-4 \times \left(-\frac{25}{16} \right) = \frac{25}{4}$).

Donc, si $a < b < \frac{1}{4}$, $g(b) - g(a) > 0$, ce qui signifie que sur $] -\infty; \frac{1}{4}[$, g est croissante.

Donc sur $\left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$, g est décroissante.

3 $h(x) = -3x^2 - 6x + 24$. Posons $a < b$ sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= -3b^2 - 6b + 24 + 3a^2 + 6a - 24 \\ &= -3(b^2 - a^2) - 6(b - a) \\ &= (b - a)[-3(b + a) - 6] \\ &= (b - a)(-3b - 3a - 6) \end{aligned}$$

$a < b$ donc $(b - a) > 0$. Ainsi, $h(b) - h(a)$ est du signe de $(-3b - 3a - 6)$.

La forme canonique de $h(x)$ est :

$$h(x) = -3[(x + 1)^2 - 9]$$

donc les coordonnées du sommet de la parabole qui représente h sont $(-1; 27)$ (car $-3 \times (-9) = 27$).

Donc, si $a < b < -1$, $h(b) - h(a) > 0$, ce qui signifie que sur $]-\infty; -1[$, g est croissante et sur $]-1; +\infty[$, h est décroissante.

Autre possibilité

Nous pouvons aussi utiliser la première forme des fonctions, la forme développée.

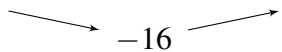
1 $f(x) = x^2 + 2x - 15$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -15$.

L'abscisse du sommet S de la parabole est $x_S = -\frac{b}{2a}$, soit $x_S = -1$.

Son ordonnée est :

$$y_S = f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16$$

$a > 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f			

2 $g(x) = -4x^2 + 2x + 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -4$, $b = 2$ et $c = 6$.

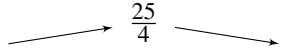
L'abscisse du sommet S de la parabole est :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-4)} = \frac{1}{4}$$

Donc son ordonnée est :

$$y_S = g\left(\frac{1}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{24}{4} = \frac{25}{4}$$

$a < 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
g			

- 3 $h(x) = -3x^2 - 6x + 24$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$, $b = -6$ et $c = 24$.

L'abscisse du sommet S de la parabole est :

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times (-3)} = -1$$

Donc son ordonnée est :

$$y_S = h(-1) = -3(-1)^2 - 6 \times (-1) + 24 = -3 + 6 + 24 = 27$$

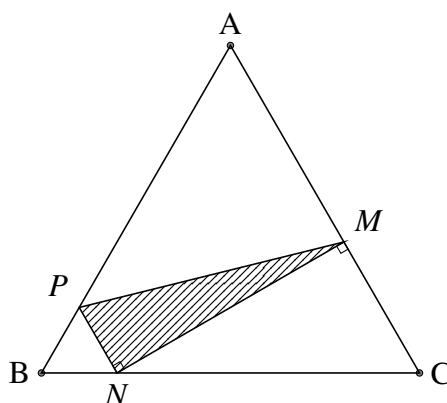
$a < 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
h	$\nearrow -27 \searrow$		

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La figure est :



- 2 M est sur $[AC]$ donc a priori, $x \in [0; 10]$. Or, si $x < 5$, $N \notin [BC]$ et donc le triangle MNP n'est pas défini.

Donc, $x \in [5; 10]$.

- 3 On sait que $\widehat{ACN} = 60^\circ$ (car ABC est équilatéral). Donc, dans le triangle MNC rectangle en M :

$$\tan \widehat{NCM} = \frac{MN}{MC}$$

soit :

$$\tan 60^\circ = \frac{MN}{10 - x}.$$

On a alors :

$$MN = \tan 60^\circ \times (10 - x)$$

soit :

$$\underline{MN = \sqrt{3}(10 - x)}.$$

4 Dans le triangle MNC rectangle en M :

$$\cos 60^\circ = \frac{MC}{NC}$$

d'où :

$$NC = \frac{MC}{\cos 60^\circ} = \frac{10-x}{\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\underline{NC = 2(10-x)}.$$

5 On sait que $(MN) \perp (AC)$ et $(MN) \perp (PN)$. Donc $(PN) \parallel (AC)$ et par conséquent, $\widehat{PNB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ et $\widehat{NPB} = \widehat{CAB} = 60^\circ$.

Donc PNB est équilatéral.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}PN &= BN \\&= 10 - NC \\&= 10 - 2(10-x) \\&= 10 - 20 + 2x \\&= -10 + 2x\end{aligned}$$

$$\boxed{PN = 2(x-5)}$$

6 Le triangle PNM est rectangle en N donc son aire est :

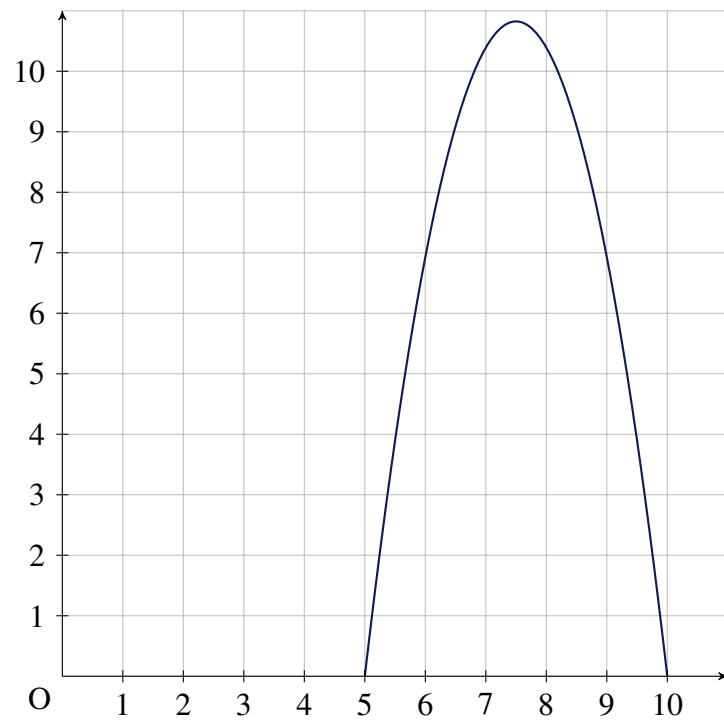
$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \frac{1}{2} \times MN \times PN \\&= \frac{1}{2} \times \sqrt{3}(10-x) \times 2(x-5)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = \sqrt{3}(10-x)(x-5)}$$

7 La fonction $\mathcal{A}$ est une fonction du second degré qui s'annule en $x = 5$ et $x = 10$; par conséquent, son maximum est atteint pour $x = \frac{5+10}{2} = 7,5$.

8 Pour représenter la fonction $\mathcal{A}$, on commence par faire un tableau de valeurs :

x	5	6	7	7,5	8	9	10
$\mathcal{A}(x)$	0	6,928	10,392	10,825	10,392	6,928	0



Trigonométrie

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

3 juin 2018

■ Exercice 1. Valeurs remarquables

★★★★☆

A

Corrigé page 114 👉

Compléter le tableau suivant :

Angles (en degrés)	0	30	45	60	90	180
Angles (en radians)						
Cosinus						
Sinus						

■ Exercice 2. Conversions

★★★★☆

A

Corrigé page 114 👉

1 Convertir $\frac{2\pi}{5}$ radians en degrés.

2 Convertir 130° en radians.

■ Exercice 3. Placer des points sur le cercle trigonométrique

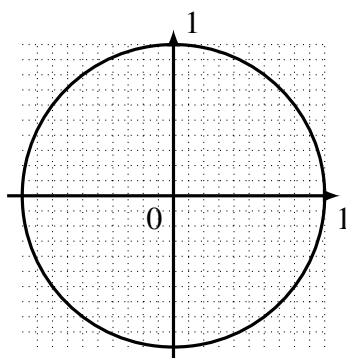
★★★★☆

A

Corrigé page 115 👉

Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous les angles suivants (exprimés en radians) :

$$\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{6} ; -\frac{2\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6} ; -\frac{3\pi}{4} ; -\frac{13\pi}{3}.$$



■ Exercice 4. Dédire un cosinus à partir d'un sinus

★★★★☆☆ (A)

Corrigé page 115

1 Un logiciel de calcul donne : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2 Soit x un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{4}{5}$.

Calculer $\cos(x)$.

3 On donne $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et montrer que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

■ Exercice 5. Raisonnement

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 117

1 Après quelques calculs, Pierre affirme que le sinus d'un angle a une valeur exacte égale à $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$.

Pourquoi cette valeur est obligatoirement fausse ?

2 L'erreur étant rectifiée, le sinus de cet angle a pour valeur exacte $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$.

Donner une valeur approchée à l'unité de la mesure en degrés de cet angle.

■ Exercice 6. Placer des points sur le cercle trigonométrique

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 117

Placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants, exprimés en radians :

1 $\frac{215\pi}{6}$.

2 $\frac{316\pi}{6}$.

■ Exercice 7. Simplification

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 118

1 Sans utiliser la calculatrice, calculer $\left(\cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}\right)^2$.

2 Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2.$$

Montrer que f est une fonction affine.

■ Exercice 8. Équation trigonométrique

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 118

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation :

$$4\cos^2 x - 3 = 0.$$

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Angles (en degrés)	0	30	45	60	90	180
Angles (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Convertir $\frac{2\pi}{5}$ radians en degrés.

Pour convertir de radians à degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$.

$$\frac{2\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = \frac{360\pi}{5\pi} = 72^\circ.$$

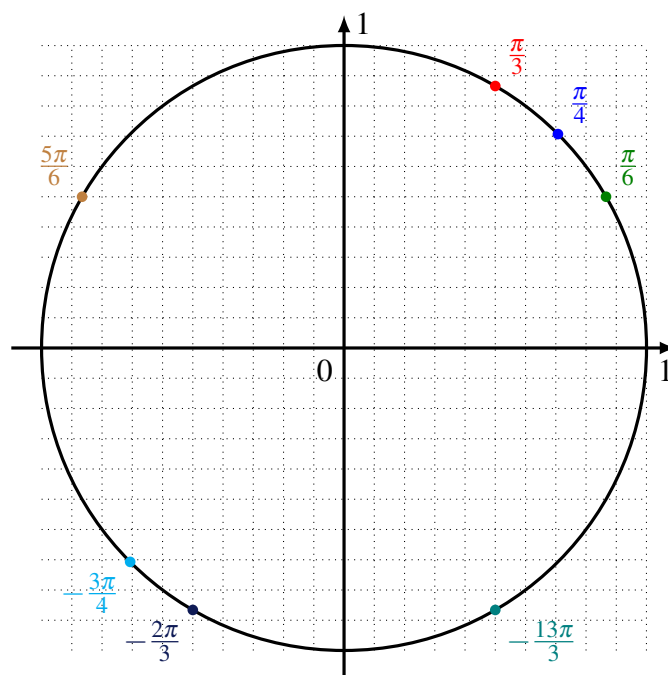
Ainsi, $\frac{2\pi}{5}$ radians = 72° .

- 2 Convertir 130° en radians.

Pour convertir de degrés à radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$.

$$130 \times \frac{\pi}{180} = \frac{130\pi}{180} = \frac{13\pi}{18}.$$

Ainsi, $130^\circ = \frac{13\pi}{18}$ radians.



Pour $-\frac{13\pi}{3}$, on commence par trouver le multiple pair de 3 le plus proche de 13 (ici, c'est 12) et on écrit l'angle en fonction de ce résultat :

$$-\frac{13\pi}{3} = \frac{-12\pi - \pi}{3} = -\frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -4\pi - \frac{\pi}{3}.$$

Comme -4π est au même endroit que 2π ou 0 (car le coefficient de π est pair), on peut conclure que le point correspondant à $-\frac{13\pi}{3}$ se trouve au même endroit que celui qui correspond à $-\frac{\pi}{3}$.

1 Un logiciel de calcul donne : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

D'après la formule du cours :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

donc, en prenant $x = \frac{\pi}{5}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 &\iff \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 \\ &\iff \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &\iff \left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \\ &\iff \sin \frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}. \end{aligned}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{5} < \pi$ donc $\sin \frac{\pi}{5} > 0$.

$$\text{Ainsi, } \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

- 2** Soit x un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{4}{5}$.

D'après la formule du cours,

$$\begin{aligned}(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 &\iff (\cos x)^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\&\iff (\cos x)^2 = \frac{9}{25} \\&\iff \cos x = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \text{ ou } \cos x = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Or, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc $\cos x < 0$.

$$\text{Ainsi, } \cos x = -\frac{3}{5}.$$

- 3** On donne $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

D'après la formule du cours,

$$\begin{aligned}\left(\cos \frac{7\pi}{12}\right)^2 + \left(\sin \frac{7\pi}{12}\right)^2 = 1 &\iff \left(\sin \frac{7\pi}{12}\right)^2 = 1 - \left(\cos \frac{7\pi}{12}\right)^2 \\&\iff \left(\sin \frac{7\pi}{12}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 \\&\iff \left(\sin \frac{7\pi}{12}\right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

Or, $0 < \frac{7\pi}{12} < \pi$ donc $\sin \frac{7\pi}{12} > 0$.

De plus,

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \left(\sin \frac{7\pi}{12}\right)^2.$$

$$\text{Ainsi, } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \approx 1,57 > 1.$

Or, on sait qu'un sinus et un cosinus sont toujours compris entre -1 et 1 donc cette valeur ne peut pas représenter un sinus.

2 On utilise la touche $\arccos$ de la calculatrice :

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}\right) \approx 38^\circ.$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\frac{215\pi}{6}.$

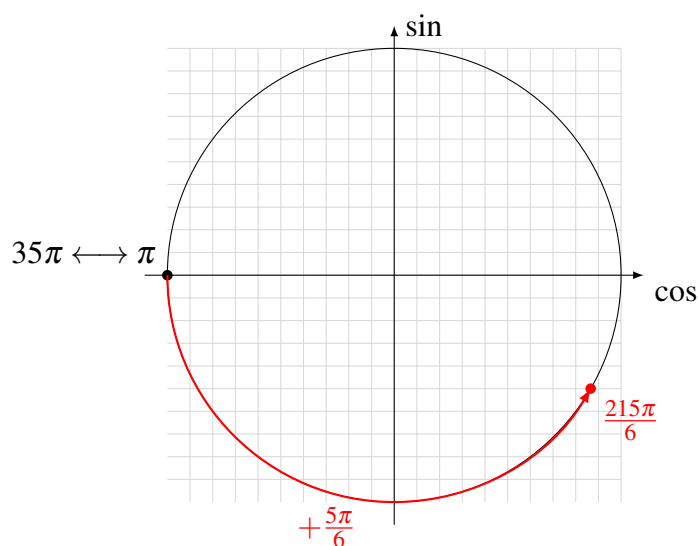
On effectue la division euclidienne de 215 par 6 :

$$215 = 35 \times 6 + 5.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{215\pi}{6} &= \frac{[(35 \times 6) + 5]\pi}{6} \\ &= \frac{(35 \times 6)\pi + 5\pi}{6} \\ &= \frac{35 \times 6}{6}\pi + \frac{5\pi}{6} \\ &= 35\pi + \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

Comme 35π est au même endroit que π (car 35 est impair), on part de π puis on ajoute $\frac{5\pi}{6}$:



N'oublions pas que le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre quand on tourne sur le cercle trigonométrique.

2 $\frac{316\pi}{6}$.

On effectue la division euclidienne de 316 par 6 :

$$316 = 52 \times 6 + 4.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{316\pi}{6} &= \frac{[(52 \times 6) + 4]\pi}{6} \\ &= \frac{(52 \times 6)\pi + 4\pi}{6} \\ &= \frac{52 \times 6}{6}\pi + \frac{4\pi}{6} \\ &= 52\pi + \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Comme 52π est au même endroit que 2π ou 0 (car 52 est pair), le point correspondant à $\frac{316\pi}{6}$ est au même endroit que celui qui correspond à $\frac{2\pi}{3}$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1
$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{4} \\ &= \frac{(3+2\sqrt{3}+1) + (3-2\sqrt{3}+1)}{4} \\ &= \frac{8}{4} \\ &= 2. \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} f(x) &= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \\ &= (\cos x)^2 + 2\cos x \sin x + (\sin x)^2 + (\cos x)^2 - 2\cos x \sin x + (\sin x)^2 \\ &= 2(\cos x)^2 + 2(\sin x)^2 \\ &= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 2 \text{ car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

Donc f est bien une fonction affine (constante).

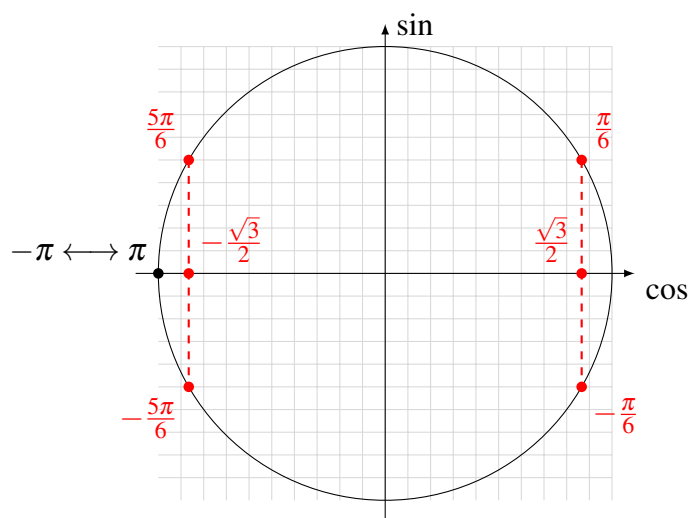
■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 4\cos^2 x - 3 &= 0 \iff 4\cos^2 x = 3 \\ &\iff \cos^2 x = \frac{3}{4} \\ &\iff \cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

On cherche donc tous les angles en radians sur $]-\pi; \pi]$ tels que $\cos x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On trouve alors :

- $x = -\frac{5\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$ pour $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$ pour $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Vecteurs

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

3 juin 2018

■ Exercice 1. Placement de points

★☆☆☆☆

R

Corrigé page 126 ✌

Soit ABC un triangle quelconque.

- 1 Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- 2 Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.
- 3 Démontrer que (CE) et (FB) sont parallèles.

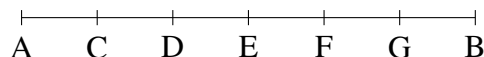
■ Exercice 2. Égalités de vecteurs

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 126 ✌

Le segment suivant est partagé en 6 parties de même longueur.



Compléter les relations suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| 1 $\overrightarrow{E\dots} = -2\overrightarrow{EF}$ | 3 $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\dots}$ | 5 $\overrightarrow{AD} = \dots\overrightarrow{BF}$ |
| 2 $\overrightarrow{C\dots} + \dots\overrightarrow{G} = \vec{0}$ | 4 $\overrightarrow{CE} = \dots\overrightarrow{AB}$ | 6 $\overrightarrow{DE} = \dots\overrightarrow{BF}$ |

■ Exercice 3. Relation de Chasles

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 126 ✌

Simplifier au maximum les écritures suivantes :

- 1 $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
- 2 $\vec{v} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}$
- 3 $\vec{w} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$

■ Exercice 4. Placement de points & alignement de points

★★★★☆ R

Corrigé page 127

ABCD est un parallélogramme.

- 1 Placer les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$$

- 2 Placer les points G et H tels que BAEG et BAFH sont des parallélogrammes.
- 3 Démontrer que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DE}$.
- 4 En déduire que les points C, G et H sont alignés.

■ Exercice 5. Exprimer un vecteur en fonction d'un autre

★★★★☆ A

Corrigé page 127

Soient A et B deux points tels que $AB = 5$ cm.

Soit M le point défini par :

$$-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M.

■ Exercice 6. Construction de points, égalité vectorielle

★★★★☆ R

Corrigé page 128

Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

- 1 Construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$$

et le point N tel que :

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$$

- 2 Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire ?
- 3 Justifier que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.
En déduire la nature de ABNI.

■ Exercice 7. Dans un repère, trouver des coordonnées

★★★★☆ A

Corrigé page 128

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; -3)$, $B(4; -1)$ et $C(-7; 2)$.

- 1 a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
b. En déduire les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
- 2 Déterminer les coordonnées du milieu I de [AD].

■ Exercice 8. Alignement de points & nature d'un triangle

★★★★☆ R

Corrigé page 129

On considère les points $A(2; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-\frac{1}{2}; 2)$ et $D(3; 0)$ dans un repère orthonormé.

- 1 Les points A, B et C sont-ils alignés ?
- 2 Quelle est la nature du triangle ABD ?

■ Exercice 9. Distance & milieu

★★★★☆ A

Corrigé page 129

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

- 1 Placer les points $A(-2; 1)$, $B(1; -2)$ et $C(4; 2)$.
- 2 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.
- 3 Calculer AB , AC et BC . Le triangle ABC est-il rectangle en B ?
- 4 Calculer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.

■ Exercice 10. Alignement de points

★★★★☆ R

Corrigé page 130

ABC est un triangle quelconque. Soient D, E et F les points tels que :

$$\vec{CD} = -\vec{CB} \quad ; \quad \vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AC} \quad ; \quad \vec{BF} = -2\vec{BA}$$

Démontrer que D, E et F sont alignés.

■ Exercice 11. Milieu, centre de gravité, points alignés

★★★★☆ R

Corrigé page 131

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 2)$, $B(3; -4)$ et $C(5; 0)$.

- 1 Calculer les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$.
- 2 Montrer que C appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.
- 3 Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 4 On considère le point $D(-4; -3)$.
Montrer que D, I et C sont alignés.
- 5 Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle BAD.

On considère le point M défini par : $\vec{GM} = \vec{GA} + \vec{GB}$.

- 6 Montrer que D, G, I, M et C sont alignés.

■ Exercice 12. À la recherche d'un nombre

★★★★☆ R

Corrigé page 132

On considère le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on place les points $A(-2; -1)$, $B(1; 2)$ et $C(5; -2)$.

- 1 Quelles sont les coordonnées du milieu I de $[AC]$?
- 2 Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- 3 On considère un point $M(5; y)$, où $y \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur de y telle que A , B et M soient alignés.

■ Exercice 13. Alignement de points

★★★★☆ R

Corrigé page 133

On considère un parallélogramme $ABCD$ puis les points E et F définis par :

$$\vec{BE} = \frac{3}{2}\vec{BD} \quad \text{et} \quad \vec{CF} = \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD}.$$

On souhaite démontrer que les points F , C et E sont alignés.

- 1 Exprimer $\vec{CE}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
- 2 Conclure.

■ Exercice 14. Alignement de points avec un triangle isocèle

★★★★☆ R

Corrigé page 134

On considère un triangle ABC isocèle en B .

Soient D et E deux points définis par les égalités suivantes :

$$\vec{CD} = 2\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AE} = \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}.$$

On souhaite montrer que les points B , E et D sont alignés. Pour cela, on se place dans le repère $(A; \vec{AC}, \vec{AB})$.

- 1 Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$?
- 2 Quelles sont les coordonnées des points D et E ?
- 3 Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{BD}$.
- 4 Conclure.

■ Exercice 15. Exercice récapitulatif

★★★★☆ R

Corrigé page 135

On considère trois points quelconques du plan A, B et C.

On définit alors les points E, F et G tels que :

- $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} + k\overrightarrow{AC}$ où k est un nombre réel.

1 Déterminer la valeur de k telle que les points A, E et F soient alignés.

2 Construire alors la figure.

3 Exprimer $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Les points C, F et G sont-ils alignés ?

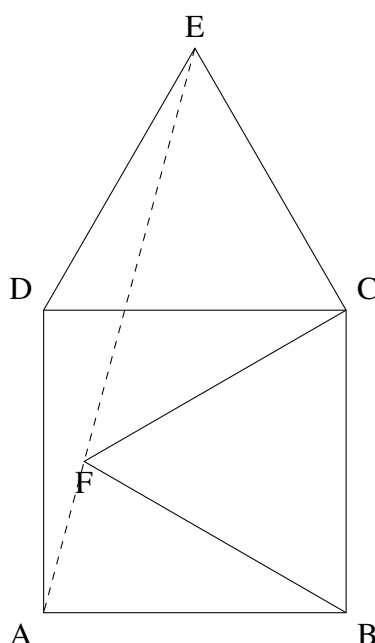
4 Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ME} = \vec{0}.$$

■ Exercice 16. Triangles équilatéraux et points alignés

★★★★☆ R

Corrigé page 136



Soit ABCD un carré. Les triangles DEC et BCF sont équilatéraux.
La figure est reportée dans repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$.

1 Déterminer les coordonnées des points E et F.

2 Montrer que E, F et A sont alignés.

■ Exercice 17. Prendre des initiatives

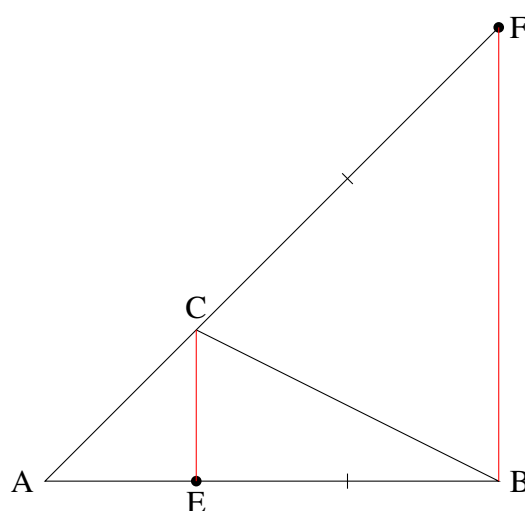


Corrigé page 137

Soit ABCD un parallélogramme.

- 1 Placer le point E tel que $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
- 2 Placer le point F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
- 3 Démontrer que les points C, E et F sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On sait que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ par construction. Ainsi, $\frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (CE) et (BF) sont parallèles.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EF}$

3 $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$

5 $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BF}$

2 $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$

4 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

6 $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

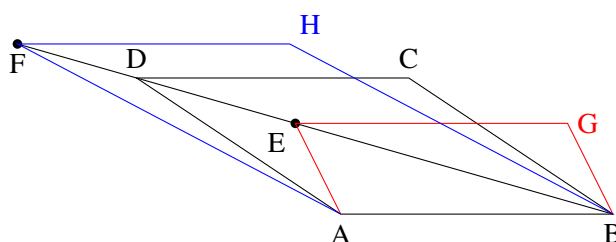
1 $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$
 $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
 $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
 $\vec{u} = \overrightarrow{AA}$
 $\vec{u} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
2 \quad \vec{v} &= \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} \\
\vec{v} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} \\
\vec{v} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} \\
\vec{v} &= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} \\
\vec{v} &= \underline{\overrightarrow{DE}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3 \quad \vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \\
\vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} \\
\vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} \\
\vec{w} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \\
\vec{w} &= \underline{2\overrightarrow{BA}}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)



- 3 On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FH}$ car BADC et BAFH sont des parallélogrammes.
Donc CDFH est un parallélogramme.
Ainsi, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}$.

De même, BAEG et BADC sont des parallélogrammes, donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{DC}$, ce qui implique que GEDC est un parallélogramme.
Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}$.

- 4 On sait que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ et que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CG}$ (d'après la question précédente). Donc, $\frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CG}$.

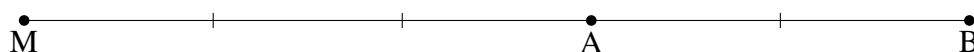
De même, $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CH}$. Donc $-\frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CH}$.

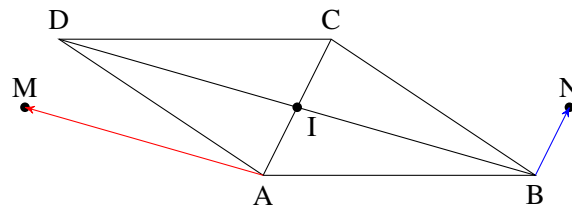
Ainsi, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun donc C, H et G sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\
-5\overrightarrow{MA} + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) &= \vec{0} \\
-5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\
-2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\
2\overrightarrow{AM} &= -3\overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{AM} &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$





2 $\vec{IM} + \vec{IN} = \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID}$.
 Or, $\vec{ID} = -\vec{IB}$ et $\vec{IC} = -\vec{IA}$.
 Donc, $\vec{IM} + \vec{IN} = \vec{0}$.

On en déduit alors que I est le milieu de [MN].

3 On sait que $\vec{IN} = \vec{IB} + \vec{IC}$ (par construction) et que $\vec{IN} = \vec{IB} + \vec{BN}$ (d'après la relation de Chasles).
 Ainsi, $\vec{IB} + \vec{BN} = \vec{IB} + \vec{IC}$ et donc $\vec{BN} = \vec{IC}$.

I étant le milieu de [AC], $\vec{IC} = \vec{AI}$.

Ainsi, $\vec{IC} = \vec{AI} = \vec{BN}$ donc ABNI est un parallélogramme.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; -3)$, $B(4; -1)$ et $C(-7; 2)$.

1 a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 $\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} -7 - (-2) \\ 2 - (-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.
 Ainsi, $\vec{AB} + \vec{AC} \begin{pmatrix} 6 + (-5) \\ 2 + 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\vec{AB} + \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}$.

b. $ABDC$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - (-2) \\ y_D - (-3) \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D + 2 \\ y_D + 3 \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x_D + 2 \\ 7 = y_D + 3 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 - 2 = -1 \\ y_D = 7 - 3 = 4 \end{cases}$

Ainsi, $D(-1; 4)$.

$$\begin{aligned}
2 \quad I \text{ milieu de } [AD] &\iff \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} \\
&\iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I - (-2) \\ y_I - (-3) \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_I + 2 \\ y_I + 3 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x_I = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ y_I = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$x_{\overrightarrow{AC}} = \frac{5}{2}x_{\overrightarrow{AB}} \text{ et } y_{\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{2}y_{\overrightarrow{AB}}.$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$2 \quad AB^2 = x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2 = 1 + 4 = 5.$$

$$AD^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = 1 + 1 = 2.$$

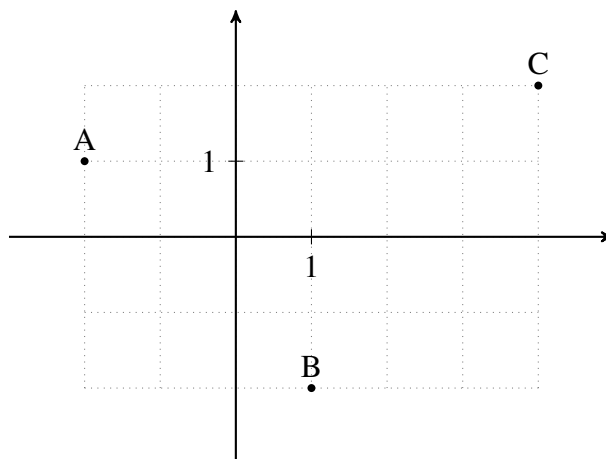
$$BD^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = 4 + 1 = 5.$$

Donc le triangle ABD est isocèle en B sans être rectangle.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Placement des points A, B et C :



$$2 \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ -2 - 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 2 - 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$3 \quad AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}.$$

$$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Le triangle ABC n'est manifestement pas rectangle car $37 \neq 18 + 25$.

$$4 \quad I \left(\frac{1+4}{2}; \frac{-2+2}{2} \right), \text{ soit } I \left(\frac{5}{2}; 0 \right).$$

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

D'une part, nous avons : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB}$$

$$2\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB}.$$

D'autre part, nous avons : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$$

$$= 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA}$$

$$= 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB}$$

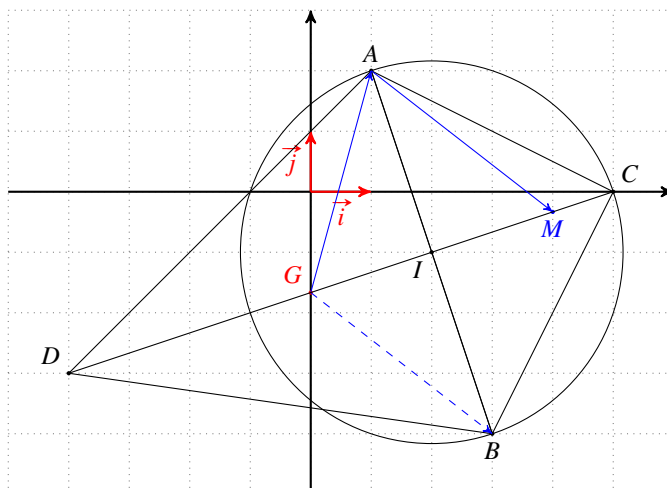
$$= 2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{2}{3}(3\overrightarrow{CA} + 6\overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{2}{3} \times 2\overrightarrow{EF}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{EF}}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont donc colinéaires. Ils ont un point en commun, donc D, E et F sont alignés.



- 1 I est le milieu de $[AB]$ donc :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1$$

Donc $I(2; -1)$.

2 $IC = \sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2}$
 $IC = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - (-1))^2}$
 $IC = \sqrt{9 + 1}$
 $IC = \sqrt{10}$

$$IB = \sqrt{(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2}$$

$$IB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-4 - (-1))^2}$$

$$IB = \sqrt{1 + 9}$$

$$IB = \sqrt{10}$$

$$IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2}$$

$$IA = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-2 - (-1))^2}$$

$$IA = \sqrt{1 + 9}$$

$$IA = \sqrt{10}$$

Ainsi, $IA = IB = IC$ donc A , B et C sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{10}$.

- 3 ABC est inscrit dans $\mathcal{C}$, qui a pour diamètre $[AC]$. Donc ABC est rectangle en C .
 De plus :

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$BC = \sqrt{(5 - 3)^2 + (0 - (-4))^2}$$

$$BC = \sqrt{4 + 16}$$

$$BC = 2\sqrt{5}$$

et

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(5 - 1)^2 + (0 - 2)^2}$$

$$AC = \sqrt{16+4}$$

$$AC = 2\sqrt{5}$$

Donc $AC = BC$. Ainsi, ABC est un triangle rectangle isocèle en C .

- 4 $\vec{DI}(x_I - x_D; y_I - y_D)$ donc $\vec{DI}(6; 2)$.
De plus, $\vec{IC}(x_C - x_I; y_C - y_I)$ donc $\vec{IC}(3; 1)$.

Ainsi, $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{DI}$. Les deux vecteurs sont donc colinéaires. Ils ont un point en commun (I), donc D, I et C sont alignés.

- 5 G est le centre de gravité du triangle BAD donc :

$$x_G = \frac{x_B + x_A + x_D}{3} = \frac{3 + 1 + (-4)}{3} = 0$$

$$y_G = \frac{y_B + y_A + y_D}{3} = \frac{-4 + 2 + (-3)}{3} = -\frac{5}{3}$$

Ainsi, $G(0; -\frac{5}{3})$.

- 6 Par définition, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GD} = \vec{0}$.

Donc, $\vec{GA} + \vec{GB} = -\vec{GD}$.

Ainsi, $\vec{GM} = -\vec{GD}$.

Les deux vecteurs sont donc colinéaires et ont un point en commun (G). Par conséquent, D, G et M sont alignés.

Or, I appartient à (DG) car I est le milieu de $[AB]$ et (DG) est la médiane issue de D dans le triangle BAD .

De plus, D, I et C sont alignés. Donc D, G, I, M et C sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 I milieu de $[AC]$ donc :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2}$$

donc $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

- 2 $ABCD$ est un parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{DC}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x_D \\ -2 - y_D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x_D \\ -2 - y_D \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3 = 5 - x_D \\ 3 = -2 - y_D \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_D = 5 - 3 = 2 \\ y_D = -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

Finalement, $D(2; -5)$.

3 A, B, M sont alignés $\iff \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} \begin{pmatrix} 7 \\ y+1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff 3(y+1) - 3 \times 7 = 0$$

$$\iff 3y + 3 - 21 = 0$$

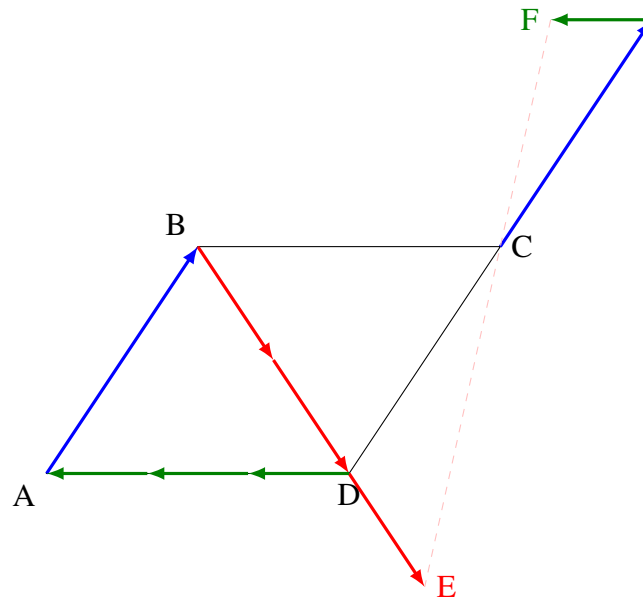
$$\iff 3y = 18$$

$$\iff \underline{y = 6.}$$

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Faisons une figure :



2 $\vec{CE} = \vec{CB} + \vec{BE}$ d'après la relation de Chasles

$$= -\vec{AD} + \vec{BE}$$

car $ABCD$ est un parallélogramme

$$= -\vec{AD} + \frac{3}{2}\vec{BD}$$

d'après l'énoncé

$$= -\vec{AD} + \frac{3}{2}(\vec{BC} + \vec{CD})$$

d'après la relation de Chasles

$$= -\vec{AD} + \frac{3}{2}(\vec{AD} - \vec{AB})$$

car $ABCD$ est un parallélogramme

$$= -\vec{AD} + \frac{3}{2}\vec{AD} - \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{CE} = -\frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

3 On sait désormais que :

$$\begin{aligned}\vec{CE} &= -\frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ \vec{CF} &= \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD}\end{aligned}$$

Or,

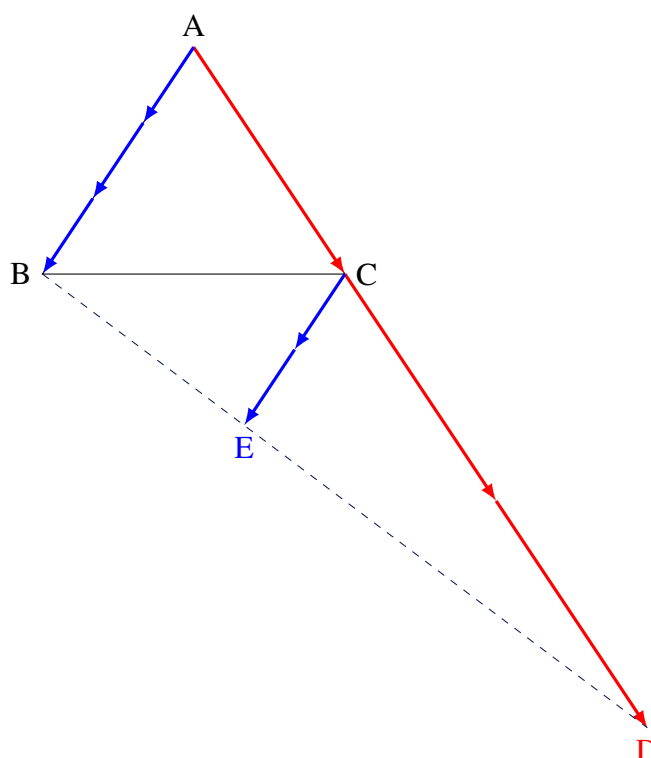
$$\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

donc $\vec{CE}$ et $\vec{CF}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun (le point C) donc C, E et F sont alignés

■ Corrigé de l'exercice 14.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Faisons une figure :



$\vec{AC}$ est le premier vecteur unitaire du repère dans lequel on se place donc $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB}$ est le second vecteur unitaire du repère dans lequel on se place donc $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 $\vec{AD} = 3\vec{AC}$ donc $D(3;0)$.

$\vec{AE} = \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$ donc $E\left(1; \frac{2}{3}\right)$.

3 $\vec{BE} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} \begin{pmatrix} 3-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- 4 $(-1) \times (-1) - 3 \times \frac{1}{3} = 1 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point en commun (le point B) donc B, E et D sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 15.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BG} + k\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$

Ainsi, en prenant $k = \frac{2}{3}$, on a :

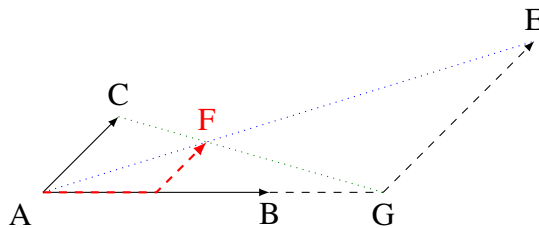
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \right)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce cas, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et donc, A, E et F sont alignés.

- 2 On a la figure suivante :



3 • $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$
 $= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

• $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$
 $= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

On constate alors que :

$$3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires, ce qui implique que C, F et G sont alignés.

4 Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, posons $M(x; y)$.

On a :

- $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $F\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$;
- $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $G\left(\frac{3}{2}; 0\right)$;
- $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ donc $E\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ME} = \vec{0} &\iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x \\ \frac{2}{3} - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - x \\ 0 - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - x \\ 2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2} - x + \frac{3}{2} - x + \frac{3}{2} - x = 0 \\ \frac{2}{3} - y - y + 2 - y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3x = \frac{7}{2} \\ 3y = \frac{8}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ y = \frac{8}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $M\left(\frac{7}{6}; \frac{8}{9}\right)$.

■ Corrigé de l'exercice 16.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Dans le triangle équilatéral DEC, la hauteur issue de E coupe [DC] en son milieu, donc coupe [AB] en son milieu. Ainsi, l'abscisse de E est $\frac{1}{2}$.

Pour trouver l'ordonnée de E, on doit calculer la hauteur de DEC, que l'on ajoutera à 1 (l'ordonnée de D).

Posons H le pied de la hauteur issue de E dans DEC. Alors, DEH est rectangle en H et, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} EH^2 &= DE^2 - DH^2 \\ &= 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \\ EH &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $E\left(\frac{1}{2}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Des calculs précédents, on peut déduire que $F\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

- 2 D'après la question précédente, $\overrightarrow{AF}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{2}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si $xy' = yx'$.

Dans notre cas, nous avons d'une part :

$$\begin{aligned} xy' &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{4} \\ xy' &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} yx' &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ yx' &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $xy' = yx'$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires. Ils ont de plus un point en commun, donc les points A, E et F sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 17.

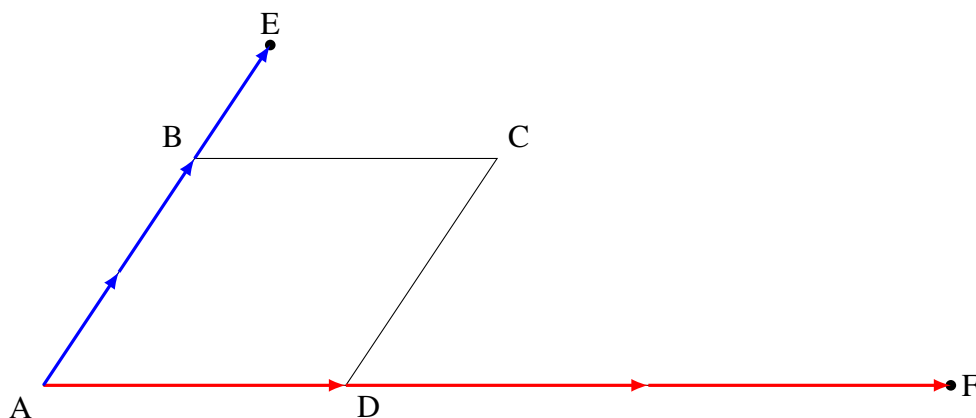
[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le point E est défini par l'égalité : $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Pour construire E, il vaut mieux transformer l'égalité en :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

afin de partir d'un point que l'on connaît (ici, le point B).

- 2 Les points E et F sont disposés ainsi :



3 Plaçons-nous dans le repère $(A; \overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$.

Remarque : le choix du repère importe peu. J'ai choisi en second axe $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ pour simplifier les futures coordonnées, mais rien ne nous empêche de nous placer dans le repère $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ ou tout autre repère.

Dans ce repère, $C(1; 2)$, $E(0; 3)$ et $F(3; 0)$. Ainsi,

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} x_E - x_C \\ y_E - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On a $(-1) \times (-2) - 1 \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. Or, ils ont un point en commun (le point C) donc E, C et F sont alignés.

Géométrie dans l'espace

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

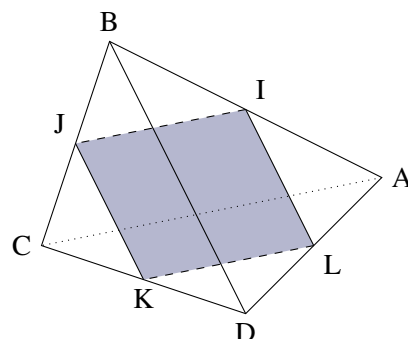
■ Exercice 1. Tétraèdre & parallélogramme

★★★★☆ **R**

Corrigé page 144 ✌

Soit un tétraèdre quelconque $ABCD$. I , J , K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

Prouver que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme



■ Exercice 2. Cube & section

★★★★☆ **R**

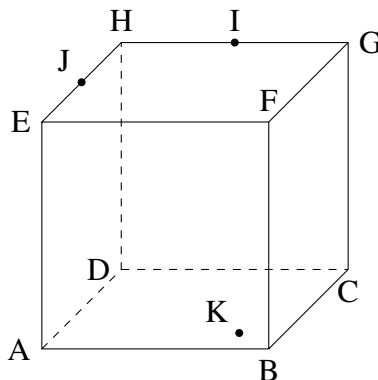
Corrigé page 144 ✌

$ABCDEFGH$ est un cube.

I et J sont respectivement le milieu de $[GH]$ et $[EH]$.

K est dans le plan (BCD) .

Tracer la section du cube par le plan (IJK) .

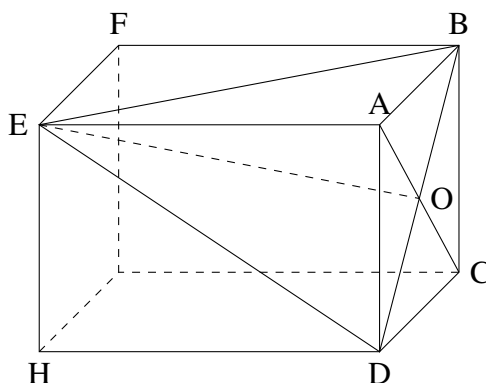


■ Exercice 3. Parallélépipède, distance & volume

★★★★☆ A

Corrigé page 144

Voici le dessin, en perspective cavalière, d'un parallélépipède rectangle de 8 cm de longueur. La face ABCD est un carré de 4 cm de côté et de centre O.



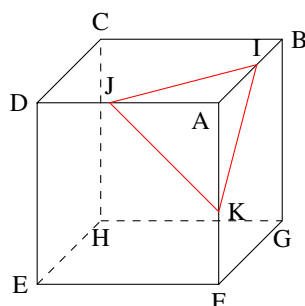
- 1 Calculer les distances BD, DE et EB.
- 2 Que dire du triangle EBD ?
- 3 Pourquoi la droite (EO) est-elle perpendiculaire à la droite (BD) ? Calculer EO.
- 4 On considère la pyramide de sommet E et de base le carré ABCD. Calculer le volume de cette pyramide.

■ Exercice 4. Cube, distance, volume & aire

★★★★☆ R

Corrigé page 145

Sur les arêtes d'un cube, on marque les points I, J, K tels que : $AI = AJ = AK = x$, où x est un réel donné strictement positif et strictement inférieur à la longueur a de l'arête du cube.



- 1 Pourquoi le triangle IJK est-il équilatéral ?
Exprimer son aire en fonction de x .
- 2 Comment appelle-t-on le solide AIJK ?
Calculer son volume.
- 3 La perpendiculaire menée par A au plan (IJK) coupe ce plan en H. Calculer AH en fonction de x .

■ Exercice 5. Droites & plans parallèles et sécants

★★★★☆

A

Corrigé page 146

On considère le cube de l'exercice 2.

- 1 Citer toutes les arêtes
 - a. qui sont parallèles à (AB)
 - b. qui coupent (AB)
 - c. qui ne sont pas coplanaires avec (AB)
- 2 Citer toutes les faces du cube
 - a. qui sont parallèles à (AB)
 - b. qui coupent (AB)
- 3 Citer toutes les faces du cube
 - a. qui sont parallèles à (ABCD)
 - b. qui coupent (ABCD)
- 4 Soit I le milieu de [EF] et J celui de [FG]. Les droites (DF) et (IJ) sont-elles coplanaires ?
- 5 Représenter la droite d'intersection des plans (ACH) et (BDF).
- 6 Soient P et Q les centres des faces EFGH et ABFE.
 - a. Montrer que la droite (QP) est parallèle au plan (ADHE).
 - b. Montrer que les plans (QEP) et (ADHE) sont sécants suivant une droite Δ parallèle à (IJ).
 - c. Représenter Δ dans le plan (ADHE) en précisant son intersection M avec (AD), puis la représenter dans l'espace.
- 7 Le côté du cube mesure 4 cm. On considère les points U et V tels que $\overrightarrow{BU} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BV} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, ainsi que les points W et Z tels que $\overrightarrow{EW} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.
 - a. Montrer que les droites (UV) et (AC) sont parallèles.
 - b. Montrer que les droites (WZ) et (EG) sont parallèles.
 - c. En déduire que les droites (UV) et (WZ) sont parallèles.
- 8 Soit K le milieu de [BF]. Montrer que le plan (IJK) est parallèle au plan (BEG).

■ Exercice 6. Cube et angle au centre

★★★★☆

R

Corrigé page 147

Soit ABCDEFGH un cube d'arêtes de longueur a . Soit O le centre du carré ABCD. Soit I le milieu du segment [BC].

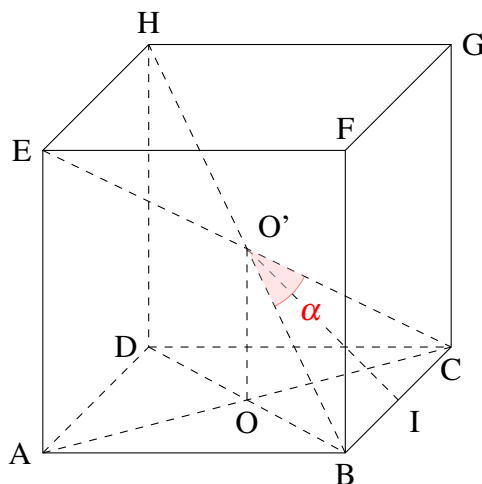
- 1
 - a. Démontrer que la droite (EH) est orthogonale au plan (ABF).
 - b. Montrer que EBCH est un rectangle. Ses diagonales se coupent en O'.

2 On appelle α la mesure de l'angle $\widehat{BO'C}$.

a. Démontrer que les droites $(O'I)$ et (EB) sont parallèles.

b. En déduire que $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$.

c. Déterminer une valeur approchée de α .



■ Exercice 7. Pyramide et intersection



Corrigé page 147

On considère la pyramide $SABCD$, de sommet S et telle que $ABCD$ est un parallélogramme. Soit M un point de $[SC]$ et N un point de $[SB]$ tels que (MN) est parallèle à (BC) .

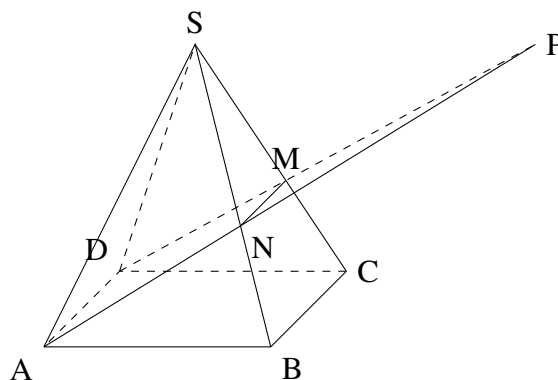
1 Montrer que (AD) et (MN) sont parallèles.

2 Dans le plan (ADM) , (AN) et (DM) se coupent en P .

a. Démontrer que P appartient aux plans (SAB) et (SCD) .

b. Pourquoi la droite d'intersection de (SAB) et (SCD) est-elle (SP) ?

c. En déduire que (SP) est parallèle à (AB) et à (CD) .



■ Exercice 8. Construction d'un cube et d'une pyramide

★★★★☆ A

Corrigé page 148 🙌

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête 1, tel que les faces $ABCD$ et $EFGH$ d'une part, $EHAD$ et $FGBC$ d'autre part, soient parallèles.

On construit alors le point S de sorte que $EFGHS$ soit une pyramide dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On appelle O le pied de sa hauteur issue du sommet S .

- 1 Représenter la figure ; situer le point O .
- 2 Calculer la diagonale du cube AF .
- 3 Le point S appartient-il au plan (HFA) ? Justifier.
- 4 Calculer OS , puis le volume de la pyramide.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Dans le triangle BCD :

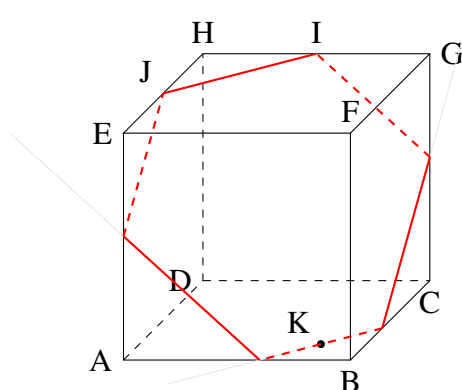
- K est le milieu de [CD]
- J est le milieu de [BC]

Donc, d'après le théorème des milieux, (JK) et (BD) sont parallèles et $BD = 2JK$.

De même, dans le triangle BDA, (IL) et (BD) sont parallèles et $BD = 2IL$.

Ainsi, (IL) et (JK) sont parallèles et $IL = JK$. Donc IJKL est un parallélogramme.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le triangle BDC est rectangle en C. Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = CD^2 + CB^2$$

$$BD^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

$$\underline{BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}}$$

Le triangle DAE est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$DE^2 = DA^2 + AE^2$$

$$DE^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$

$$\underline{DE = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}}$$

De plus, les triangles BAE et DAE sont isométriques (ils ont les mêmes mesures) donc $BE = ED$.

2 BE = ED donc le triangle BDE est isocèle en E.

De plus, $BE^2 + DE^2 \neq BD^2$ donc il n'est pas rectangle.

3 Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est confondue avec la médiatrice du côté opposé à ce sommet.

Or, O est le milieu de [BD]. Donc (EO) est la hauteur issue de E dans le triangle BDE. Ainsi, (EO) est perpendiculaire à (BD).

Dans le triangle BOE rectangle en O, on a :

$$BE^2 = BO^2 + EO^2$$

$$80 = 8 + EO^2$$

$$EO^2 = 80 - 8 = 72$$

$$OE = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

4 Le volume d'une pyramide est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ représente l'aire de sa base. Ainsi, le volume de la pyramide ABCDE est :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 6\sqrt{2}$$

$$\mathcal{V} = 32\sqrt{2}$$

Le volume de la pyramide est donc égal à $32\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 IJ = JK = KI car les triangles AIJ, AJK et AKI sont isométriques (ils ont les mêmes mesures).
 $IK^2 = AI^2 + AK^2 = 2x^2$ donc $IK = x\sqrt{2}$.

De plus, les hauteurs ont une mesure égale à $\sqrt{2x^2 - \frac{1}{2}x^2} = x\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$.

Donc l'aire de IJK est :

$$\mathcal{A} = \frac{\frac{x}{2}\sqrt{3} \times x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}x^2$$

2 Le solide AIJK s'appelle un tétraèdre ou une pyramide. Son volume est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$$

où ici, $\mathcal{B}$ représente l'aire de la base AKJ et h la hauteur AI. Donc :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} \times x$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{6}x^3}$$

- 3 Le volume du tétraèdre peut aussi se calculer à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{IJK} \times AH$$

Donc :

$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4}x^2 \times AH$$

D'où :

$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{\sqrt{6}}{12}x^2 \times AH$$

Donc :

$$AH = \frac{1}{6}x^3 \times \frac{12}{x^2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}x$$

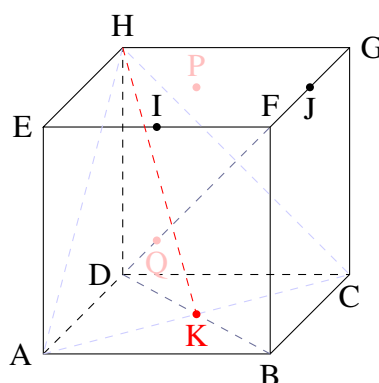
Soit :

$$AH = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1
 - a. Les arêtes qui sont parallèles à (AB) sont : (DC), (EF), (GH), (EH), (FG), (DH) et (GC).
 - b. Les arêtes qui coupent (AB) sont : (AD), (BC), (FB) et (EA).
 - c. Les arêtes qui ne sont pas coplanaires avec (AB) sont : (EA), (CG), (DH), (FB), (EF), (FG), (HG) et (EH).
- 2
 - a. Les faces du cube qui sont parallèles à (AB) sont : (EFGH) et (DCGH).
 - b. Les faces du cube qui coupent (AB) sont : (BCGF), (ADHE), (ABEF) et (ABCD)
- 3
 - a. La face du cube qui est parallèle à (ABCD) sont : (EFGH).
 - b. Les faces du cube qui coupent (ABCD) sont : (ABFE), (DCGH), (BCGF) et (ADHE).
- 4 Les points I, J et F sont coplanaires puisque appartenant au plan (EFG). Or, D n'appartient pas à ce plan, donc (DF) non plus. Ainsi, (IJ) et (DF) ne sont pas coplanaires.
- 5 La figure est la suivante :



H appartient au plan (DFB) et au plan (ACH). Il en est de même pour l'intersection des droites (AC) et (DB), que nous nommerons K.

Ainsi, la droite d'intersection des plans (DFB) et (ACH) est la droite (HK).

- 6 a. Dans le triangle AFH, P est le milieu de [FH] et Q celui de [AF] donc, d'après le théorème des milieux, (PQ) et (AH) sont parallèles.
Or, la droite (AH) est dans le plan (ADHE). Ainsi, comme P et Q ne sont pas dans le plan (ADHE), la droite (QP) est parallèle au plan (ADHE).
- b. L'intersection du plan (ADHE) et du plan (QPE) existe car E appartient à chacun de ces plans. Donc l'intersection est une droite dans (ADHE) passant par E. Or, (IJ) coupe (ADHE) en un point qui n'est pas E.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 a. Le plan (ABF) est aussi la face (ABFE); donc (EH) est bien perpendiculaire à (ABF) car ABCDEFGH est un carré.
- b. ABCDEFGH est un carré donc [EH] et [BC] sont parallèles et de même longueur.
Ainsi, EBCH est un parallélogramme.
De plus, (BE) et (BC) sont perpendiculaires car (BC) est perpendiculaire au plan (BEF).
Ainsi, EBCH est un rectangle.
- 2 a. On sait que $BO' = CO'$ et que I est le milieu de [BC]. Ainsi, (IO') est perpendiculaire à (BC) comme la hauteur issue du sommet principal du triangle isocèle $BO'C$.
De plus, (BE) est aussi perpendiculaire à (BC) donc (BE) et (IO') sont parallèles.
- b. Le triangle BEC est rectangle en B donc son cercle circonscrit a pour diamètre [CE].
Les angles $\widehat{BO'C}$ et $\widehat{BEC}$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$ et comme $\widehat{BO'C}$ est un angle au centre, sa mesure est le double de celle de $\widehat{BEC}$.
Ainsi, $\widehat{BEC} = \frac{\alpha}{2}$.
- c. Dans le triangle BEC rectangle en B,

$$\tan \widehat{BEC} = \frac{BC}{EB}.$$

Or, $EB^2 = AB^2 + AE^2 = 2a^2$, donc $EB = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Ainsi,

$$\tan \widehat{BEC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où : $\widehat{BEC} \approx 35^\circ$, soit $\alpha \approx 2 \times 35 \approx 70^\circ$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 On sait que (MN) // (BC) (par hypothèse) et (AD) // (BC) (car ABCD est un parallélogramme).
Si deux droites sont parallèles à une même autre droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc (AD) // (MN).
- 2 a. Par définition, P est sur la droite (AN) et (AN) appartient au plan (SAB). Ainsi, P appartient au plan (SAB).
- b. S appartient aux plans (SAB) et (SCD), donc il appartient à l'intersection de ces deux plans.
P appartient à (SAB) (d'après la question précédente) et il appartient aussi à (SCD) car il est sur la droite (DM) qui est incluse dans le plan (SCD).
Ainsi, P appartient aussi à l'intersection des plans (SAB) et (SCD).
Or, l'intersection de deux plans non confondus (ce qui est le cas ici) est une droite.
Donc l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est donc la droite (SP).

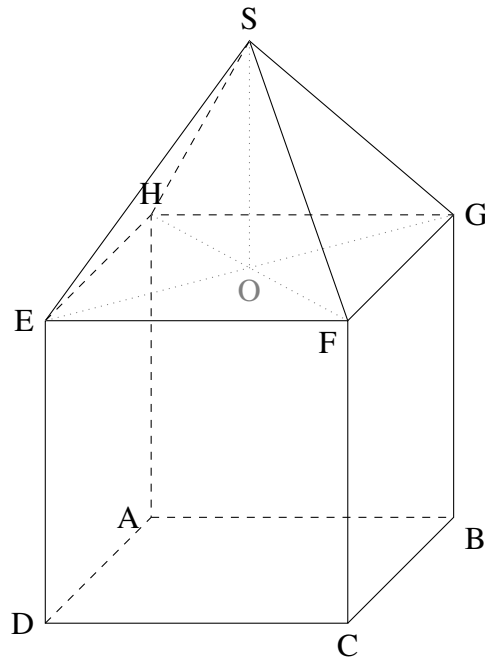
c. On sait que $(AB) \parallel (CD)$. Or, si deux plans sont sécants et contiennent deux droites parallèles, alors l'intersection des deux plans est une droite parallèle aux deux autres droites (théorème du toit).

Ainsi, comme (SAB) et (SCD) sont sécants suivant (SP) , (SP) est parallèle à (AB) et (CD) .

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Voici une figure possible :



2 Dans le triangle DAC rectangle en D, on a :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Dans le triangle ACF rectangle en C, on a :

$$AF^2 = AC^2 + FC^2 = 2 + 1^2 = 3.$$

Ainsi, $AF = \sqrt{3}$.

3 $(OS) \parallel (AH)$ car ces deux droites sont toutes les deux perpendiculaires à (HF) . Le point O appartenant au plan (HFA) , la droite (OS) aussi.

Donc S appartient au plan (HFA) .

4 Dans le triangle FOS rectangle en O, on a :

$$OS^2 = FS^2 + OF^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, $OS = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le volume de la pyramide est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times OS \times \mathcal{A}_{EFGH} \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times (1 \times 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Statistiques

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

3 juin 2018

■ Exercice 1. Caractères discrets : moyenne, e.c.c. et médiane

★★★★★

A

Corrigé page 152 📄

Le tableau ci-dessous donne la répartition des diverses notes d'une classe de 35 élèves à un contrôle.

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35

- 1 Recopier et compléter ce tableau en calculant les fréquences à 10^{-3} près, et les effectifs cumulés croissants et décroissants.
- 2 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
- 3 Donner la médiane de la série statistique.
- 4 Calculer la moyenne de la série statistique et comparer à la médiane.

■ Exercice 2. Moyenne, e.c.c. & médiane avec classes

★★★★★

A

Corrigé page 153 📄

Un relevé des durées des communications téléphoniques effectué dans un central téléphonique a fourni les informations consignées dans le tableau suivant (l'unité de durée est la minute) :

Intervalles de durée	[0;2[	[2;4[	[4;6[	[6;8[	[8;10[	[10;12[
Effectifs	14	16	25	15	17	13

- 1 Calculer la durée moyenne d'un appel.
- 2 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants puis celui des effectifs cumulés décroissants.
- 3 Déterminer alors une valeur approchée de la médiane de cette série par lecture graphique.
- 4 Calculer de façon précise la médiane.
- 5 Déterminer graphiquement les premier et troisième quartile.
- 6 Construire le diagramme en boîte de cette série.

■ Exercice 3. Calcul d'effectifs, diagramme en barres

★★★★★

A

Corrigé page 155

Voici les températures moyennes du mois de mars 2006 à Larribar-Sorhapuru :

6.2 - 8.2 - 12 - 15 - 6.3 - 5.6 - 7.5 - 12.1 - 10.9 - 7.9 - 8.6 - 9 - 10 - 14.1 - 11.6 - 10.3 - 10.2 - 11.9 - 12.5 - 13.2 - 12.6 - 11.2 - 12.7 - 16.6 - 17.3 - 19.8 - 18.6 - 13.5 - 15.2 - 18.5 - 17.8

- 1 Calculer les effectifs des classes $[5; 8[$, $[8; 11[$, $[11; 14[$, $[14; 17[$ et $[17; 20]$.
- 2 Représenter ces classes par un diagramme en barres.

■ Exercice 4. Calculs avec classes

★★★★★

A

Corrigé page 155

On considère la série statistique suivante :

Classes	$[0; 3[$	$[3; 6[$	$[6; 12[$	$[12; 20[$	$[20; 25]$
Effectifs	10	15	10	20	25

- 1 Représenter cette série statistique par un histogramme.
- 2 Calculer les effectifs cumulés croissants et les représenter graphiquement. En déduire une valeur approchée de la médiane de la série statistique.
- 3 En assimilant chaque classe à son centre, calculer une valeur approchée de la moyenne de la série statistique.

■ Exercice 5. Salaires dans une entreprise

★★★★★

A

Corrigé page 156

Dans une entreprise, on relève les salaires des personnes y travaillant et on reporte les résultats dans un tableau :

Salaires (en €)	$]1\,250; 1\,350]$	$]1\,350; 1\,450]$	$]1\,450; 1\,650]$	$]1\,650; 1\,750]$	$]1\,750; 1\,950]$	$]1\,950; 2\,150]$	$]2\,150; 2\,550]$	$]2\,550; 3\,550]$
Effectifs	32	28	17	35	12	15	10	5
E.c.c.								
Fréquences (%)								

- 1 Déterminer la classe modale et l'étendue de cette série statistique.
- 2 Compléter le tableau précédent. On arrondira les fréquences au centième.
- 3 Construire l'histogramme de cette série.
- 4 Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
- 5 Donner la valeur de la médiane m_e et déterminer graphiquement une valeur approchée des premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3 .
- 6 Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série statistique. On donnera une valeur approchée à l'unité.

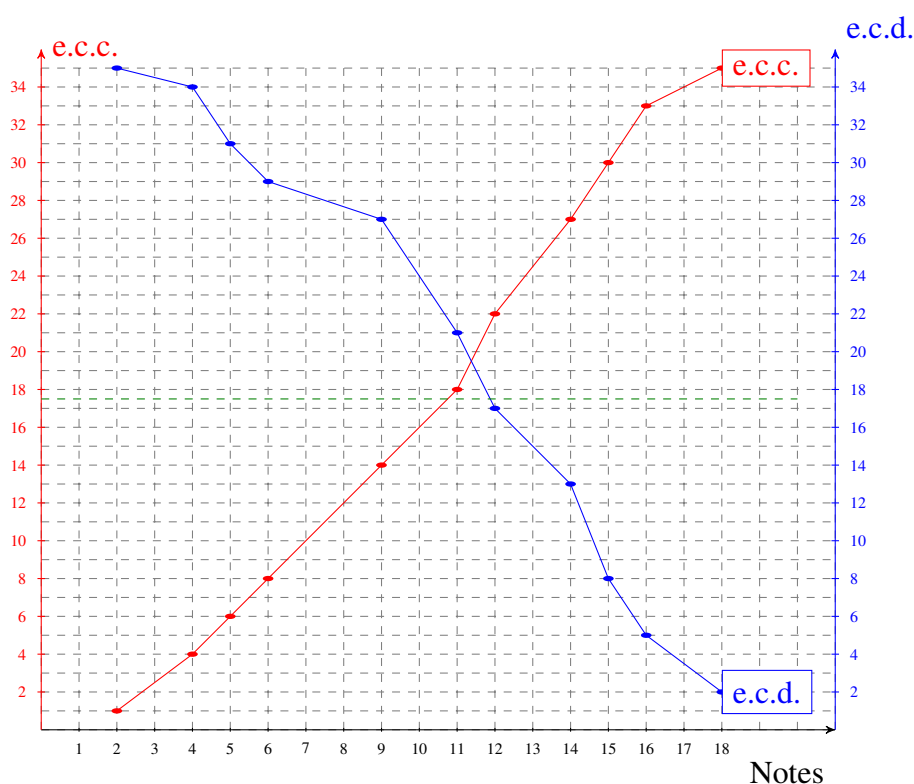
■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le tableau complété est :

Notes	2	4	5	6	9	11	12	14	15	16	18	Total
Effectifs	1	3	2	2	6	4	4	5	3	3	2	35
Fréquences	0,029	0,086	0,057	0,057	0,171	0,114	0,114	0,143	0,086	0,086	0,057	1
e.c.c.	1	4	6	8	14	18	22	27	30	33	35	
e.c.d.	35	34	31	29	27	21	17	13	8	5	2	

2 Les polygones des e.c.c. et e.c.d. sont :



3 Le diagramme précédent nous permet de voir que les e.c.c. et les e.c.d. se coupent au point d'abscisse 11,4 (à peu près), ce qui signifie que 50% des notes sont inférieures à 10,4.

La médiane est donc ici égale à $m_e = 11$.

4 La moyenne de la série statistique est :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + \dots + 15 \times 3 + 16 \times 3 + 18 \times 2}{1 + 3 + 2 + \dots + 3 + 3 + 2} \\ &= \frac{381}{35} \\ \boxed{\bar{x} \approx 10,9}\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

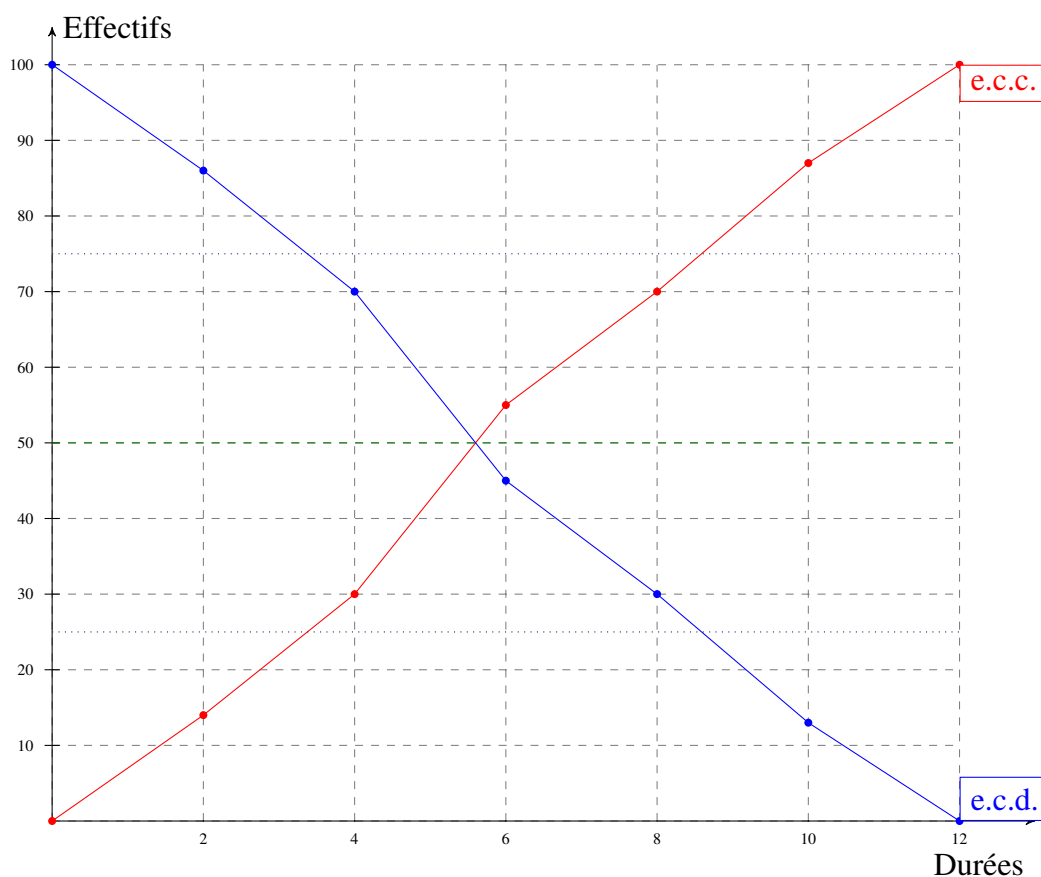
[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 La durée moyenne se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 \times 14 + 3 \times 16 + 5 \times 25 + 7 \times 15 + 9 \times 17 + 11 \times 13}{14 + 16 + 25 + 15 + 17 + 13} \\ \bar{x} &= \frac{588}{100} \\ \bar{x} &= 5,88\end{aligned}$$

La durée moyenne d'un appel est donc d'à peu près 6 minutes.

2 Le polygone des e.c.c. et e.c.d. est le suivant :



3 La médiane correspond graphiquement à l'abscisse du point d'intersection des polygones. Ici, $m_e \approx 5,5$.

- 4 Considérons les points $A_1(4;30)$ et $B_1(6;55)$. L'équation de la droite (A_1B_1) est de la forme : $y = m_1x + p_1$.

$$m_1 = \frac{y_{B_1} - y_{A_1}}{x_{B_1} - x_{A_1}} = \frac{55 - 30}{6 - 4} = \frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_1} et y_{A_1} , on a :

$$p_1 = y_{A_1} - m_1x_{A_1} = 30 - \frac{25}{2} \times 4 = -20$$

Donc $(A_1B_1) : y = \frac{15}{2}x - 20$

Considérons maintenant les points $A_2(4;70)$ et $B_2(6;45)$. L'équation de la droite (A_2B_2) est de la forme : $y = m_2x + p_2$.

$$m_2 = \frac{y_{B_2} - y_{A_2}}{x_{B_2} - x_{A_2}} = \frac{45 - 70}{6 - 4} = -\frac{25}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'équation x et y par x_{A_2} et y_{A_2} , on a :

$$p_2 = y_{A_2} - m_2x_{A_2} = 70 + \frac{25}{2} \times 4 = 120$$

Donc $(A_2B_2) : y = -\frac{25}{2}x + 120$

Soit $M(x_M; y_M)$ le point d'intersection de (A_1B_1) et (A_2B_2) . Alors : $M \in (A_1B_1)$ et $M \in (A_2B_2)$ d'où :

$$y_M = \frac{25}{2}x_M - 20 = -\frac{25}{2}x_M + 120$$

Donc :

$$\frac{25}{2}x_M + \frac{25}{2}x_M = 120 + 20$$

Soit :

$$25x_M = 140$$

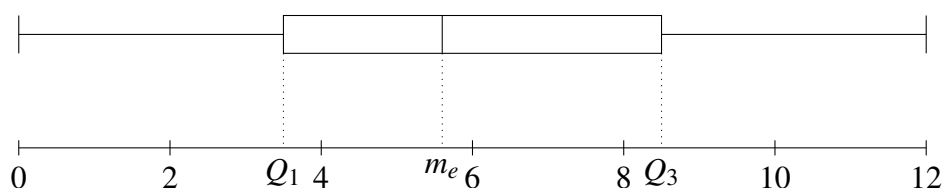
Ainsi :

$$x_M = \frac{140}{25} = 5,6$$

La médiane de la série est donc $m_e = 5,6$.

- 5 Le premier quartile Q_1 est à peu près de $Q_1 \approx 3,5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 25) et $Q_3 \approx 8,5$ (on regarde le polygone des e.c.c. au niveau de la droite à hauteur de 75).

- 6 On a le diagramme en boîte suivant :



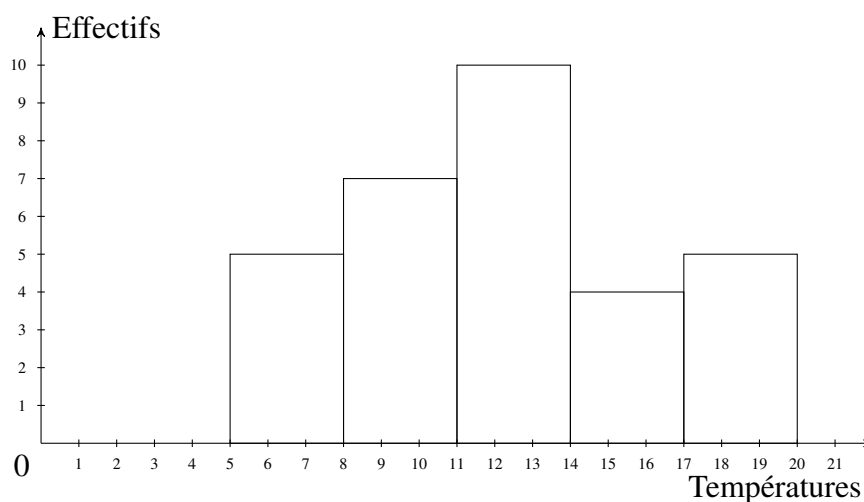
■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On a le tableau suivant :

Classes	[5;8[	[8;11[	[11;14[	[14;17[	[17;20[
Effectifs	5	7	10	4	5

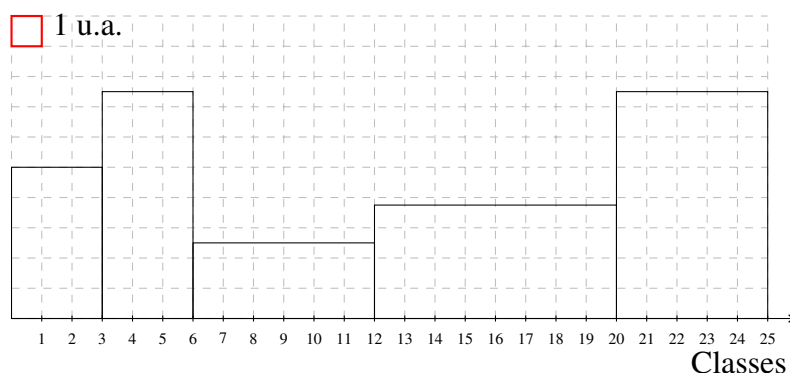
2 Le diagramme en barres est le suivant :



■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'histogramme de la série statistique est le suivant :



J'ai pris ici la correspondance : 10 individus pour 15 u.a.

Exemple de calcul de hauteur d'un rectangle : le rectangle de la classe [12;20[doit correspondre à 20 individus. :

x u.a.	20 individus
15 u.a.	10 individus

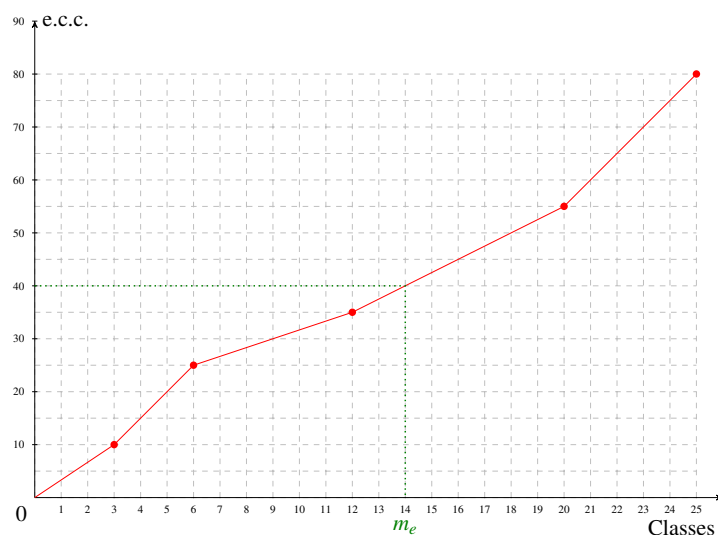
$$x = \frac{15 \times 20}{10} = 30$$

la largeur du rectangle est de 8 unités donc la hauteur h est telle que $8h = 30$, soit $h = \frac{30}{8}$, soit $h = 3,75$.

2 On a :

Classes	[0;3[	[3;6[	[6;12[	[12;20[	[20;25]
Effectifs	10	15	10	20	25
e.c.c.	10	25	35	55	80

D'où le graphique suivant :



On lit alors graphiquement que $m_e \approx 14$.

3 La moyenne est :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 10 + 4,5 \times 15 + 9 \times 10 + 16 \times 20 + 22,5 \times 25}{10 + 15 + 10 + 20 + 25}$$

$$\bar{x} \approx 13,2$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

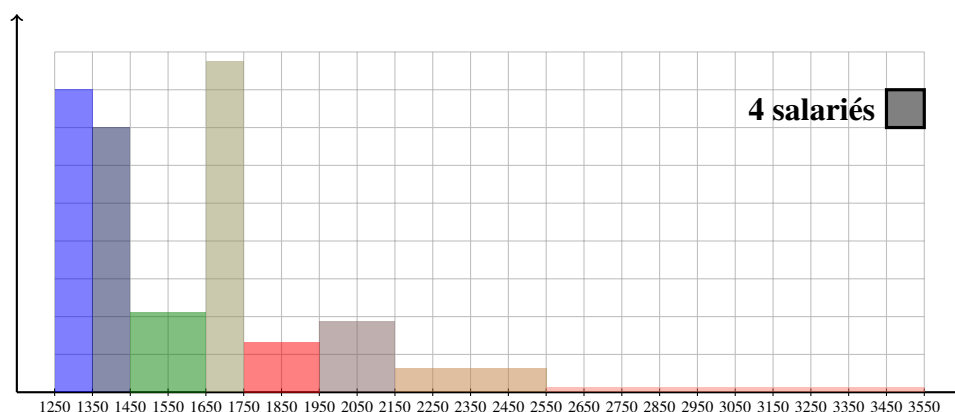
1 La classe modale est la classe pour laquelle l'effectif est le plus grand. Ainsi, la classe modale est $]1\,600; 1\,750]$.

L'étendue est égale à : $3\,500 - 1\,250 = 2\,250$.

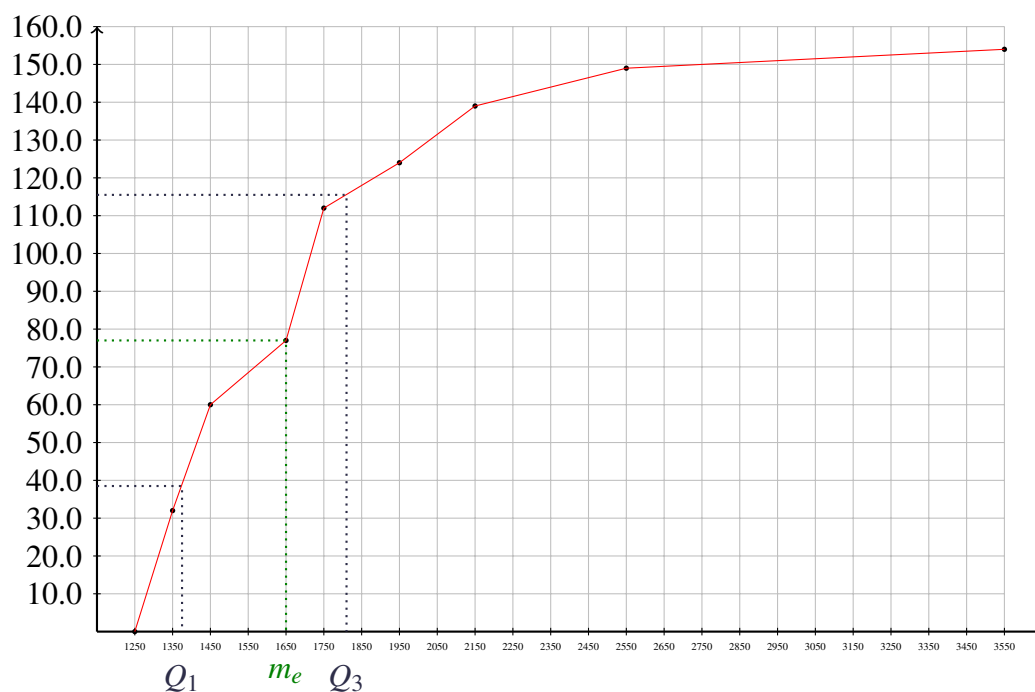
2 On a :

Salaires (en €)	]1 250; 1 350]	]1 350; 1 450]	]1 450; 1 650]	]1 650; 1 750]	]1 750; 1 950]	]1 950; 2 150]	]2 150; 2 550]	]2 550; 3 550]
Effectifs	32	28	17	35	12	15	10	5
E.c.c.	32	60	77	112	124	139	149	154
Fréquences (%)	20,78	18,18	11,04	22,73	7,79	9,74	6,49	3,25

3 L'histogramme de cette série est :



4 Le polygone des effectifs cumulés croissants est :



5 La médiane est atteinte pour un salaire de 1650 € (sur le graphique, on voit que 50% de l'effectif total est 77, et pour une ordonnée de 77, on arrive au point d'abscisse 1650). On voit graphiquement que $Q_1 \approx 1375$ et $Q_3 \approx 1800$.

6 $\bar{x} \approx 1655$. La classe modale, la médiane et la moyenne sont alors très proches.

Probabilités

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

■ Exercice 1. QCM

★★★★★

A

Corrigé page 162 ✌

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples (QCM). Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

- 1** On a lancé 5 fois de suite un dé cubique équilibré, et on n'a jamais obtenu le SIX. La probabilité d'obtenir SIX au 6^e lancer est :

a. inférieure à $\frac{1}{6}$ b. supérieure à $\frac{1}{6}$ c. égale à $\frac{1}{6}$ d. inconnue

- 2** Une famille possède deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux filles ?

a. $\frac{1}{8}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{4}$ d. 1

- 3** On effectue 2 tirages aléatoires successifs et sans remise dans un jeu de 52 cartes ordinaire. Quelle est la probabilité d'obtenir deux cartes identiques ?

a. 1 b. $\frac{1}{16}$ c. 0 d. $\frac{1}{32}$

- 4** On lance deux dés cubiques non truqués. Quelle est la probabilité d'obtenir un « double », c'est-à-dire que les faces des deux dés indiquent le même chiffre ?

a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{36}$ c. 6 d. $\frac{2}{36}$

■ Exercice 2. Lancer de deux dés équilibrés

★★★★★

A

Corrigé page 162 ✌

On lance un dé cubique et un dé tétraédrique (4 faces), tout deux non pipés (c'est-à-dire parfaitement équilibrés).

- 1** Quelle est la probabilité pour que la somme des faces obtenues soit un multiple de 3 ?

- 2** Avec les deux chiffres obtenus, on forme un nombre dont le chiffre des unités est celui obtenu avec le dé cubique et celui des dizaines, obtenu avec le dé tétraédrique.

a. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 3 ?

b. Quelle est la probabilité pour que ce nombre soit un multiple de 2 ?

- 3 Reprendre les questions a et b de la question précédente en considérant maintenant que le chiffre des unités est donné par le dé tétraédrique et celui des dizaines par le dé cubique.

■ Exercice 3. Réunion et intersection

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 164

Un jeu de cartes est constitué de 52 cartes.

Il est composé de 4 « couleurs » : cœur (rouge), carreau (rouge), pique (noire) et trèfle (noire).

Pour chaque couleur, il y a 3 figures : valet, dame et roi.

On tire au hasard une carte de ce jeu.

- 1 Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ?
- 2 Quelle est la probabilité d'obtenir une figure ou une carte rouge ?
- 3 Quelle est la probabilité d'obtenir une figure rouge ou une carte noire qui ne soit pas une figure ?

■ Exercice 4. Avec un dé portant des lettres

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 165

Un dé cubique porte sur chaque face une lettre.

Ce dé est pipé ; le tableau suivant donne les probabilités de chaque face :

A	M	H	T	U	Y
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	?

On lance une fois ce dé. On note :

- Y l'événement : « on obtient la face où figure la lettre Y » ;
- M l'événement : « on obtient une lettre du mot MATH »

- 1 Calculer $P(Y)$.
- 2 Calculer $P(M)$.
- 3 Calculer $P(Y \cap M)$.
- 4 Calculer $P(Y \cup M)$.

■ Exercice 5. Dans un magasin

★★☆☆☆

A

Corrigé page 165

Un petit magasin possède 2 caisses, toujours ouvertes (mais bien sûr pas toujours libres, parfois les caisses sont occupées et il faut attendre). On note :

- C_1 l'événement : « La caisse n°1 est libre »
- C_2 l'événement : « La caisse n°2 est libre »

1 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cap C_2$.

Une étude statistique permet d'affirmer que $P(C_1) = 0,3$, $P(C_2) = 0,4$ et $P(C_1 \cap C_2) = 0,2$.

2 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{C_1}$ puis calculez sa probabilité.

3 Énoncez à l'aide d'une phrase l'événement $C_1 \cup C_2$ puis calculez sa probabilité.

4 Calculez la probabilité qu'il faille attendre, c'est-à-dire qu'aucune des deux caisses ne soient libres.

■ Exercice 6. Dans un sac



Corrigé page 166

Un sac contient 4 jetons, indiscernables au toucher, portant les chiffres 1, 3, 6 et 9.

On tire au hasard un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On note le nombre à deux chiffres obtenu dont les dizaines sont données par le premier jeton extrait et les unités par le second.

Par exemple, le tirage 6 puis 1 conduit au nombre 61.

- 1
- Construire un arbre des possibilités représentant cette expérience aléatoire.
 - Déterminer le nombre d'issues possibles liées à cette expérience.

2 On considère les événements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est un multiple de 3 »

- Déterminer les probabilités des événements A, B et $\overline{B}$.
- Traduire par une phrase l'événement $A \cup B$ puis calculer sa probabilité.
- Traduire par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer sa probabilité.

■ Exercice 7. Changement d'univers



Corrigé page 167

Dans un collège, nous avons réparti les élèves selon leur genre et le moyen de locomotion qu'ils utilisent pour venir en cours. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Moyens de locomotion	Filles	Garçons
En transport en commun	126	148
À vélo	16	10
À pieds	108	84
En voiture	42	30

- 1 On choisit au hasard un élève parmi les 564 élèves de ce collège.
- Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ?
 - Quelle est la probabilité pour que cet élève vienne à vélo ?

c. Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille qui vienne à pieds ?

2 On choisit maintenant un garçon au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'il vienne en voiture ?

3 On choisit maintenant un élève qui vient en transport en commun.

Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

■ Exercice 8. Le digicode



Corrigé page 168

Le digicode d'un immeuble possède un clavier pour saisir un code. Le code est composé de deux chiffres, parmi 1, 2 ou 3, suivis d'une lettre parmi A ou B. Par exemple : 21B est un code possible, tout comme 33A.

Un seul code permet d'accéder au hall de l'immeuble.

1 À l'aide d'un arbre des possibilités, déterminer le nombre de codes possibles.

2 Calculer la probabilité des événements A, B, C, D et E suivants :

- A = « Le code ouvrant l'immeuble est le code 33A » ;
- B = « Le code ouvrant l'immeuble commence par le chiffre 2 » ;
- C = « Le code ouvrant l'immeuble se termine par la lettre A » ;
- D = « Le code ouvrant l'immeuble contient deux fois le même chiffre » ;
- E = « Le code ouvrant l'immeuble ne contient ni le 1, ni le B ».

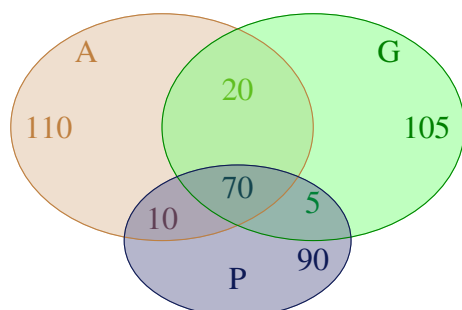
■ Exercice 9. Chez les profs de math



Corrigé page 168

Chaque année, le club des profs de math d'une ville convie chacun de ses membres à une réunion secrète. Cette année, il envoie 420 invitations.

Parmi ces profs de math, il y a ceux qui adorent la géométrie, ceux qui adorent l'algèbre et ceux qui adorent les probabilités. Mais certains peuvent adorer deux des trois disciplines, voire même les trois. La répartition est donnée par le diagramme de VENN suivant :



On choisit un prof au hasard dans cette réunion. On note :

- A est l'événement : « le prof adore l'algèbre » ;
- G est l'événement : « le prof adore la géométrie » ;
- P est l'événement : « le prof adore les probabilités ».

1 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie et les probabilités.

2 Calculer la probabilité pour que le prof adore la géométrie ou les probabilités.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Réponse (c) : $\frac{1}{6}$.

En effet, le dé est équilibré donc chaque face a la même probabilité d'être obtenue, à savoir 1 chance sur 6, quelles que soient les issues obtenues précédemment du lancer.

2 Réponse (c) : $\frac{1}{4}$. En effet, il y a 1 chance sur 2 pour que le 1^{er} enfant soit une fille et autant pour le 2^e enfant, donc la probabilité que les deux enfants soient deux filles est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3 Réponse (c) : 0. Le tirage se fait sans remise, ce qui signifie que la carte obtenue lors du premier tirage n'est pas remise dans le jeu et donc ne peut pas être obtenue lors du second tirage.

4 Réponse (a) : $\frac{1}{6}$. Si on lance deux dés cubiques, il y a $6 \times 6 = 36$ issues possibles :

11,12,13,14,15,16,21,22,23,24,25,26,31,32, ...

Parmi ces 36 issues, 6 donnent deux chiffres identiques (11,22,33,44,55,66), donc la probabilité d'obtenir 2 chiffres identiques est $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

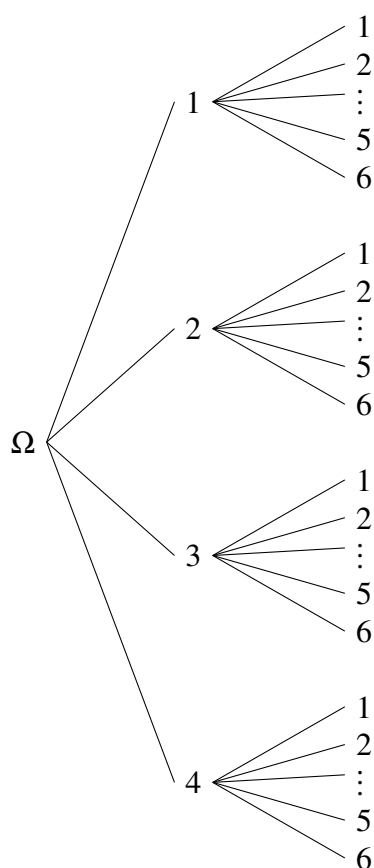
1 Représentons les sommes possibles dans un tableau :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Nous voyons ici qu'il y a $6 \times 4 = 24$ issues possibles. De plus, il y a 8 issues correspondant à une somme qui est multiple de 3. Donc la probabilité d'obtenir une somme multiple de 3 est :

$$p_1 = \frac{8}{24} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_1 = \frac{1}{3}}$$

2 Utilisons un arbre de probabilités pour représenter les différentes issues possibles :



a. Le nombre formé est un multiple de 3 si la somme des chiffres est un multiple de 3. On obtient alors les possibilités suivantes :

12 ; 15 ; 21 ; 24 ; 33 ; 36 ; 42 ; 45.

Il y a donc 8 issues favorables. La probabilité pour que le nombre formé soit un multiple de 3 est alors :

$$p_2 = \frac{8}{24} \quad \text{soit} \quad \boxed{p_2 = \frac{1}{3}}$$

b. Un nombre est un multiple de 2 s'il est pair. Il y a ici $3 \times 4 = 12$ nombres pairs, soit la moitié des issues possibles. La probabilité pour que le nombre formé soit un multiple de 2 est alors :

$$\boxed{p_3 = \frac{1}{2}}$$

3 *a.* Les nombres obtenus multiples de 3 sont :

12 ; 21 ; 24 ; 33 ; 42 ; 51 ; 54 ; 63.

Il y en a 8, donc la probabilité demandée est :

$$\boxed{p_4 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}}$$

b. Les nombres pairs obtenus sont :

12; 14; 22; 24; 32; 34; 42; 44; 52; 54; 62; 64.

Il y en a 12, soit la moitié des cas possibles, donc la probabilité demandée est :

$$p_5 = \frac{1}{2}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Il y a 6 figures rouges (en tout, $4 \times 3 = 12$ figures dont la moitié sont rouges). La probabilité est alors :

$$p_1 = \frac{6}{52} \quad \text{soit} \quad p_1 = \frac{3}{26}$$

- 2 En notant F l'événement « obtenir une figure » et R l'événement « obtenir une carte rouge », on peut écrire :

$$P(F \cup R) = P(F) + P(R) - P(F \cap R).$$

D'après la question précédente, $P(F \cap R) = \frac{3}{26}$.

De plus, $P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ et $P(R) = \frac{1}{2}$ (car il y a autant de cartes rouges que de cartes noires).

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(F \cup R) &= \frac{3}{13} + \frac{1}{2} - \frac{3}{26} \\ &= \frac{6}{26} + \frac{13}{26} - \frac{3}{26} \end{aligned}$$

$$P(F \cup R) = \frac{8}{13}$$

Remarque : on aurait aussi pu raisonner en passant par l'événement contraire, à savoir $\overline{F \cup R}$: « obtenir une carte qui n'est pas une figure et qui est noire ». On en compte en tout $10 \times 2 = 20$ (10 cartes ne sont pas des figures et il n'y a que 2 couleurs noires). Donc la probabilité de l'événement contraire est égale à $\frac{20}{52} = \frac{5}{13}$.

La probabilité demandée au départ est donc égale à $1 - \frac{5}{13} = \frac{13}{13} - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$.

- 3 Pour cette question, il vaut mieux compter les cartes de chaque ensemble car ces deux derniers sont disjoints (ils n'ont pas d'élément en commun).

Il y a 6 figures rouges et 20 cartes noires qui ne sont pas des figures, donc il y a en tout 26 cartes (soit la moitié du jeu).

La probabilité est donc égale à $\frac{1}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 1 \quad P(Y) &= 1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} \right) \\ &= 1 - \frac{13}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y) = \frac{2}{15}}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad P(M) &= \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \\ &= \frac{9}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M) = \frac{3}{5}}$$

$$3 \quad \text{Il n'est pas possible d'avoir une lettre du mot MATH et le Y donc } \boxed{P(Y \cap M) = 0}.$$

$$\begin{aligned} 4 \quad P(Y \cup M) &= P(Y) + P(M) - P(Y \cap M) \\ &= \frac{2}{15} + \frac{3}{5} - 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y \cup M) = \frac{11}{15}}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad C_1 \cap C_2 \text{ est l'événement : « les caisses 1 et 2 sont libres en même temps ».}$$

$$2 \quad \overline{C_1} \text{ est l'événement : « la caisse 1 n'est pas libre ».}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{C_1}) &= 1 - P(C_1) \\ &= 1 - 0,3 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\overline{C_1}) = 0,7}$$

$$3 \quad C_1 \cup C_2 \text{ est l'événement : « la caisse 1 ou la caisse 2 est libre ».}$$

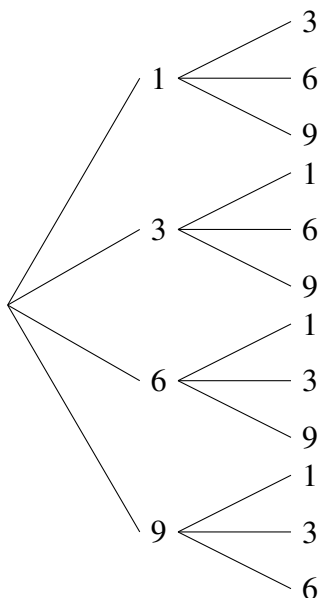
$$\begin{aligned} P(C_1 \cup C_2) &= P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2) \\ &= 0,3 + 0,4 - 0,2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C_1 \cup C_2) = 0,5}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) &= P(\overline{C_1 \cup C_2}) \\ &= 1 - P(C_1 \cup C_2) \\ &= 1 - 0,5 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2}) = 0,5}$$

1 a. L'arbre des possibilités est le suivant :



b. Nous voyons sur l'arbre des possibilités qu'il y a 12 issues possibles.

- 2 a.
- Il y a 3 issues qui représentent des nombres pairs (16, 36 et 96) donc $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
 - Un nombre est un multiple de 3 lorsque la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3. Il y a donc 6 nombres divisibles par 3 (36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
 - $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b. $A \cup B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair ou multiple de 3 » ; il contient donc 7 issues concernées (16, 36, 39, 63, 69, 93 et 96), donc $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$.

c. $A \cap B$ est l'événement : « le nombre obtenu est pair et divisible par 3 » ; il y a donc 2 issues concernées (36 et 96), donc $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

N.B. On aurait aussi pu utiliser la formule :

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{12} \\
 &= \frac{3}{12} + \frac{6}{12} - \frac{7}{12} \\
 &= \frac{2}{12} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

1 L'univers est ici composé de tous les élèves du collège, donc il comporte 564 éléments.

a. Il y a, dans le collège, $148 + 10 + 84 + 30 = 272$ garçons.

Par conséquent, la probabilité de choisir un garçon parmi tous les élèves est :

$$p_1 = \frac{272}{564} \quad \text{soit} \quad p_1 = \frac{68}{141}.$$

b. Il y a $10 + 16 = 26$ élèves qui viennent à vélo.

Par conséquent, la probabilité de choisir un élève qui vient à vélo parmi les élèves du collège est :

$$p_2 = \frac{26}{564} \quad \text{soit} \quad p_2 = \frac{13}{282}$$

c. Il y a 108 filles qui viennent à pieds donc la probabilité de choisir une fille qui vient à pieds parmi les élèves du collège est :

$$p_3 = \frac{108}{564} \quad \text{soit} \quad p_3 = \frac{9}{47}$$

2 L'univers est ici composé des garçons du collège ; il est donc composé de 272 éléments.

Il y a 30 garçons qui viennent en voiture donc la probabilité de choisir un élève qui vient en voiture parmi les garçons est :

$$p_4 = \frac{30}{272} \quad \text{soit} \quad p_4 = \frac{15}{136}$$

3 L'univers est ici composé des élèves qui viennent en transport en commun ; il y a donc $126 + 148 = 274$ éléments dans l'univers.

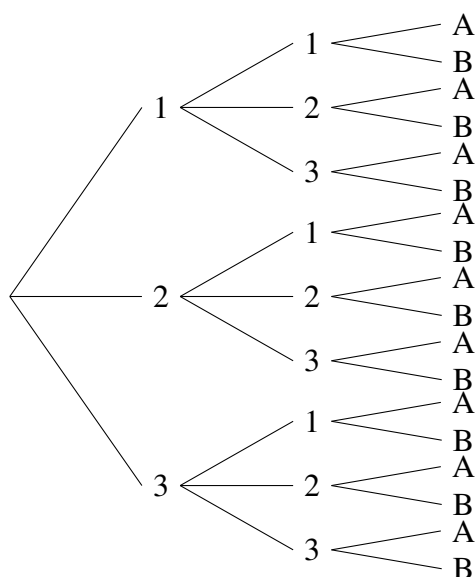
Il y a 126 filles dans cet univers donc la probabilité de choisir une fille parmi les élèves qui viennent en transport en commun est :

$$p_5 = \frac{126}{274} \quad \text{soit} \quad p_5 = \frac{63}{137}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On a l'arbre suivant :



Il y a donc 18 codes possibles.

- 2
- $P(A) = \frac{1}{18}$: il n'y a qu'un code « 33A » sur les 18 codes possibles.
 - $P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ car il y a 6 codes commençant par 2.
 - $P(C) = \frac{1}{2}$: il y a 1 code sur 2 qui finit par A.
 - $P(D) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$: seuls les codes 11A, 11B, 22A, 22B, 33A et 33B conviennent.
 - $P(E) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$: seuls les codes 22A, 23A, 32A et 33A ne contiennent ni le 1, ni le B.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 D'après le diagramme, il y a $70 + 5 = 75$ profs qui adorent les probabilités et la géométrie. Donc :

$$P(G \cap P) = \frac{75}{420} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(G \cap P) = \frac{5}{28}}$$

2 Il y a 110 profs qui ne sont pas dans l'ensemble $P \cup G$ donc :

$$P(P \cup G) = 1 - \frac{110}{420} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(P \cup G) = \frac{31}{42}}$$

Fluctuations et échantillonnage

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

3 juin 2018

■ Exercice 1. Le dé d'Al

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 172 ✌

Al a fabriqué un dé cubique. Il le lance 50 fois et obtient 10 fois la face « 3 ».

- 1 Avec un dé équilibré, quelle est la probabilité d'obtenir la face « 3 » ?
- 2 Peut-on utiliser l'intervalle de fluctuation vu en cours pour déterminer si le dé d'Al est équilibré ?

■ Exercice 2. Le Dédale

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 172 ✌

Le Dédale est un labyrinthe d'un parc de loisirs.

D'après les statistiques observées au cours de la première année d'ouverture de cette attraction, le pourcentage de visiteurs ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 69 %.

La seconde année, sur 1 000 visiteurs, le pourcentage de clients ayant mis plus de 5 minutes pour le traverser était de 66 %.

Doit-on s'inquiéter de cette baisse ?

■ Exercice 3. Influence de la taille d'un échantillon

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 172 ✌

En 2014, selon l'INSEE, la France comptait 51,45 % de femmes.

À des fins de sondages, un institut souhaite constituer un échantillon représentatif de la population concernant la répartition des genres (hommes/femmes).

- 1 Un premier échantillon de 500 personnes est constitué de 55 % de femmes.
Est-il représentatif de la France quant à la répartition des genres ?
- 2 Un second échantillon de 1 000 est constitué de 55 % de femmes ?
Est-il représentatif de la France quant à la répartition des genres ?

■ Exercice 4. Fourchette de sondage

★★★★☆ R

Corrigé page 173

Au second tour d'une élection locale, un candidat souhaite savoir s'il a des chances de gagner. On admettra qu'en théorie, il a une chance sur deux qu'un électeur pris au hasard vote pour lui.

Il commande alors un sondage qui rapporte que sur 800 personnes, 387 ont l'intention de voter pour lui.

- 1 Donner l'intervalle de fluctuation correspondant à ce sondage.
- 2 Ce sondage semble-t-il acceptable au seuil de 95 % ?

■ Exercice 5. Taux de réussite au bac

★★★★☆ R

Corrigé page 173

En 2017, le taux de réussite au bac S était de 91,8 %.

En 2018, au lycée Casimir, d'après le bac blanc effectué en février, 88,7 % des élèves pourraient avoir leur bac.

Le proviseur de ce lycée doit-il sérieusement s'inquiéter ?

■ Exercice 6. Recherche de la taille d'un échantillon

★★★★☆ R

Corrigé page 173

Sur la planète Vailox, on estime à 78 % la proportion de personnes circulant à deux roues.

Dans un village de n habitants de cette planète, le pourcentage de personnes circulant à deux roues est égal à 85 % sans que cela soit incohérent avec les statistiques planétaires.

Donnez la valeur maximale de n .

■ Exercice 7. Inspiré par les comics Marvel (d'après SESAMATH 2014)

★★★★☆ R

Corrigé page 174

Double Face, célèbre ennemi de Batman, utilise une pièce fétiche pour choisir s'il doit gracier ou tuer ses ennemis. Spiderman, fan de Batman, a regardé tous les comics et a constaté que la pièce était tombée 117 fois sur la face vie pour 256 lancers.

Clark Kent pense qu'il y a autant de chances à ce tirage de tomber sur la face mort que sur la face vie.

Catwoman, et son esprit vif comme un félin, pense, elle, que Double Face a truqué la pièce pour laisser seulement à ses proies une chance de survie de 40 %.

Qui de Clark ou de Catwoman peut avoir raison ?

■ Exercice 8. Taux de passage en Premières S et ES

★★★★☆ R

Corrigé page 174

Jusqu'en 2017, dans le lycée Casimir, le taux d'élèves de Seconde souhaitant aller en 1ère S était de 52 %, et celui des élèves souhaitant aller en 1ère ES était de 36 %.

En 2018, ces taux sont égaux à 45 % (pour la 1ère S) et 48 % (pour la 1ère ES).

Quelles devraient être les nombres possibles d'élèves en 2018 pour que ces taux soient acceptables au seuil de 95 % ?

1 Dans un laboratoire pharmaceutique, on souhaite tester un médicament contre la maladie M. Pour cela, on constitue deux groupes :

- le groupe A est constitué de 120 patients atteints de la maladie M ;
- le groupe B est constitué de 150 patients atteints de la maladie M.

On donne le médicament au groupe A et à B, un médicament placebo (qui n'a en théorie aucun effet).

On constate que dans le groupe B, 68 % des malades guérissent et dans le groupe A, 72 % des malades guérissent.

Pouvez-vous dire si le médicament contre la maladie M semble efficace ?

2 On constitue maintenant deux autres groupes :

- le groupe A' est constitué de 900 patients atteints de la maladie M ;
- le groupe B' est constitué de 1 000 patients atteints de la maladie M.

Après avoir donné le médicament au groupe A' et un placebo au groupe B', on s'aperçoit que 65 % du groupe B' et 70 % du groupe A' guérissent.

Que peut-on conclure quant à l'efficacité éventuelle du médicament ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La probabilité d'obtenir la face « 3 » avec un dé équilibré est $p = \frac{1}{6}$.
- 2 L'intervalle de fluctuation correspondant à $n = 50 \geq 25$ lancers et à $p = \frac{1}{6}$ ne peut pas se trouver à l'aide de la formule du cours car $p \notin [0,2; 0,8]$.
- On ne peut donc pas, avec cette formule, vérifier si le dé d'Al est équilibré.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Ici, $n = 1000$ et $p = 0,69$ (69 %).

On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation du pourcentage de clients ayant mis plus de 5 minutes pour traverser le Dédale :

$$I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,69 - \frac{1}{\sqrt{1000}}; 0,69 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0,6584; 0,7216]$$

$f = 0,66 \in I_f$ donc la fluctuation du pourcentage ne semble pas anormale.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Ici, $n = 500$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{500}}; 0,5145 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,4678; 0,5592]$$

$f = 0,55 \in I_f$ donc l'échantillon peut être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

- 2 Ici, $n = 1000$ et $p = 0,5145$. On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ donc on peut utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,5145 - \frac{1}{\sqrt{1000}}; 0,5145 + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0,4829; 0,5461]$$

$f = 0,55 \notin I_f$ donc l'échantillon ne peut pas être considéré comme représentatif de la France concernant la répartition des genres (au risque de se tromper de 5 %).

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % se calcule en prenant $n = 800$ et $p = 0,5$ (probabilité théorique qu'il gagne) :

$$I_f = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{800}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{800}} \right] \approx [0,4647; 0,5353].$$

- 2 $f = \frac{387}{800} \approx 0,48375 \in I_f$. Par conséquent, cette observation semble conforme à nos attentes, donc ce sondage semble conforme au seuil de 95 %.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons $p = 0,918$.

Remarquez que l'on ne connaît pas le nombre d'élèves de Terminale S... mais peu importe car p n'est pas compris entre 0,2 et 0,8 donc on ne peut pas utiliser la formule du cours pour déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Cela dit, ce n'est pas parce que l'on ne peut pas utiliser une formule de mathématiques que l'on ne peut pas utiliser son cerveau... Car ici, 88,7 % n'est pas très éloigné de 91,8 %. Bien sûr, il faut dire ça « avec des pincettes » car dès que l'on parle de pourcentages, tout est relatif au nombre à partir duquel on se base, donc ici du nombre d'élèves. On peut imaginer qu'il y a environ 200 élèves de Terminale S, donc qu'il y a environ $200 \times \frac{88,7}{100} \approx 177$ élèves qui pourraient avoir leur bac, contre en théorie $200 \times \frac{91,8}{100} \approx 184$.

La différence n'est pas significative au point de s'inquiéter.

De plus, ce qui se passe aux bacs blancs n'est pas toujours ce qui se passe au vrai bac : la plupart du temps, il y a plus d'élèves qui ont leur bac que d'élèves qui réussissent à avoir au moins 8/20 (note nécessaire pour au moins aller au rattrapage) au bac blanc.

Le proviseur n'a donc aucune raison de s'inquiéter concernant son taux de réussite en filière S.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Ici, $p = 0,78$. Donc $0,2 \leq p \leq 0,8$. On peut donc utiliser la formule du cours donnant un intervalle de fluctuation :

$$I_f = \left[0,78 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

De plus, $f = 0,85 \in I_f$ car cette fréquence est dite cohérente avec les statistiques planétaires.

On peut donc déduire :

$$\begin{aligned} 0,85 &\leq 0,78 + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \iff 0,85 - 0,78 &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \iff 0,07 &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \iff \frac{1}{0,07} &\geq \sqrt{n} \\ \iff n &\leq \left(\frac{1}{0,07} \right)^2 \\ \iff n &\leq 204,08 \end{aligned}$$

Ainsi, il y a au maximum 204 habitants dans ce village.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons $f = \frac{117}{256} \approx 0,457$ la fréquence de faces « vie » obtenue.

- S'il y avait autant de chances d'obtenir l'une ou l'autre des deux faces de la pièce, alors la probabilité théorique d'obtenir la face « vie » serait $p = 0,5$ et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % serait :

$$I_1 = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{256}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{256}} \right] = [0,4375; 0,5625].$$

$f \in I_1$ donc la pièce pourrait en effet être équilibrée.

- Si, au contraire, la pièce n'était pas équilibrée pour ne donner que 40 % de chances de survie aux proies de Double Face, alors $p = 0,4$ et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % serait :

$$I_2 = \left[0,4 - \frac{1}{\sqrt{256}}; 0,4 + \frac{1}{\sqrt{256}} \right] = [0,3375; 0,4625].$$

$f \in I_2$ donc la pièce aurait pu aussi être truquée.

Conclusion : au seuil de 95 %, on ne peut pas conclure quant à l'équilibre de la pièce de Double Face.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons n le nombre d'élèves dans le lycée Casimir.

- Pour la 1ère S, notons $p_S = 0,52$ la probabilité qu'un élève de Seconde souhaite passer dans cette classe et $f = 0,45$ la fréquence de ces élèves en 2018.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de cette fréquence est :

$$I_S = \left[0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0,52 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

On doit alors avoir :

$$0,52 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,45 \leq 0,52 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

soit, en soustrayant 0,52 à chaque membre de cet encadrement :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq -0,07 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ou encore :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,07$$

et donc :

$$\sqrt{n} \leq \frac{1}{0,07}.$$

Alors,

$$n \leq \frac{1}{0,07^2}$$

Ainsi, $n \leq 204$.

- Pour la 1ère ES, on a l'intervalle suivant :

$$I_{ES} = \left[0,36 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,36 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

et on doit avoir :

$$0,36 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,48 \leq 0,36 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

soit :

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,12 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et en particulier :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,12$$

donc :

$$\sqrt{n} \leq \frac{1}{0,12}$$

soit $n \leq \frac{1}{0,12^2}$, soit $n \leq 69,444$, donc $n \geq 70$.

Ainsi, le nombre d'élèves de Seconde dans le lycée Casimir doit être compris entre 70 et 204.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** Dans cet exercice, la difficulté réside dans la recherche des bons n , p et f pour appliquer la formule du cours donnant un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

Dans la mesure où nous voulons tester l'efficacité du médicament, nous allons prendre $p = 0,68$ et $f = 0,72$, avec $n = 120$. On a bien $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$ donc :

$$I_f = \left[0,68 - \frac{1}{\sqrt{120}} ; 0,68 + \frac{1}{\sqrt{120}} \right] \approx [0,5888 ; 0,7712].$$

On voit alors que $f \in I_f$, ce qui signifie que le vrai médicament n'a pas une influence manifeste par rapport au placebo.

On ne peut donc pas affirmer que le médicament soit efficace, au risque de se tromper de 5 %.

- 2** Ici, on prend $p = 0,65$, $f = 0,7$ et $n = 900$. On a alors :

$$I'_f = \left[0,65 - \frac{1}{\sqrt{900}} ; 0,65 + \frac{1}{\sqrt{900}} \right] \approx [0,62 ; 0,68].$$

On voit alors que $f \notin I'_f$, et même que $f > 0,68$ (borne supérieure de I'_f), ce qui signifie que le médicament donné au groupe A' semble avoir plus d'impact que le placebo.

On peut donc accepter l'hypothèse selon laquelle le médicament agit comme on le souhaite, au risque de se tromper de 5 %.