

Coordonnées

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Fiche

Stéphane PASQUET

30 octobre 2017

Longueur d'un segment

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points quelconques d'un repère orthonormé, alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Dans quel cas utiliser cette formule ?

- Pour calculer une longueur directement ;
- Pour déterminer la nature d'un triangle ;
Dans ce cas, on peut calculer le carré de la longueur de chaque carrés pour éviter la racine carrée :
 - ▶ Si $AB^2 = AC^2 = BC^2$, alors ABC est équilatéral ;
 - ▶ Si $AB^2 = AC^2$, alors ABC est isocèle en A ;
 - ▶ Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est rectangle en A.
- Pour montrer que plusieurs points sont sur un même cercle ;
 - ▶ Si $AB^2 = AC^2 = AD^2$ alors B, C et D sont sur le cercle de centre A et de rayon AB (par exemple).

Milieu d'un segment

Si $I(x_I; y_I)$ est le milieu d'un segment $[AB]$, où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Dans quels cas utiliser cette formule ?

- Pour calculer directement les coordonnées du milieu d'un segment ;
- Pour calculer les coordonnées d'une extrémité du segment connaissant celles de l'autre extrémité et du milieu (voir page suivante).

Par exemple, si on sait que $I(3;-2)$ est le milieu de $[AB]$ où $A(-1;2)$, alors on peut trouver les coordonnées du point B avec :

$$\begin{array}{ll}
 x_I = \frac{x_A + x_B}{2} & y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\
 3 = \frac{-1 + x_B}{2} & -2 = \frac{2 + y_B}{2} \\
 3 \times 2 = -1 + x_B & -2 \times 2 = 2 + y_B \\
 6 = -1 + x_B & -4 = 2 + y_B \\
 6 + 1 = x_B & -4 - 2 = y_B \\
 7 = x_B & -6 = y_B
 \end{array}$$

Donc $B(7;-6)$.

- Si B est le symétrique de $A(-2;3)$ par rapport à $I(8;-7)$ alors on peut déterminer les coordonnées de B en considérant que I est le milieu de $[AB]$.
- Pour déterminer les coordonnées du 4^e sommet d'un parallélogramme.

Par exemple, on donne $A(-1;2)$, $B(3;5)$ et $C(5;-2)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Réponse : si ABCD est un parallélogramme, alors $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu (car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu).

Les coordonnées du milieu I de $[AC]$ sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = 0.$$

Donc $I(2;0)$.

Comme I est aussi le milieu de $[BD]$, on a :

$$\begin{array}{ll}
 x_I = \frac{x_B + x_D}{2} & y_I = \frac{y_B + y_D}{2} \\
 2 = \frac{3 + x_D}{2} & 0 = \frac{5 + y_D}{2} \\
 4 = 3 + x_D & 0 = 5 + y_D \\
 1 = x_D & -5 = y_D
 \end{array}$$

Ainsi, $D(1;-5)$.