

Coordonnées

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Voici une fiche dont Hugo pourra se servir pour réviser ce qui concerne les coordonnées. Il y a en plus un exercice à la fin qu'il pourra tenter de faire sans regarder la correction.

Fiche

Stéphane PASQUET

3 novembre 2014

Longueur d'un segment

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points quelconques d'un repère orthonormé, alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Dans quel cas utiliser cette formule ?

- Pour calculer une longueur directement ;
 - ▶ Calculer une longueur n'a pas vraiment d'intérêt sans question supplémentaire donc il est rare d'avoir à faire cela sans autre chose par la suite comme par exemple ce qui suit :
- Pour déterminer la nature d'un triangle ;

Dans ce cas, on peut calculer le carré de la longueur de chaque carrés pour éviter la racine carrée :

 - ▶ Si $AB^2 = AC^2 = BC^2$, alors ABC est équilatéral ;
 - ▶ Si $AB^2 = AC^2$, alors ABC est isocèle en A ;
 - ▶ Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ABC est rectangle en A.
- Pour montrer que plusieurs points sont sur un même cercle ;
 - ▶ Si $AB^2 = AC^2 = AD^2$ alors B, C et D sont sur le cercle de centre A et de rayon AB (par exemple).

Milieu d'un segment

Si $I(x_I; y_I)$ est le milieu d'un segment $[AB]$, où $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad ; \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Dans quels cas utiliser cette formule ?

- Pour calculer directement les coordonnées du milieu d'un segment ;
- Pour calculer les coordonnées d'une extrémité du segment connaissant celles de l'autre extrémité et du milieu (voir page suivante)

Par exemple, si on sait que $I(3;-2)$ est le milieu de $[AB]$ où $A(-1;2)$, alors on peut trouver les coordonnées du point B avec :

$$\begin{array}{ll} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} & y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ 3 = \frac{-1 + x_B}{2} & -2 = \frac{2 + y_B}{2} \\ 3 \times 2 = -1 + x_B & -2 \times 2 = 2 + y_B \\ 6 = -1 + x_B & -4 = 2 + y_B \\ 6 + 1 = x_B & -4 - 2 = y_B \\ 7 = x_B & -6 = y_B \end{array}$$

Donc $B(7;-6)$.

Exercice : lien avec les équations

Dans un repère $(O;I,J)$, on considère les points $A(x;-1)$, $B(-2;-3)$ et $C(3;x)$.

1. Trouver toutes les valeurs de x telles que le triangle ABC soit isocèle en B.
2. Trouver toutes les valeurs de x telles que le triangle ABC soit rectangle en B.

Réponses.

Calculons dans un premier temps :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 & AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 & BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ AB^2 &= (-2 - x)^2 + (-3 - (-1))^2 & AC^2 &= (3 - x)^2 + (x - (-1))^2 & BC^2 &= (3 - (-2))^2 + (x - (-3))^2 \\ AB^2 &= [-1 \times (2 + x)]^2 + (-3 + 1)^2 & AC^2 &= (3 - x)^2 + (x + 1)^2 & BC^2 &= (3 + 2)^2 + (x + 3)^2 \\ AB^2 &= (-1)^2(2 + x)^2 + (-2)^2 & AC^2 &= 9 - 6x + x^2 + x^2 + 2x + 1 & BC^2 &= 25 + x^2 + 6x + 9 \\ AB^2 &= (2 + x)^2 + 4 & AC^2 &= 2x^2 - 4x + 10. & BC^2 &= x^2 + 6x + 34. \\ AB^2 &= 4 + 2 \times 2 \times x + x^2 + 4 \\ AB^2 &= x^2 + 4x + 8. \end{aligned}$$

1. Si ABC est isocèle en B, alors :

$$\begin{aligned} AB = BC &\Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 8 = x^2 + 6x + 34 \\ &\Leftrightarrow 2x + 26 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = -26 \\ &\Leftrightarrow \underline{x = -13} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x = -13$, ABC est isocèle en B.

2. Si ABC est rectangle en B, alors :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 10 = (x^2 + 4x + 8) + (x^2 + 6x + 34) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 10 = 2x^2 + 10x + 42 \\ &\Leftrightarrow -14x = 32 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{32}{14} \\ &\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{16}{7}} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x = -\frac{16}{7}$, ABC est rectangle en B.