

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

Équation 1 (équation produit)

Résoudre l'équation :

$$(2x + 1)(x - 5)(3x - 6) = 0.$$

Solution

Cette équation est une « équation-produit », c'est-à-dire que le membre de gauche est un produit de facteurs (ici, les facteurs sont ce qu'il y a entre les parenthèses ; il y a donc trois facteurs).

On utilise donc le « Théorème du produit nul » pour résoudre cette équation :

$$\begin{array}{ccc} 2x + 1 = 0 & \text{ou} & x - 5 = 0 & \text{ou} & 3x + 6 = 0 \\ 2x = -1 & & x = 5 & & 3x = -6 \\ x = -\frac{1}{2} & & & & x = \frac{-6}{3} \\ & & & & x = -2 \end{array}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; 5; -2 \right\}$$

Équation 2 : avec un facteur commun

Résoudre l'équation :

$$(3x + 5)(2x - 1) = (5x + 3)(3x + 5).$$

Solution

La première chose à faire est de se ramener à une équation dont le membre de droite est égal à 0 :

$$(3x + 5)(2x - 1) - (5x + 3)(3x + 5) = 0.$$

Ensuite, on doit impérativement factoriser pour pouvoir appliquer le « Théorème du produit nul ». On voit ici que $(3x + 5)$ est un facteur commun donc on factorise par $(3x + 5)$, ce qui donne :

$$(3x + 5)[(2x - 1) - (5x + 3)] = 0.$$

Ensuite, on enlève les parenthèses dans les crochets :

$$(3x + 5)[2x - 1 - 5x - 3] = 0,$$

puis on simplifie :

$$(3x + 5)(-3x - 4) = 0.$$

On applique alors le « Théorème du produit nul » :

$$\begin{array}{ccc} 3x + 5 = 0 & \text{ou} & -3x - 4 = 0 \\ 3x = -5 & & -3x = 4 \\ x = -\frac{5}{3} & & x = -\frac{4}{3} \end{array}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$S = \left\{ -\frac{5}{3}; -\frac{4}{3} \right\}.$$

Équation 3 : avec une identité remarquable

Résoudre l'équation :

$$(2x - 3)^2 = (x + 1)^2.$$

Solution

La première étape est toujours de tout mettre à gauche :

$$(2x - 3)^2 - (x + 1)^2 = 0.$$

On reconnaît à gauche une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Comme on veut factoriser, on applique la formule :

$$[(2x - 3) - (x + 1)][(2x - 3) + (x + 1)] = 0,$$

soit :

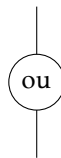
$$[2x - 3 - x - 1][2x - 3 + x + 1] = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(x - 4)(3x - 2) = 0.$$

On a donc une équation produit ; on applique alors le « Théorème du produit nul » :

$$\begin{aligned} x - 4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 0 \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$S = \left\{ 4; \frac{2}{3} \right\}$$

Équation 4 : avec la même identité remarquable

Résoudre l'équation :

$$(5x + 7)^2 = 3.$$

Solution

On commence par tout mettre à gauche :

$$(5x + 7)^2 - 3 = 0.$$

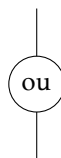
Pour faire apparaître l'identité remarquable précédente, on écrit « 3 » sous la forme « $(\sqrt{3})^2$ », ce qui donne :

$$(5x + 7)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$(5x + 7 - \sqrt{3})(5x + 7 + \sqrt{3}) = 0.$$

Nous avons un produit nul, donc on applique le « Théorème du produit nul » :

$$\begin{aligned} 5x + 7 - \sqrt{3} &= 0 \\ 5x &= -7 + \sqrt{3} \\ x &= \frac{-7 + \sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 5x + 7 + \sqrt{3} &= 0 \\ 5x &= -7 - \sqrt{3} \\ x &= \frac{-7 - \sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$S = \left\{ \frac{-7 - \sqrt{3}}{5}; \frac{-7 + \sqrt{3}}{5} \right\}$$

Équation 5 : un mélange

Résoudre l'équation :

$$(6x - 5)^2 = (6x - 5)(5x - 7).$$

Solution

On commence par tout mettre à gauche :

$$(6x - 5)^2 - (6x - 5)(5x - 7) = 0,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$(6x - 5)(6x - 5) - (6x - 5)(5x - 7) = 0.$$

On factorise donc le membre de gauche par $(6x - 5)$:

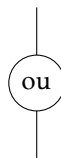
$$\begin{aligned}(6x - 5)[(6x - 5) - (5x - 7)] &= 0 \\ (6x - 5)(6x - 5 - 5x + 7) &= 0 \\ (6x - 5)(x + 2) &= 0.\end{aligned}$$

On a un produit nul donc, d'après le Théorème du Produit Nul :

$$6x - 5 = 0$$

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$



$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

$$S = \left\{ -2; \frac{5}{6} \right\}$$

Équation 6 : forme développée

Résoudre l'équation :

$$(3x - 1)(2x - 7) = 9x^2 - 6x + 1.$$

Solution

Quant il y a une forme développée dans une équation, on la factorise dès le départ. En général, il s'agit d'une identité remarquable du type « $a^2 + 2ab + b^2$ » ou « $a^2 - 2ab + b^2$ ».

Ici, on a :

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2.$$

Remarque : on peut s'aider de la forme factorisée de l'autre côté du signe « = » : pour que l'équation puisse être résolue, il faut que l'identité remarquable sous la forme factorisée fasse apparaître l'un des deux facteurs (ici $(3x - 1)$ ou $(2x - 7)$).

On a alors :

$$\begin{aligned}(3x - 1)(2x - 7) &= (3x - 1)(3x - 1) \\ (3x - 1)(2x - 7) - (3x - 1)(3x - 1) &= 0 \\ (3x - 1)(2x - 7 - 3x + 1) &= 0 \\ (3x - 1)(-x - 6) &= 0\end{aligned}$$

On a alors un produit nul donc :

$$3x - 1 = 0$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc :

ou

$$-x - 6 = 0$$

$$-x = 6$$

$$x = -6$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3}; -6 \right\}$$

Équation 7 : équation quotient (1^{re} partie)

Résoudre l'équation :

$$\frac{3x+2}{5x-1} = 0.$$

Solution

« Un quotient est nul si son numérateur est nul et si son dénominateur ne s'annule pas. »

Donc $\frac{3x+2}{5x-1} = 0$ si $3x+2 = 0$ ET si $5x-1 \neq 0$ (le dénominateur ne doit pas s'annuler car on ne peut pas diviser par 0).

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

ET

$$5x - 1 \neq 0$$

$$5x \neq 1$$

$$x \neq \frac{1}{5}$$

La solution trouvée $\left(-\frac{2}{3}\right)$ n'étant pas égale à $\frac{1}{5}$, l'ensemble solution est donc :

$$S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

Équation 8 : équation quotient (2^e partie)

Résoudre l'équation :

$$\frac{(3x+2)(8x-4)}{5x-1} = 0.$$

Solution

« Un quotient est nul si son numérateur est nul et si son dénominateur ne s'annule pas. »

Donc :

$$(3x+2)(8x-4) = 0$$

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

ou

$$8x - 4 = 0$$

$$8x = 4$$

$$x = \frac{4}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

ET

$$5x - 1 \neq 0$$

$$5x \neq 1$$

$$x \neq \frac{1}{5}$$

Les solutions trouvées n'étant pas égales à $\frac{1}{5}$, l'ensemble solution est :

$$S = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right\}$$

Entraînement

- 1 Montre que l'équation : $(2x - 7)^2 = (4x + 1)^2$ admet pour ensemble solution $S = \{1; 4\}$.
- 2 Montre que l'équation : $(-x + 5)^2 = 7$ admet pour ensemble solution $S = \{5 - \sqrt{7}; 5 + \sqrt{7}\}$.
- 3 Montre que l'équation : $(3x + 7)^2 = (3x + 7)(8x - 3)$ admet pour ensemble solution $S = \left\{ -\frac{7}{3}; 2 \right\}$.
- 4 Montre que l'équation : $(3 - 2x)(5x + 1) = 25x^2 + 10x + 1$ admet pour ensemble solution $S = \left\{ -\frac{7}{3}; 2 \right\}$.
- 5 Montre que l'équation : $\frac{(x - 7)(4x + 8)}{x - 2}$ admet pour ensemble solution : $S = \left\{ -\frac{1}{5}; \frac{2}{7} \right\}$.
- 6 Montre que l'équation : $\frac{(3x - 9)(21x + 7)}{x - 3}$ admet pour ensemble solution : $S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

Inéquation 1

Résoudre l'inéquation :

$$5x + 1 \geq 0.$$

Solution

Résoudre une inéquation est presque comme résoudre une équation.

Dans notre cas, la méthode est la même :

$$5x + 1 \geq 0$$

$$5x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{5}$$

L'ensemble solution est donc l'ensemble des x supérieurs ou égaux à $-\frac{1}{5}$; donc :

$$S = \left[-\frac{1}{5}; +\infty \right[$$

Inéquation 2

Résoudre l'inéquation :

$$-4x - 8 < 0.$$

Solution

Dans ce cas, il y a une chose à laquelle il va falloir faire attention :

$$-4x - 8 < 0$$

$$-4x < 8$$

$$x > \frac{8}{-4}$$

$$x > -2$$

On change le signe car on divise par un nombre négatif

L'ensemble solution de l'inéquation est donc :

$$S =]-2; +\infty[$$

[à suivre ...]