

Mettre sous la forme canonique

Énoncé

Soit $f(x) = 5x^2 + x - 3$.

Mettre $f(x)$ sous la forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $f(x) = a(x - u)^2 + v$.

Solution

$f(x) = 5x^2 + x - 3$	<i>On écrit la forme développée de $f(x)$ pour commencer</i>
$f(x) = 5 \left(x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} \right)$	<i>On factorise par le coefficient de x^2</i>
$f(x) = 5 \left[x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}x + \left(\frac{1}{10} \right)^2 - \left(\frac{1}{10} \right)^2 - \frac{3}{5} \right]$	<i>On fait apparaître une identité remarquable : on doit écrire $\frac{1}{5}$ comme étant égal à $2 \times \dots \times x$; ce qui manque est obtenu en multipliant $\frac{1}{5}$ par $\frac{1}{2}$. Il ne faut pas oublier ensuite d'ajouter le carré du résultat (ici, $\frac{1}{10}$) et de le soustraire vu qu'il n'y est pas dans la forme de la ligne précédente</i>
$f(x) = 5 \left[\left(x + \frac{1}{10} \right)^2 - \frac{1}{100} - \frac{3}{5} \right]$	<i>On fait apparaître la forme factorisée de l'identité remarquable</i>
$f(x) = 5 \left[\left(x + \frac{1}{10} \right)^2 - \frac{61}{100} \right]$	<i>On calcule la constante dans les crochets</i>
$f(x) = 5 \left(x + \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \times \frac{61}{100}$	<i>On distribue le coefficient qui est devant les crochets</i>
$f(x) = 5 \left(x + \frac{1}{10} \right)^2 - \frac{61}{20}$	<i>On obtient la forme souhaitée</i>

De cette dernière forme, on déduit que :

- $u = -\frac{1}{10}$ (attention à ne pas oublier le signe « $-$ » car dans l'expression $a(x - u)^2 + v$, il y a un « $-$ » et dans la nôtre, il n'y en a pas. Donc u est nécessairement négatif.)
- $v = -\frac{61}{20}$.

La parabole qui représente f a donc pour sommet le point $\Omega \left(-\frac{1}{10} ; -\frac{61}{20} \right)$. C'est un minimum car le coefficient de x^2 (dans la forme développée) est positif.