

Disponible sur *mathweb.fr*

130 exercices
de mathématiques
pour 1^{re} S

Stéphane PASQUET

13 octobre 2018

Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

13 octobre 2018

I	Le second degré	1
I.1	Calcul de discriminant et de racines	1
I.2	Équation avec une racine carrée	1
I.3	Avec changement de variables	1
I.4	Changements de variables	2
I.5	Résolution d'inéquations	2
I.6	Une inéquation	2
I.7	Polynôme de degré 3	3
I.8	Polynôme de degré 4	3
I.9	Trouver un trinôme à partir d'une parabole	3
I.10	Trouver la bonne courbe	4
I.11	Conditions sur deux paramètres	4
I.12	Trinôme avec un paramètre	4
I.13	Une équation avec paramètre	5
I.14	En Physique	5
I.15	À Noël	6
I.16	Aire d'une couronne rectangulaire	6
I.17	Sommets d'une famille de paraboles	6
I.18	Trouver deux nombres	6
I.19	La trajectoire de la balle de tennis	6
I.20	Vers le nombre d'or	7
I.21	Exploiter ses connaissances	7
I.22	Une autre écriture pour une racine carrée	7
I.23	Exercice de recherche	7
II	Généralités sur les fonctions	30
II.1	Trouver le domaine de définition	30
II.2	Fonctions paires, fonctions impaires	30
II.3	Lecture de tableaux de variation	30
II.4	Lectures graphiques	31
II.5	Décompositions en fonctions de référence	32
II.6	Fonctions associées : domaine de définition et variations (1)	32
II.7	Fonctions associées : domaine de définition et variations (2)	32
II.8	Étude d'une fonction avec valeurs absolues	33
II.9	Calculs avec valeurs absolues	33
II.10	Valeur absolue d'un polynôme de degré 2	33
II.11	Inéquations avec valeurs absolues	34
II.12	Équations avec valeurs absolues	34

II.13 Ensemble de points	34
III Suites	52
III.1 Sens de variation	52
III.2 Sens de variation, majorant et minorant	52
III.3 Sens de variation d'une suite définie par récurrence	52
III.4 Sens de variation d'une suite avec racines carrées	53
III.5 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique	53
III.6 Somme des premiers termes d'une suite géométrique	53
III.7 Dénombrement	53
III.8 Reconnaître une suite arithmétique et géométrique	54
III.9 Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, le retour	54
III.10 Établir une relation de récurrence	54
III.11 Trouver un terme ou la raison dans une suite arithmétique	55
III.12 Trouver un terme ou la raison d'une suite géométrique	55
III.13 Le super-héros	56
III.14 Compilation d'exercices	56
III.15 Étude d'une suite arithmético-géométrique avec algorithme	57
III.16 Le débit de l'eau, le débit de lait	58
III.17 Somme des premiers termes d'une suite arithmético-géométrique	59
III.18 Suite homographique et suite géométrique, avec un algorithme	59
III.19 Suite homographique et suite arithmétique	60
III.20 Suites imbriquées	60
III.21 Suites imbriquées	61
IV Dérivation	86
IV.1 Nombre dérivé & équation de tangentes	86
IV.2 Lecture graphique de nombres dérivés	86
IV.3 Détermination d'une fonction par lecture graphique	87
IV.4 Détermination d'une fonction par lecture graphique	88
IV.5 Deux courbes	88
IV.6 Dérivées de référence	89
IV.7 Dérivées de fonctions produits et quotient	89
IV.8 Variations de fonctions produits	89
IV.9 Sens de variation de fonctions quotients	89
IV.10 Étude complète de la fonction $x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$	90
IV.11 Optimisation d'une aire dans un triangle rectangle	90
IV.12 Optimisation du volume d'une boîte	90
IV.13 Optimisation d'une aire dans une parabole	91
IV.14 Optimisation de la surface d'une casserole	92
IV.15 Optimisation du volume d'un cône	92
V Trigonométrie	112
V.1 Mesure principale	112
V.2 Calculs de mesures principales d'angles	112
V.3 Trouver des angles	113
V.4 Lecture d'angles sur le cercle trigonométrique	113
V.5 Résolution d'équations trigonométriques	114
V.6 Transformation d'une équation	114
V.7 Équations avec changement de variable	114
V.8 À la découverte d'un sinus et d'un cosinus inconnu	115

V.9	Un calcul simple	115
V.10	Avec des carrés	115
V.11	Avec des carrés (le retour)	115
V.12	Simplifications	115
VI	Géométrie plane	129
VI.1	Vecteurs colinéaires dans un repère	129
VI.2	Vecteurs avec paramètre	129
VI.3	Alignement de points	129
VI.4	Dans un parallélogramme	130
VI.5	Équations cartésiennes de droites	130
VI.6	Équation de droites avec paramètre	130
VI.7		130
VI.8	Équation de droites & médiatrice	131
VI.9	Alignement de points	131
VI.10	Un algorithme	131
VII	Produit scalaire	139
VII.1	Produits scalaires et angles	139
VII.2	Produits scalaires et angles dans un repère orthonormé	139
VII.3	Angle dans un carré	140
VII.4	Équations de cercles	140
VII.5	Équation de droites perpendiculaires	140
VII.6	Détermination d'un angle dans un cercle	140
VII.7	Dans un rectangle	141
VII.8	Avec les formules trigonométriques	141
VII.9	Dans un repère : cercle, angle et hauteur	141
VII.10	Dans un rectangle	141
VII.11	Puissance d'un point par rapport à un cercle	142
VII.12	Trois cercles tangents	142
VII.13	Aire d'un triangle inscrit dans un cercle	143
VII.14	La formule de Héron	143
VIII	Statistiques descriptives	164
VIII.1	Notes de deux classes	164
VIII.2	Salaires dans deux entreprises	164
VIII.3	Influence d'un ajout dans une série statistique	165
VIII.4	Un algorithme	165
VIII.5	De l'algèbre dans les statistiques	166
IX	Probabilités	175
IX.1	Différents ordinateurs	175
IX.2	49 boules dans un urne	175
IX.3	Avec deux dés	176
IX.4	Avec une pièce de monnaie	176
IX.5	Deux urnes	176
IX.6	Lancer de 3 pièces	177
IX.7	Nombre variable de boules	177
IX.8	Recherche d'une mise de départ	178
IX.9	Avec une urne	178
IX.10	Dans une usine de composants électroniques	179

IX.11	Au tennis	179
IX.12	Au lycée à vélo	179
IX.13	Le jeu des petits chevaux	180

X	Fluctuation, échantillonnage	192
X.1	Pièce défectueuse	192
X.2	Un dé peut-être truqué	192
X.3	Le médecin de campagne	192
X.4	Les OVNIS	192
X.5	Coup de fatigue au centre d'appels	193

Règles de navigation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

13 octobre 2018

Bonjour.

J'ai souhaité créer ici un document dans lequel il est facile de naviguer. C'est la raison pour laquelle :

- À chaque énoncé d'exercices, vous pouvez cliquer sur le numéro de la page où se trouve le corrigé pour vous y rendre directement ;
- Inversement, quand vous lisez un exercice, vous pouvez cliquer sur « [Retour à l'énoncé de l'exercice] » pour revenir à l'énoncé ;
- À tout moment, vous pouvez retourner au sommaire en cliquant sur le petit carré ■ qui se trouve devant chaque titre.

D'autre part, il se peut que malgré la vigilance que j'ai apportée à la relecture de ce document, quelques erreurs soient encore présentes.

Dans le doute, n'hésitez pas à me contacter via le formulaire qui se trouve sur mon site :

mathweb.fr

en mentionnant l'email avec lequel vous avez acquis ce document. J'y répondrai le plus rapidement possible.

Je vous souhaite un bon travail !

Stéphane Pasquet

Ce livre est exclusivement vendu sur mathweb.fr au prix de 6 €.

Ses éventuelles mises à jour (corrections) sont gratuites pendant 1 an (à partir de la date d'achat) pour toute personne l'ayant acheté sur ce site.

Je remercie donc tout acheteur de garder ce document pour son usage personnel. En effet, j'ai mis plusieurs années à le mettre au point et je continue à le modifier régulièrement. Aussi, si je constate qu'il ne me rapporte pas assez par rapport au temps que j'y consacre, je cesserais de travailler dessus, ce qui serait regrettable pour les années à venir, sachant que les programmes peuvent changer.

Le second degré

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

Équations

■ Exercice 1. Calcul de discriminant et de racines

★★★★☆ **A**

Corrigé page 8

Pour chacun des trinômes suivants, calculer le discriminant et ses éventuelles racines.

1 $x^2 - 2x + 1$

4 $x^2 + x + 1$

7 $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16$

2 $x^2 - 3x + 2$

5 $3x^2 - 5x + 1$

8 $3x^2 - 8x + 2$

3 $-x^2 + 3x - 2$

6 $-2x^2 - 5x + 3$

9 $-5x^2 + 4x + 3$

■ Exercice 2. Équation avec une racine carrée

★★★★☆ **A**

Corrigé page 9

Résoudre les équations suivantes :

1 $\sqrt{x+1} = 2x - 3$

2 $\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5$

3 $\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$

■ Exercice 3. Avec changement de variables

★★★★☆ **A**

Corrigé page 11

Résoudre les équations suivantes :

1 $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$

2 $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$

3 $\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$

4 $2(\cos x)^2 + 3\cos x - 2 = 0$

5 $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$

■ Exercice 4. Changements de variables

★★★★★ R

Corrigé page 13

On souhaite résoudre sur $]-\pi; \pi]$ l'équation (E) suivante :

$$4(\sin x)^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \sin x - \sqrt{6} = 0$$

1 On pose $\Delta = 20 + 8\sqrt{6}$ et on suppose que $\Delta = (a + b\sqrt{6})^2$.

a. Montrer que $a^2 + 6b^2 = 20$ et $ab = 4$.

b. En déduire que $a^4 - 20a^2 + 96 = 0$.

c. Trouver alors a et b et en déduire $\sqrt{\Delta}$.

2 En déduire les solutions de (E).

Inéquations

■ Exercice 5. Résolution d'inéquations

★★★☆☆ A

Corrigé page 14

Résoudre les inéquations suivantes :

1 $x^2 + x + 1 < 0$

5 $3x^2 - 7x + 10 \geq 0$

2 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

6 $4x^2 - 20x + 25 > 0$

3 $-x^2 + 3x - 2 < 0$

7 $\frac{1-4x}{x^2-3x+2} \geq 0$

4 $-5x^2 - 9x + 3 \geq 0$

8 $(2x-3)(-2x^2+5x+3) < 0$

■ Exercice 6. Une inéquation

★★★★☆ R

Corrigé page 16

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{7x-10}{5x-17} \geq \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51}$$

Factorisation

■ Exercice 7. Polynôme de degré 3

★★★★☆

R

Corrigé page 17

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$.

- 1 Vérifier que $x = -2$ est une racine de P .
- 2 Factoriser alors $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x+2)Q(x)$, où Q est un trinôme de degré 2.
- 3 Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

■ Exercice 8. Polynôme de degré 4

★★★★☆

R

Corrigé page 18

On considère le polynôme $P(x) = 10x^4 - 29x^3 - 34x^2 + 107x - 42$.

- 1 Calculer $P(3)$ et $P(-2)$.
- 2 En déduire que $P(x) = A(x) \times B(x)$, où A et B sont deux polynômes de degré 2 que l'on déterminera.
- 3 En déduire les racines de P .

Lectures graphiques

■ Exercice 9. Trouver un trinôme à partir d'une parabole

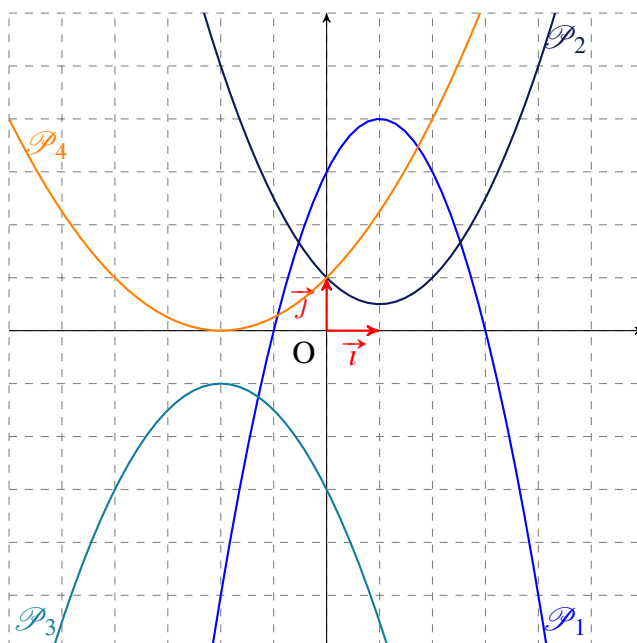
★★★★☆

R

Corrigé page 18

Nous avons tracé dans le repère ci-contre des paraboles.

Retrouver les trinômes (sous la forme développée) correspondant à chacune d'elles.



■ Exercice 10. Trouver la bonne courbe

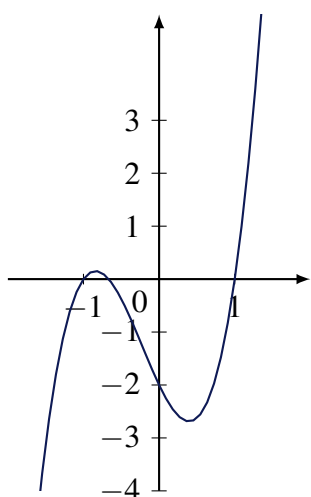
★★★★☆ R

Corrigé page 19

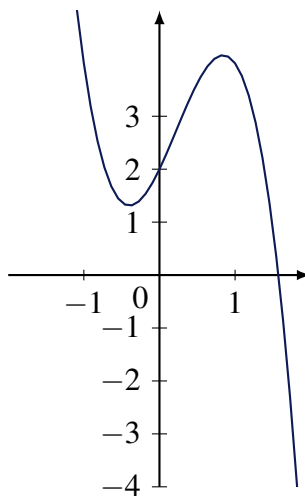
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2.$$

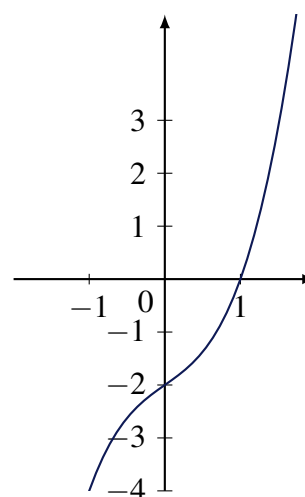
- 1 Montrer que $f(1) = 0$.
- 2 En déduire une factorisation de $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
- 3 En déduire la courbe représentative de f parmi les trois ci-dessous :



a



b



c

Trinôme avec paramètres

■ Exercice 11. Conditions sur deux paramètres

★★★★☆ R

Corrigé page 20

On considère le trinôme $x^2 + mx + p$, où m et p sont deux réels.

À quelles conditions sur m et p ce trinôme admet au moins une racine ?

■ Exercice 12. Trinôme avec un paramètre

★★★★☆ R

Corrigé page 20

Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, le polynôme :

$$P(x) = (k + 1)x^2 + 2kx + (k - 1)$$

admet toujours deux racines distinctes.

■ Exercice 13. Une équation avec paramètre

★★★★☆ R

Corrigé page 20

On considère l'équation :

$$(E_m) \quad : \quad (2m+1)x^2 + (m-1)x + (m+4)(m-1) = 0.$$

- 1 Pour $m = 0$, donner les solutions de (E_0) .
- 2 Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle une unique solution ?
- 3 Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle 1 pour solution ?

Exercices de recherche

■ Exercice 14. En Physique

★★★★☆ R

Corrigé page 22

On dispose de deux conducteurs de résistances R_1 et R_2 .

Si on les monte en série (figure I.1), on obtient un dipôle ohmique de résistance $r = R_1 + R_2$.

Si on les monte en parallèle (figure I.2), on obtient un dipôle ohmique de résistance R telle que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$



FIGURE I.1 – En série

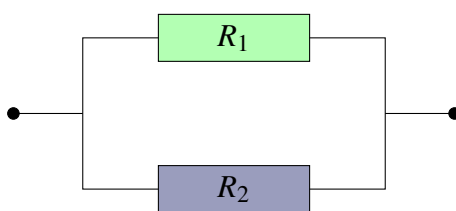


FIGURE I.2 – En parallèle

- 1 On sait que $r = 10 \, \Omega$ et $R = 2 \, \Omega$.
Trouvez R_1 et R_2 .
- 2 Reprenez la question précédente avec $r = 4 \, \Omega$ et $R = 1 \, \Omega$.
- 3 On connaît r et R .
Montrez que l'on peut alors calculer R_1 et R_2 à la seule condition que $r \geq 4R$.

■ Exercice 15. À Noël

★★★★☆ (R)

Corrigé page 23

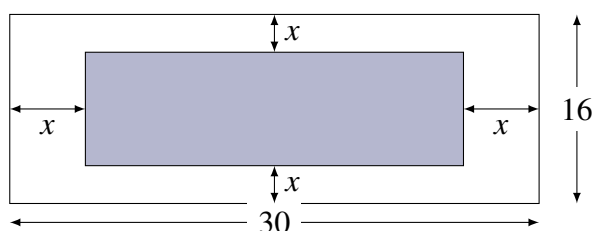
Plusieurs personnes se sont réunies pour fêter Noël. Chaque personne a apporté trois cadeaux à chacune des autres personnes.

Sachant qu'au total 468 cadeaux ont été déposés près de l'arbre de Noël, combien de personnes y avait-il ?

■ Exercice 16. Aire d'une couronne rectangulaire

★★★★☆ (R)

Corrigé page 23



Déterminer x de sorte que l'aire de la partie blanche de la figure ci-contre soit égale à celle du rectangle plein.

■ Exercice 17. Sommets d'une famille de paraboles

★★★★☆ (R)

Corrigé page 24

On considère une famille de paraboles $\mathcal{P}_k$ d'équation $y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 1$, où $k \in \mathbb{N}$. On note S_k le sommet de $\mathcal{P}_k$.

Montrer que tous les S_k sont alignés.

■ Exercice 18. Trouver deux nombres

★★★★☆ (R)

Corrigé page 24

Deux entiers naturels ont pour différence 7, et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43.

Trouver ces deux nombres.

■ Exercice 19. La trajectoire de la balle de tennis

★★★★☆ (R)

Corrigé page 25

Un joueur de tennis se trouve à 9 m du filet et renvoie la balle à $h = 50$ cm du sol avec un angle de $\alpha = 20^\circ$ avec l'horizontale. En fonction de sa position délicate, on estime sa vitesse de frappe à $v_0 = 20$ km/h.

Sachant que la hauteur du filet est 91,4 cm et que la trajectoire de la balle est donnée par la formule :

$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{g}{(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \tan \alpha + h,$$

où :

- $g \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,
- v_0 est la vitesse initiale (exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$),
- α est l'angle de la trajectoire avec l'horizontale,
- h est la hauteur initiale (exprimée en mètre),

La balle dépassera-t-elle le filet ?

Si tel n'est pas le cas, quelle vitesse aurait-il fallu donner à la balle en la frappant ?

■ Exercice 20. Vers le nombre d'or

★★★★☆ R

Corrigé page 26

1 Résoudre l'équation $x^2 = 1 + x$.

On notera φ la solution positive.

2 Que vaut $N = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$?

■ Exercice 21. Exploiter ses connaissances

★★★★☆ R

Corrigé page 26

L'équation :

$$x^2 - sx + t = 0$$

admet deux solutions notées a et b .

De plus, l'équation :

$$x^2 - s^2x + st = 0$$

admet pour solutions les nombres $a + 1$ et $b + 1$.

Que vaut s et t ?

■ Exercice 22. Une autre écriture pour une racine carrée

★★★★☆ R

Corrigé page 28

On pose :

$$A = \sqrt{33 + 20\sqrt{2}}.$$

On cherche à écrire A sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où a et b sont deux entiers relatifs.

1 Développer $(a + b\sqrt{2})^2$.

2 Montrer alors que :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 33 \\ ab = 10 \end{cases}$$

3 Calculer alors a et b .

4 S'inspirer de ce qui vient d'être fait pour trouver une formule permettant de calculer a et b tels que :

$$\sqrt{p + q\sqrt{n}} = a + b\sqrt{n} \quad ; \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*.$$

■ Exercice 23. Exercice de recherche

★★★★☆ R

Corrigé page 29

On considère un triangle de côtés de mesures respectives a , b et c telles que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Montrer que ce triangle est équilatéral.

Indication : on pourra partir de l'égalité donnée, puis s'en inspirer pour poser une fonction trinôme de degré 2 d'inconnue a par exemple.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ (c'est une identité remarquable).

Par conséquent, $\Delta = 0$ et sa racine double est $\alpha = 1$.

2 $x^2 - 3x + 2$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

3 $-x^2 + 3x - 2$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = 1.$$

4 $x^2 + x + 1$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3.$$

$\Delta < 0$ donc le trinôme n'a aucune racine.

5 $3x^2 - 5x + 1$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}.$$

6 $-2x^2 - 5x + 3$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times (-2)} = \frac{5 - 7}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5 + 7}{-4} = -3.$$

7 $\frac{1}{4}x^2 - 4x + 16.$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 16 = 16 - 16 = 0.$$

Donc le trinôme a une racine double :

$$\alpha = -\frac{-4}{2 \times \frac{1}{4}} = 8.$$

8 $3x^2 - 8x + 2.$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 64 - 24 = 40.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-(-8) - \sqrt{40}}{2 \times 3} = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{4 + \sqrt{10}}{6}.$$

9 $-5x^2 + 4x + 3.$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-5) \times 3 = 16 + 60 = 76.$$

Les racines sont donc :

$$\alpha = \frac{-4 - \sqrt{76}}{2 \times (-5)} = \frac{-4 - 2\sqrt{19}}{-10} = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2 - \sqrt{19}}{5}.$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le domaine de validité de l'équation :

$$\sqrt{x+1} = 2x - 3$$

est l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases}$$

soit :

$$x \geq \frac{3}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} = 2x - 3 &\iff x+1 = (2x-3)^2 \\ &\iff x+1 = 4x^2 - 12x + 9 \\ &\iff 4x^2 - 13x + 8 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $4x^2 - 13x + 8$ est :

$$\Delta = 169 - 128 = 41.$$

Les solutions de l'équation sont donc potentiellement :

$$\alpha = \frac{13 - \sqrt{41}}{8} \approx 0,82 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{13 + \sqrt{41}}{8} \approx 2,43.$$

Comme $\alpha < \frac{3}{2}$ et $\beta \geq \frac{3}{2}$, l'ensemble solution de l'équation est :

$$S = \left\{ \frac{13 + \sqrt{41}}{8} \right\}$$

2 Le domaine de validité de l'équation

$$\sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5$$

est l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{soit : } x \geq \frac{5}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 8} = 2x - 5 &\iff x^2 - 8 = (2x - 5)^2 \\ &\iff x^2 - 8 = 4x^2 - 20x + 25 \\ &\iff 3x^2 - 20x + 33 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $3x^2 - 20x + 33$ est : $\Delta = 400 - 396 = 4$, donc il y a deux solutions potentielles :

$$\alpha = \frac{20 - 2}{6} = 3 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{11}{3}.$$

$\alpha > \frac{5}{2}$ et $\beta > \frac{5}{2}$ donc l'ensemble solution de l'équation est :

$$S = \left\{ 3 ; \frac{11}{3} \right\}$$

3 Le domaine de validité de l'équation :

$$\sqrt{2x - 1} = 1 - 2x$$

est l'ensemble des valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases}$$

soit $x = \frac{1}{2}$.

Nul besoin donc d'aller plus loin ; l'ensemble solution de l'équation $\sqrt{2x - 1} = 1 - 2x$ est :

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$. On pose $X = \sqrt{x}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 5X + 4 = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 25 - 16 = 9.$$

Donc les solutions de l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$ sont :

$$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Les solutions de l'équation $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ doivent donc vérifier :

$$\sqrt{x_1} = 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_2} = 4,$$

d'où :

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 16.$$

D'où :

$$S = \{1 ; 16\}$$

2 $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$. On pose $X = x^2$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$-X^2 + 3X - 2 = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 9 - 8 = 1.$$

Les solutions de l'équation $-X^2 + 3X - 2 = 0$ sont donc :

$$X_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1.$$

Les solutions de l'équation $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ sont donc x_1 et x_2 tels que :

$$x_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_2^2 = 2,$$

soit :

$$x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{2} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{2}.$$

L'ensemble solution de l'équation $-x^4 + 3x^2 - 2 = 0$ est donc :

$$S = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$$

3 $2(\cos x)^2 + 3\cos x - 2 = 0$. On pose $X = \cos x$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$2X^2 + 3X - 2 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 = 5^2.$$

Elle admet donc deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-3-5}{2 \times 2} = -2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

- $X_1 = -2$ et $X_1 = \cos x_1$ donc $\cos x_1 = -2$, ce qui est impossible car un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 ;
- $X_2 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \cos x_2$ donc $\cos x_2 = \frac{1}{2}$, soit $x_2 = \frac{\pi}{3}$ (à 2π près) ou $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ (à 2π près).

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $2(\cos x)^2 + 3\cos x - 2 = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3} \text{ (à } 2\pi \text{ près)} ; \frac{\pi}{3} \text{ (à } 2\pi \text{ près)} \right\}$$

- 4** $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$. On pose $X = x^2 - 3x + 1$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$X^2 - 3X + 2 = 0$$

dont les solutions évidentes sont $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.

- $X_1 = 1 \iff x^2 - 3x + 1 = 1 \iff x(x - 3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$.
- $X_2 = 2 \iff x^2 - 3x + 1 = 2 \iff x^2 - 3x - 1 = 0$. Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = 9 + 4 = 13$ donc les solutions sont :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 2 = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{13}}{2} ; 0 ; 3 ; \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

- 5** $\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$. On pose $X = \frac{1}{x}$; ainsi, l'équation est équivalente à :

$$6X^2 + X - 2 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 49 = 7^2.$$

Les solutions de l'équation $6X^2 + X - 2 = 0$ sont donc :

$$X_1 = \frac{-1 - 7}{2 \times 6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1 + 7}{12} = \frac{1}{2}.$$

- $X_1 = -\frac{2}{3}$ et $X_1 = \frac{1}{x_1}$ donc $x_1 = \frac{1}{X_1} = -\frac{3}{2}$;
- $X_2 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{1}{x_2}$ donc $x_2 = \frac{1}{X_2} = 2$.

Ainsi, l'ensemble solution de l'équation $\frac{6}{x^2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2} ; 2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
 1 \quad a. \quad & \Delta = 20 + 8\sqrt{6} \\
 & \iff (a + b\sqrt{6})^2 = 20 + 8\sqrt{6} \\
 & \iff a^2 + 2ab\sqrt{6} + 6b^2 = 20 + 8\sqrt{6} \\
 & \iff a^2 + 6b^2 + 2ab\sqrt{6} = 20 + 8\sqrt{6} \\
 & \iff \begin{cases} a^2 + 6b^2 = 20 \\ 2ab = 8 \end{cases} \\
 & \iff \boxed{\begin{cases} a^2 + 6b^2 = 20 \\ ab = 4 \end{cases}}
 \end{aligned}$$

b. $ab = 4$ donc $b = \frac{4}{a}$. La première équation donne alors :

$$\begin{aligned}
 a^2 + 6b^2 = 20 & \iff a^2 + \left(\frac{4}{a}\right)^2 = 20 \\
 & \iff a^2 + 6 \times \frac{16}{a^2} = 20 \\
 & \iff a^4 + 96 = 20a^2 \\
 & \iff \boxed{a^4 - 20a^2 + 96 = 0}
 \end{aligned}$$

c. On pose $A = a^2$; l'équation $a^4 - 20a^2 + 96 = 0$ est équivalente à :

$$A^2 - 20A + 96 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta' = (-20)^2 - 4 \times 1 \times 96 = 16 = 4^2.$$

L'équation $A^2 - 20A + 96 = 0$ admet donc deux solutions :

$$A_1 = \frac{20 - 4}{2} = 8 = a_1^2 \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{20 + 4}{2} = 12 = a_2^2.$$

Ainsi, $a_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ou $a_1 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$, et $a_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ou $a_2 = -2\sqrt{3}$.

Faisons le choix de prendre $a = 2\sqrt{2}$; alors $b = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Dans ce cas, $a + b\sqrt{6} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Or, $[2(\sqrt{2} + \sqrt{3})]^2 = 4(2 + 3 + 2\sqrt{6}) = 20 + 8\sqrt{6} = \Delta$.

Ainsi, $\boxed{\sqrt{\Delta} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$.

2 $4(\sin x)^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} = 0$. On pose $X = \sin x$. (E) est donc équivalente à :

$$4X^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})X - \sqrt{6} = 0.$$

Le discriminant de $4X^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})X - \sqrt{6}$ est :

$$[2(\sqrt{3} - \sqrt{2})]^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{6}) = 4(3 + 2 - 2\sqrt{6}) + 16\sqrt{6} = 20 + 8\sqrt{16} = \Delta.$$

Ainsi, l'équation en X admet deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{\Delta}}{2 \times 4} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$X_2 = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{\Delta}}{2 \times 4} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi,

$$\sin x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

soit, sur $]-\pi; \pi]$:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x_1 = -\frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

Par conséquent, sur $]-\pi; \pi]$, les solutions de (E) sont : $-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $x^2 + x + 1 < 0$.

Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc le trinôme est du signe du coefficient de x^2 , soit « 1 » ici, donc positif.

L'ensemble solution est donc :

$$S = \emptyset$$

2 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

Le discriminant de $2x^2 - 5x + 3$ est $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines : $\alpha = \frac{5-1}{4} = 1$ et

$$\beta = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a entre ses racines, donc $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ pour $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

$$S = \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

3 $-x^2 + 3x - 2 < 0$

Le discriminant de $-x^2 + 3x - 2$ est $\Delta = 9 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$ donc il admet deux racines distinctes : $\alpha = \frac{-3-1}{-2} = 2$ et $\beta = \frac{-3+1}{-2} = 1$.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a entre les racines donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S =]1; 2[$$

4 $-5x^2 - 9x + 3 \geq 0$ Le discriminant de $-5x^2 - 9x + 3$ est $\Delta = 81 - 4 \times (-5) \times 3 = 21$ donc il admet deux racines : $\alpha = \frac{9-\sqrt{21}}{-10} = \frac{-9+\sqrt{21}}{10}$ et $\beta = \frac{-9-\sqrt{21}}{10}$.

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ (donc positif) à l'extérieur des racines donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S = \left] -\infty; \frac{-9 + \sqrt{21}}{10} \right] \cup \left[\frac{-9 + \sqrt{21}}{10}; +\infty \right[$$

5 $3x^2 - 7x + 10 \geq 0$

Le discriminant de $3x^2 - 7x + 10$ est $\Delta = 49 - 4 \times 3 \times 10 = -71 < 0$ donc il est toujours du signe de « 3 », donc positif. L'ensemble solution est donc :

$$S = \mathbb{R}$$

6 $4x^2 - 20x + 25 > 0$

Le discriminant de $4x^2 - 20x + 25$ est $\Delta = 400 - 4 \times 4 \times 25 = 0$. Par conséquent, il est du signe de « 4 » (donc positif) tout le temps sauf en sa racine $\alpha = -\frac{-20}{2 \times 4} = \frac{5}{2}$ (où il est nul). Par conséquent, l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

7 $\frac{1 - 4x}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$

Le discriminant de $x^2 - 3x + 2$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$. Par conséquent, il admet deux racines distinctes $\alpha = \frac{3-1}{2} = 1$ et $\beta = \frac{3+1}{2} = 2$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	1	2	$+\infty$
$1 - 4x$	+	0	-	-	-
$x^2 - 3x + 2$	+		0	0	+
$\frac{1 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$	+	0	-	+	-

L'ensemble solution de l'inéquation est alors :

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{4} \right] \cup]1; 2[$$

8 $(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3) < 0$

Le discriminant de $-2x^2 + 5x + 3$ est $\Delta = 25 + 24 = 49$ donc il admet deux racines : $\alpha = \frac{-5-7}{-4} = 3$ et $\beta = \frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$		
$2x - 3$	—	—	0	+	+		
$-2x^2 + 5x + 3$	—	0	+	+	0	—	
$(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3)$	+	0	—	0	+	0	—

L'ensemble solution de l'inéquation est alors :

$$S = \left] -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[\cup]3; +\infty[$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Avant toute chose, on cherche le domaine de validité de l'inéquation.

Cette inéquation existe lorsque :

$$\begin{cases} 5x - 17 \neq 0 \\ 10x^2 - 49x + 51 \neq 0 \end{cases}$$

Le discriminant du polynôme $10x^2 - 49x + 51$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-49)^2 - 4 \times 10 \times 51 \\ &= 361 \\ &= 19^2 > 0 \end{aligned}$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-49) - 19}{2 \times 10} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{49 + 19}{20} = \frac{17}{5}.$$

Il peut donc se factoriser sous la forme :

$$\begin{aligned} 10x^2 - 49x + 51 &= 10 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{17}{5} \right) \\ &= 5 \times 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{17}{5} \right) \\ &= 2 \left(x - \frac{3}{2} \right) \times 5 \left(x - \frac{17}{5} \right) \\ &= (2x - 3)(5x - 17). \end{aligned}$$

Cette factorisation va être importante pour la résolution de l'inéquation.

Le domaine de validité de l'inéquation est donc $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}; \frac{17}{5} \right\}$.

$$\begin{aligned} \frac{7x-10}{5x-17} &\geq \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51} \iff \frac{7x-10}{5x-17} - \frac{25(x+2)}{10x^2-49x+51} \geq 0 \\ &\iff \frac{7x-10}{5x-17} - \frac{25(x+2)}{(2x-3)(5x-17)} \geq 0 \\ &\iff \frac{(7x-10)(2x-3)}{(5x-17)(2x-3)} - \frac{25(x+2)}{(2x-3)(5x-17)} \geq 0 \\ &\iff \frac{14x^2-21x-20x+30-25x-50}{10x^2-49x+51} \geq 0 \\ &\iff \frac{14x^2-66x-20}{10x^2-49x+51} \geq 0 \\ &\iff \frac{2(7x^2-33x-10)}{10x^2-49x+51} \geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $7x^2 - 33x - 10$ est :

$$\begin{aligned}\Delta' &= (-33)^2 - 4 \times 7 \times (-10) \\ &= 1369 \\ &= 37^2 > 0.\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes :

$$\alpha = \frac{-(-33) - 37}{2 \times 7} = -\frac{2}{7} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{33 + 37}{14} = 5.$$

En utilisant la propriété du signe d'un trinôme du second degré, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{7}$	3	$\frac{17}{5}$	5	$+\infty$	
$7x^2 - 33x - 10$	+	0	-	-	-	0	+
$10x^2 - 49x + 51$	+		+	0	-	0	+
$\frac{2(7x^2 - 33x - 10)}{10x^2 - 49x + 51}$	+	0	-	+	-	0	+

Ainsi, $S = \left] -\infty; -\frac{2}{7} \right] \cup \left] \frac{3}{2}; \frac{17}{5} \right[\cup [5; +\infty[$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1
$$\begin{aligned}P(-2) &= 2 \times (-2)^3 + 7 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 2 \\ &= -16 + 28 - 14 + 2 \\ &= -30 + 30 \\ &= 0.\end{aligned}$$

$P(-2) = 0$ donc $x = -2$ est une racine de P .

2
$$\begin{aligned}P(x) &= (x+2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c\end{aligned}$$

Ainsi, on souhaite que, pour tout réel x :

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c.$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} 2 = a \\ 7 = b + 2a \\ 7 = c + 2b \\ 2 = 2c \end{cases}$$

On en déduit que $a = 2$ et $c = 1$. Par suite, à l'aide de la troisième équation (par exemple), on trouve $b = 3$.

Finalement, on obtient :

$$P(x) = (x+2)(2x^2 + 3x + 1)$$

3 $P(x) = 0 \iff x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 3x + 1 = 0.$

Le discriminant de $2x^2 + 3x + 1 = 0$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc il admet deux racines : $\alpha = \frac{-3-1}{4} = -1$ et $\beta = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}.$

Par conséquent, l'ensemble solution de l'équation $P(x) = 0$ est :

$$S = \left\{ -2 ; -1 ; -\frac{1}{2} \right\}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $P(3) = 0$ et $P(-2) = 0.$

2 On en déduit que $P(x) = (x-3)(x+2)(ax^2+bx+c)$, soit $P(x) = (x^2-x-6)(ax^2+bx+c).$

$$\begin{aligned} (x^2-x-6)(ax^2+bx+c) &= ax^4+bx^3+cx^2-ax^3-bx^2-cx-6ax^2-6bx-6c \\ &= ax^4+(b-a)x^3+(c-b-6a)x^2+(-c-6b)x-6c \\ &= 10x^4-29x^3-34x^2+107x-42 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} a &= 10 \\ b-a &= -29 \\ c-b-6a &= -34 \\ -c-6b &= 107 \\ -6c &= -42 \end{cases}$$

On en déduit que $a = 10$ et $c = 7$, puis que $b = -29 + a = -19.$

Finalement, $P(x) = (x^2-x-6)(10x^2-19x+7).$

3 Le discriminant du polynôme $10x^2-19x+7$ est :

$$\Delta = (-19)^2 - 4 \times 10 \times 7 = 81 = 9^2.$$

Ses deux racines sont alors :

$$x_1 = \frac{19-9}{20} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{19+9}{20} = \frac{7}{5}.$$

Les racines de P sont donc : $-2, 3, \frac{7}{5}$ et $\frac{1}{2}.$

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- Pour $\mathcal{P}_1.$

On voit que ses deux racines sont $\alpha = -1$ et $\beta = 3.$

Par conséquent, le trinôme est de la forme $f_1(x) = a(x+1)(x-3).$

Le sommet de la parabole est le point de coordonnées $(1;4)$ donc $f_1(1) = 4.$ Ainsi,

$$a(1+1)(1-3) = 4 \iff -4a = 4 \iff a = -1.$$

On a donc :

$$f_1(x) = -(x+1)(x-4) \quad \text{soit} \quad f_1(x) = -x^2 + 3x + 4$$

- Pour $\mathcal{P}_2$.

On voit que le trinôme n'a pas de racines car la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Posons $f_2(x) = ax^2 + bx + c$.

→ La parabole passe par le point de coordonnées $(0; 1)$ donc $f_2(0) = 1$, soit $c = 1$.

→ La parabole passe par le point de coordonnées $(2; 1)$ donc $f_2(2) = 1$, soit $a \times 2^2 + 2b + 1 = 1$, soit $4a + 2b = 0$ ou encore $b = -2a$.

On peut alors écrire : $f_2(x) = ax^2 - 2ax + 1$.

→ La parabole passe par le point de coordonnées $(4; 5)$ donc $f_2(4) = 5$, soit $16a - 8a + 1 = 5$, ou encore $8a = 4$. Donc $a = \frac{1}{2}$

On en déduit alors que $a = \frac{1}{2}$, $b = -2 \times \frac{1}{2} = -1$ et $c = 1$. Donc :

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

- Pour $\mathcal{P}_3$.

Posons $f_3(x) = ax^2 + bx + c$.

→ $A(0; -3) \in \mathcal{P}_3 \implies c = -3$.

→ $B(-4; -3) \in \mathcal{P}_3 \implies 16a - 4b - 3 = -3$, soit $4a = b$. Donc $f_3(x) = ax^2 + 4ax - 3$.

→ $C(-2; -1) \in \mathcal{P}_3 \implies 4a - 8a - 3 = -1$, soit $-4a = 2$ d'où $a = -\frac{1}{2}$.

On en déduit :

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$$

- Pour $\mathcal{P}_4$.

L'axe des abscisses est tangent à la parabole donc $f_4(x) = a(x - \alpha)^2$. L'unique racine étant -2 , on a $f_4(x) = a(x + 2)^2$.

De plus, $f_4(0) = 1$ et $f_4(0) = 4a$ donc $a = \frac{1}{4}$. Finalement, on a :

$$f_4(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(1) = 3 \times 1^3 + 2 \times 1^2 - 3 \times 1 - 2 = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$.

2 $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
 $= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Ainsi, pour tout réel x :

$$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) \iff 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\iff \begin{cases} a &= 3 \\ b-a &= 2 \\ c-b &= -3 \\ -c &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 3 \\ b &= 5 \\ c &= 2 \end{cases}$$

On a alors :

$$f(x) = (x-1)(3x^2 + 5x + 2).$$

3 $f(1) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $x = 1$. On peut donc éliminer la courbe b .

De plus, le discriminant de $3x^2 + 5x + 2$ est :

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0,$$

donc ce polynôme admet 2 racines distinctes, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en 3 points distincts.

Ainsi, la courbe a est celle qui représente la fonction f .

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On sait qu'un trinôme admet au moins une racine lorsque son discriminant Δ est positif ou nul.

Ici,

$$\Delta = m^2 - 4p.$$

Il faut donc que :

$$m^2 \geq 4p$$

pour que le trinôme ait au moins une racine.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le discriminant de :

$$P(x) = (k+1)x^2 + 2kx + (k-1)$$

est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2k)^2 - 4 \times (k+1) \times (k-1) \\ &= 4k^2 - 4(k^2 - 1) \\ &= 4 > 0. \end{aligned}$$

Donc P admet toujours deux racines, quelle que soit la valeur de k .

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Pour $m = 0$, on a :

$$(E_0) \quad : \quad x^2 - x - 4 = 0$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - x - 4$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4) \\ &= 1 + 16 \\ &= 17. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions à l'équation (E_0) qui sont :

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

L'ensemble solution de (E_0) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{17}}{2} ; \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$$

- 2** L'équation (E_m) admet une unique solution lorsque le discriminant du membre de gauche est égal à 0. Ce discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (m-1)^2 - 4(2m+1)(m+4)(m-1) \\ &= (m-1)[(m-1) - 4(2m+1)(m+4)] \\ &= (m-1)[m-1 - 4(2m^2 + 8m + m + 4)] \\ &= (m-1)(m-1 - 8m^2 - 36m - 16) \\ &= (m-1)(-8m^2 - 35m - 17). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\iff m-1 = 0 \quad \text{ou} \quad -8m^2 - 35m - 17 = 0 \\ &\iff m = 1 \quad \text{ou} \quad 8m^2 + 35m + 17 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $8m^2 + 35m + 17$ est :

$$\delta = 35^2 - 4 \times 8 \times 17 = 681,$$

donc ce polynôme admet deux racines :

$$m_1 = \frac{-35 - \sqrt{681}}{16} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-35 + \sqrt{681}}{16}.$$

Ainsi, l'équation (E_m) admet une unique solution pour trois valeurs de m :

$$m = 1 \quad ; \quad m = \frac{-35 - \sqrt{681}}{16} \quad ; \quad m = \frac{-35 + \sqrt{681}}{16}.$$

- 3** (E_m) admet 1 pour solution si, en remplaçant x par 1 dans l'équation, l'égalité est vérifiée :

$$\begin{aligned} 1 \text{ est solution de } (E_m) &\iff (2m+1) \times 1^2 + (m-1) \times 1 + (m+4)(m-1) = 0 \\ &\iff 2m+1 + m-1 + m^2 - m + 4m - 4 = 0 \\ &\iff m^2 + 6m - 4 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $m^2 + 6m - 4$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \times 1 \times (-4) \\ &= 36 + 16 \\ &= 52. \end{aligned}$$

Il existe donc deux solutions à l'équation $m^2 + 6m - 4 = 0$:

$$m_1 = \frac{-6 - \sqrt{52}}{2} = -3 - \sqrt{13} \quad \text{et} \quad m_2 = -3 + \sqrt{13}.$$

Ainsi, 1 est solution de l'équation (E_m) pour $m = -3 + \sqrt{13}$ et pour $m = -3 - \sqrt{13}$.

■ Corrigé de l'exercice 14.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ donc $R = \frac{R_1 R_2}{r}$, ce qui donne :

$$2 = \frac{R_1 R_2}{10} \quad \text{soit :} \quad R_1 R_2 = 20.$$

D'après le cours, on sait que $P = R_1 R_2 = 20$ et $S = R_1 + R_2 = 10$ et donc que R_1 et R_2 sont racines du trinôme :

$$x^2 - Sx + P \quad \text{soit :} \quad x^2 - 10x + 20,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 100 - 80 = 20.$$

Les deux racines sont donc :

$$R_1 = \frac{10 - \sqrt{20}}{2} = 5 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad R_2 = 5 + \sqrt{5}.$$

2 On a d'une part :

$$R = \frac{R_1 R_2}{r} \iff 1 = \frac{R_1 R_2}{4} \iff P = R_1 R_2 = 4$$

et d'autre part $S = R_1 + R_2 = 4$.

Le trinôme $x^2 - Sx + P = x^2 - 4x + 4$ a pour discriminant :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

On peut donc dire que $R_1 = R_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$.

3 Nous l'avons vu, on ne peut calculer R_1 et R_2 que lorsque le discriminant de $x^2 - Sx + P$ est supérieur ou égal à 0, soit lorsque :

$$S^2 - 4P \geq 0$$

donc :

$$r^2 - 4rR \geq 0$$

ou encore :

$$r(r - 4R) \geq 0.$$

Or, $r \neq 0$ donc cette dernière inéquation donne, en simplifiant par r :

$$r \geq 4R.$$

■ Corrigé de l'exercice 15.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons x le nombre total de personnes.

Une personne offre 3 cadeaux à $(x - 1)$ personnes donc :

$$3x(x - 1) = 468$$

soit :

$$x(x - 1) = 156$$

ou encore :

$$x^2 - x - 156 = 0.$$

Le discriminant de $x^2 - x - 156$ est :

$$\Delta = (-1)^2 + 4 \times 1 \times 156 = 625 = 25^2.$$

Il y a donc deux racines :

$$\alpha = \frac{-(-1) - 25}{2} = -12 < 0 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 + 25}{2} = 13 > 0.$$

Il n'y a donc qu'une solution à notre problème : il y a 13 personnes.

■ Corrigé de l'exercice 16.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons $\mathcal{A}$ l'aire du « grand rectangle » à l'intérieur duquel se trouve le rectangle plein, dont l'aire sera notée $\mathcal{A}'$.

$\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ désignera donc l'aire de la partie blanche.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \mathcal{A}' &= 30 \times 16 - (30 - 2x)(16 - 2x) \\ &= 480 - (480 - 60x - 32x + 4x^2) \\ &= 92x - 4x^2. \end{aligned}$$

Ainsi, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur si :

$$\begin{aligned} 92x - 4x^2 &= 480 - 92x + 4x^2 \iff 8x^2 - 184x + 480 = 0 \\ &\iff x^2 - 23x + 60 = 0 \quad (\text{en divisant les deux membres par } 8) \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - 23x + 60$ est :

$$\Delta = (-23)^2 - 4 \times 60 = 289 = 17^2$$

donc les solutions de l'équation $x^2 - 23x + 60 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{23 - 17}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{23 + 17}{2} = 20.$$

Or, $0 \leq x \leq 8$ car la largeur du rectangle extérieur est égale à 16 et que x ne peut excéder sa moitié.

Ainsi, pour $x = 3$, l'aire de la partie blanche est égale à celle du rectangle intérieur.

■ Corrigé de l'exercice 17.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- **Méthode 1 : utilisation des formules du cours.** On sait que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour sommet S d'abscisse $-\frac{b}{2a}$.

Donc l'abscisse de S_k est : $x_k = -\frac{-2k}{2} = k$.

L'ordonnée est obtenue en remplaçant x par x_k dans l'équation de la parabole :

$$y_k = k^2 - 2k \times k + k^2 + 2k + 1 = 2k + 1.$$

Donc $y_k = 2x_k + 1$, ce qui signifie que S_k est sur la droite d'équation $y = 2x + 1$. Ils sont donc alignés.

- **Méthode 2 : forme canonique.** L'équation de $\mathcal{P}_k$ est :

$$y = (x - k)^2 + 2k + 1.$$

Cette dernière écriture est la forme canonique de l'équation de $\mathcal{P}_k$, qui nous dit que son sommet a pour coordonnées $(k; 2k + 1)$.

Comme l'ordonnée de S_k est égale au double de son abscisse augmenté de 1, ils appartiennent tous à la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Les sommets sont donc bien tous alignés.

- **Méthode 3 : utilisation des vecteurs.** On utilise la forme canonique précédente pour voir que $S_k(k; 2k + 1)$, et donc $S_{k+1}(k + 1; 2(k + 1) + 1) = (k + 1; 2k + 3)$.

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{S_k S_{k+1}} \left(\begin{pmatrix} (k+1) - k \\ (2k+3) - (2k+1) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, quelle que soit la valeur de k , $\overrightarrow{S_k S_{k+1}}$ a toujours les mêmes coordonnées ; donc, par exemple, $\overrightarrow{S_k S_{k+1}} = \overrightarrow{S_{k+1} S_{k+2}}$, ce qui signifie que tous les points S_k, S_{k+1} et S_{k+2} sont alignés. Comme ce résultat est valable pour toutes les valeurs de k , cela signifie que tous les points S_k sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 18.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons x et y les deux nombres. On sait alors d'après l'énoncé que :

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ xy - (x + y) = 43 \end{cases}$$

La première équation nous donne :

$$x = 7 + y$$

donc en remplaçant x par cette dernière expression dans la seconde équation, on a :

$$\begin{aligned} (7 + y)y - (7 + y + y) &= 43 \iff 7y + y^2 - 7 - 2y = 43 \\ &\iff y^2 + 5y - 50 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $y^2 + 5y - 50$ est :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-50) = 25 + 200 = 225 = 15^2$$

donc deux valeurs sont possibles pour y :

$$y_1 = \frac{-5 - 15}{2} = -10 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-5 + 15}{2} = 5.$$

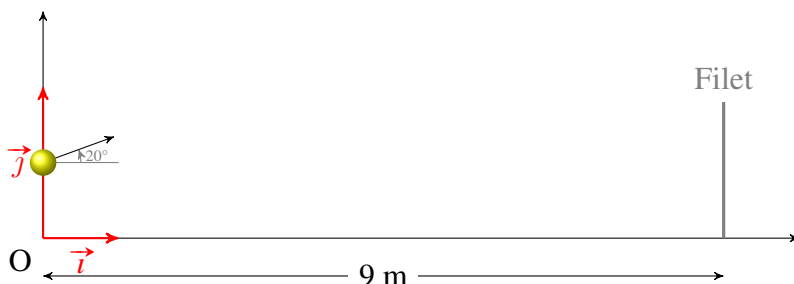
Or, $y \in \mathbb{N}$ donc $y \neq -10$; seule $y = 5$ est une valeur possible.

On en déduit alors que $x = 7 + y = 7 + 5 = 12$.

Les deux nombres sont donc 5 et 12.

■ Corrigé de l'exercice 19.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)



On convertit : $20 \text{ km/h} = \frac{20000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 5,56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En remplaçant les lettres dans la formule donnée, on a :

$$y = -\frac{1}{2} \times \frac{9,81}{(5,56 \times \cos 20^\circ)^2} x^2 + x \tan 20^\circ + 0,5,$$

soit :

$$y = -0,179687471x^2 + 0,363970234x + 0,5.$$

Le sommet de la parabole a pour abscisse :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0,363970234}{2 \times (-0,179687471)} \approx 1.$$

Donc, au sommet de sa trajectoire, la balle n'aura pas encore atteint le filet.

En prenant $x = 9$, on obtient :

$$y \approx -10,8$$

ce qui signifie que la balle aura touché le sol avant 9 mètres.

Le joueur a donc perdu.

Cherchons la vitesse minimale v (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) à donner à la balle lors de la frappe pour quelle franchisse le filet.

La fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{5,554786596}{v^2} x^2 + 0,363970234x + 0,5$$

représente la hauteur (en mètre) de la balle en fonction de sa position x .

On veut que $f(9) > 0,914$, soit :

$$-\frac{5,554786596}{v^2} \times 9^2 + 0,363970234 \times 9 + 0,5 > 0,914$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{-449,955}{v^2} + 2,862 > 0 &\implies \frac{-449,955}{v^2} > -2,862 \\ &\implies \frac{1}{v^2} < \frac{-2,862}{-449,955} \\ &\implies v^2 > \frac{449,955}{2,862} \\ &\implies v^2 > 157,217 \\ &\implies v > \sqrt{157,217} \\ &\iff v > 12,54 \end{aligned}$$

La vitesse à donner doit donc être supérieure à $12,54 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (soit à peu près 45 km/h).

■ Corrigé de l'exercice 20.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'équation est équivalente à

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme est :

$$\Delta = 5$$

donc les solutions de l'équation sont :

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

2 On a :

$$N^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + N.$$

Donc N est solution de l'équation de la question 1.

Comme $N > 0$, on en déduit que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

■ Corrigé de l'exercice 21.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On sait que si a et b sont solutions d'une équation polynomiale de degré 2 alors, ils sont aussi solutions de l'équation :

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$

Comme a et b sont solutions de l'équation :

$$x^2 - sx + t = 0,$$

on a :

$$\begin{cases} a+b = s \\ ab = t \end{cases}$$

De même, comme $a+1$ et $b+1$ sont solutions de l'équation :

$$x^2 - s^2x + st = 0,$$

on a :

$$\begin{cases} (a+1) + (b+1) = s^2 \\ (a+1)(b+1) = st \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a+b+2 = s^2 \\ ab+a+b+1 = st \end{cases}$$

Comme $a+b = s$ et $ab = t$ (d'après le premier système), on obtient :

$$\begin{cases} s^2 - s - 2 = 0 \\ t + s + 1 = st \end{cases}$$

L'équation :

$$s^2 - s - 2 = 0$$

a pour solutions :

$$s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = 2 \end{cases}$$

- Si $s = -1$, alors l'équation $t + s + 1 = st$ devient :

$$t = -t \quad \text{soit :} \quad t = 0$$

Dans ce cas, le couple solution demandé est : $(s;t) = (-1;0), t \in \mathbb{R}$.

- Si $s = 2$, alors l'équation $t + s + 1 = st$ devient :

$$t + 3 = 2t \quad \text{soit} \quad t = 3$$

Dans ce cas, le couple solution demandé est : $(s;t) = (2;3), t \in \mathbb{R}$.

N.B. Si on vérifie nos résultats, on voit dans un premier temps que le couple $(-1;0)$ donne pour la première équation : $x^2 + x = 0$ (qui admet pour solutions 0 et -1) et donne pour la seconde équation : $x^2 - x = 0$ (qui admet 0 et 1 pour solutions, et qui sont bien les successeurs de -1 et 0).

En revanche, pour le couple $(2;3)$, la première équation donne : $x^2 - 2x + 3 = 0$, de discriminant négatif. Il n'y a donc pas de solutions... dans l'ensemble des réels ! Car en effet, elle admet quand-même des solutions, mais dans un ensemble plus « grand » que celui des nombres réels : l'ensemble des nombres *complexes* (que vous verrez en classe de Terminale S).

$$1 \quad (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}.$$

$$2 \quad \text{Si } A = a + b\sqrt{2} = \sqrt{33 + 20\sqrt{2}}, \text{ alors } A^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 33 + 20\sqrt{2}.$$

Par identification du coefficient de $\sqrt{2}$ et du nombre entier, on a :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 33 \\ 2ab = 20 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 33 \\ ab = 10 \end{cases}$$

3 De la seconde équation du système précédent, on peut déduire :

$$b = \frac{10}{a}$$

et en remplaçant b par cette valeur dans la première équation, on obtient :

$$a^2 + \frac{200}{a^2} = 33$$

soit :

$$a^4 - 33a^2 + 200 = 0.$$

En posant $X = a^2$, on arrive à :

$$X^2 - 33X + 200 = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = (-33)^2 - 800 = 289 = 17^2.$$

Les deux solutions de $X^2 - 33X + 200 = 0$ sont alors :

$$X_1 = \frac{33 + 17}{2} = 25 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{33 - 17}{2} = 8.$$

Donc les solutions de $a^4 - 33a^2 + 200 = 0$ sont a_1 et a_2 tels que :

$$a_1^2 = 25 \quad \text{et} \quad a_2^2 = 8$$

soit :

$$a_1 = 5 \text{ ou } a_1 = -5 \quad \text{et} \quad a_2 = 2\sqrt{2} \text{ ou } a_2 = -2\sqrt{2}.$$

Or, $a \in \mathbb{Z}$ donc $a = 5$ ou $a = -5$.

- Si $a = 5$, alors $b = \frac{10}{5} = 2$ et $A = 5 + 2\sqrt{2}$;
- Si $a = -5$, alors $b = -2$ et $A = -5 - 2\sqrt{2} < 0$, ce qui n'est pas possible car $A > 0$.

Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{33 + 20\sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{2}}$$

4 Posons $A = \sqrt{p + q\sqrt{n}}$. Alors, $A^2 = p + q\sqrt{n}$ d'où :

$$\begin{cases} a^2 + nb^2 = p \\ b = \frac{q}{2a} \end{cases}$$

La première équation devient alors :

$$a^2 + \frac{nq^2}{4a^2} = p$$

ou encore :

$$a^4 - 4pa^2 + nq^2 = 0.$$

ou encore :

$$X^2 - 4pX + nq^2 \quad \text{en posant } X = a^2.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 16p^2 - 4nq^2 = 4(4p^2 - nq^2).$$

Première condition d'existence : il faut que $4p^2 - nq^2 \geq 0$ pour pouvoir transformer l'écriture de A .

Dans ce cas, les deux solutions X_1 et X_2 sont :

$$X_1 = \frac{4p - 2\sqrt{4p^2 - nq^2}}{2} = 2p - \sqrt{4p^2 - nq^2} \quad \text{et} \quad X_2 = 2p + \sqrt{4p^2 - nq^2}.$$

Deuxième condition : il faut que $2p - \sqrt{4p^2 - nq^2} \geq 0$ et $2p + \sqrt{4p^2 - nq^2} \geq 0$.

Dans ce cas,

$$a_1 = \pm \sqrt{2p - \sqrt{4p^2 - nq^2}} \quad \text{et} \quad a_2 = \pm \sqrt{2p + \sqrt{4p^2 - nq^2}}.$$

Or, $a \in \mathbb{Z}$ donc :

3^e condition : il faut que $\sqrt{2p - \sqrt{4p^2 - nq^2}} \in \mathbb{N}$ ou que $\sqrt{2p + \sqrt{4p^2 - nq^2}} \in \mathbb{N}$.

On a alors :

$$a = \pm \sqrt{2p \pm \sqrt{4p^2 - nq^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{q}{\pm 2\sqrt{2p \pm \sqrt{4p^2 - nq^2}}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 23.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc \iff a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc = 0.$$

Posons alors $f(a) = a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc$.

L'équation $f(a) = 0$ admet au moins une solution car le triangle existe donc le discriminant de $f(a)$ est supérieur ou égal à 0.

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(b+c)]^2 - 4 \times 1 \times (b^2 + c^2 - bc) \\ &= b^2 + 2bc + c^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc \\ &= 6bc - 3(b^2 + c^2) \\ &= -3(b^2 - 2bc + c^2) \\ &= -3(b-c)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta \leq 0$. Or, on sait que $\Delta \geq 0$ donc $\Delta = 0$, ce qui signifie que $b = c$.

Il n'y a qu'une solution à l'équation $f(a) = 0$ donnée par : $-\frac{-(b+c)}{2} = \frac{2b}{2} = b$ (car $b = c$).

Finalement, on a $a = b = c$. Le triangle est donc équilatéral.

Généralités sur les fonctions

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

■ Exercice 1. Trouver le domaine de définition

★★★★★

A

Corrigé page 35

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver le domaine de définition $\mathcal{D}$.

1 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

2 $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$

3 $f(x) = \sqrt{3x-1}$

4 $f(x) = \frac{3}{9x-7}$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

6 $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

7 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

8 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

9 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x^2 - 5x + 4}$

■ Exercice 2. Fonctions paires, fonctions impaires

★★★★★

A

Corrigé page 37

Pour chacune des fonctions suivantes, dites si elles sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.

1 $f_1(x) = x^2 - 1$

2 $f_2(x) = x^2 - 3x + 1$

3 $f_3(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

4 $f_4(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$

5 $f_5(x) = \frac{x}{x-3}$

■ Exercice 3. Lecture de tableaux de variation

★★★★★

R

Corrigé page 38

1 La fonction f a pour tableau de variation :

x	-5	0	5	10
$f(x)$	-2	-1	-3	5

a. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solution(s) ?

b. Quel est le minimum de f ? Le maximum?

c. Combien l'équation $f(x) = -\frac{3}{2}$ admet-elle de solution(s)?

2 La fonction g a pour tableau de variation :

x	-2	1	5	7
$g(x)$	-1	-5	-2	-4

a. Quel est le minimum de g ? Le maximum?

b. Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s)?

c. Résoudre l'inéquation $g(x) \leq 0$ sur $[-2; 7]$.

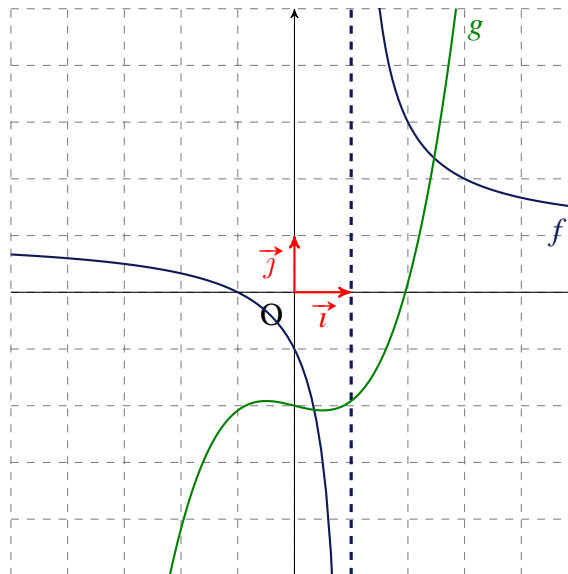
d. Combien l'équation $g(x) = -3$ admet-elle de solution(s)?

■ Exercice 4. Lectures graphiques

★★★★☆ R

Corrigé page 38

1 À partir des courbes suivantes, dresser un tableau de variations des fonctions f et g .



2 Résoudre graphiquement :

a. $f(x) \geq 0$

b. $g(x) \leq -2$

c. $f(x) = g(x)$

3 On donne : $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - 2$.

Résoudre algébriquement l'inéquation $g(x) \leq -2$, puis comparer avec les résultats trouvés à la question 2 b.

■ Exercice 5. Décompositions en fonctions de référence

★★★★☆ A

Corrigé page 39

À l'aide des fonctions de références ($x \mapsto ax + b$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^2$), décomposez les fonctions suivantes afin de trouver leur sens de variation sur le ou les intervalles précisé(s).

- 1 $f_1 : x \mapsto \sqrt{2-5x}$ sur $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right[$
- 2 $f_2 : x \mapsto -2x + 3 + \frac{5}{x-1}$ sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$
- 3 $f_3 : x \mapsto -\frac{2}{1-3\sqrt{x+1}}$ sur $] -1; +\infty[$
- 4 $f_4 : x \mapsto (-2x+8)^2$ sur $] -\infty; 4]$
- 5 $f_5 : x \mapsto \frac{-2}{(x+3)^2}$ sur $] -3; +\infty[$

■ Exercice 6. Fonctions associées : domaine de définition et variations (1)

★★★★☆ A

Corrigé page 40

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition puis les variations sur cet ensemble.

- 1 $f(x) = \frac{-3}{(2-3x)^2}$
- 2 $g(x) = \sqrt{(x-2)^2 - 4}$

■ Exercice 7. Fonctions associées : domaine de définition et variations (2)

★★★★☆ A

Corrigé page 41

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 4x - 5.$$

- 1 Dresser le tableau de variation de f .
- 2 On pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de g .
 - b. En justifiant soigneusement toutes les étapes, dresser le tableau de variation de g .
- 3 On pose $h(x) = |f(x)|$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de h .
 - b. Dresser le tableau de variation de h en justifiant.
- 4 On pose $i(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 - a. Déterminer l'ensemble de définition de i .
 - b. Dresser le tableau de variation de i en justifiant.

Valeurs absolues

■ Exercice 8. Étude d'une fonction avec valeurs absolues

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 42

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = |x - 1| - |x + 2| .$$

- 1 Trouver les expressions de $f(x)$ sans valeurs absolues suivant les valeurs de x .
- 2 En déduire les variations (sous forme de tableau par exemple) de la fonction f .
- 3 Trouver les variations de la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$.

■ Exercice 9. Calculs avec valeurs absolues

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 42

Effectuer les calculs suivants. On mettra les résultats sous sa forme la plus simplifiée.

1 $\left| 5 - \frac{3}{8} \right|$

3 $|\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{12} - 5|$

2 $\left| 1 - \frac{13}{7} \right|$

4 $|\sqrt{5} - 3| - |\sqrt{125} - 15|$

■ Exercice 10. Valeur absolue d'un polynôme de degré 2

★★☆☆☆ A

Corrigé page 43

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| .$$

- 1 Trouver les expressions de $f(x)$ sans valeurs absolues suivant les valeurs de x .
- 2 En déduire les variations (sous forme de tableau par exemple) de la fonction f .
- 3 Résoudre l'inéquation $f(x) \leq x + 3$.

■ Exercice 11. Inéquations avec valeurs absolues

★★★★☆ A

Corrigé page 44

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $|2x - 5| > 2$

3 $|3x - 9| \geq 5$

2 $|8x + 4| \leq 2$

4 $|5x + 20| < 5$

■ Exercice 12. Équations avec valeurs absolues

★★★★☆ A

Corrigé page 44

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $|x - 1| = 6$

4 $|3x - 1| = |4x + 2|$

2 $|x + 2| = -3$

5 $|5x - 3| = |2x + 1|$

3 $|2x + 3| = 5$

6 $|x^2 - 3| = 1$

■ Exercice 13. Ensemble de points

★★★★★ R

Corrigé page 45

1 Trouver l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $|x - y| = 1$.

2 Trouver l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $2|x| + |y| = 3$.

3 Trouver l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $|x + y| + |x - y| = 1$.

4 Trouver l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $|2x + 3y| + |-5x + y| = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2.$

$f(x)$ est un trinôme du second degré donc défini pour tout réel x . Ainsi,

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$

2 $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}}.$

$f(x)$ est un quotient dont le numérateur est défini pour tout réel x (car c'est une fonction affine). Son dénominateur ne doit pas être égal à 0. Donc $\sqrt{x} \neq 0$, soit $x \neq 0$ (1).

Le dénominateur est une racine carrée donc son radicande (x) doit être supérieur ou égal à 0, donc $x \geq 0$ (2).

Les conditions (1) et (2) nous donne :

$$\mathcal{D} =]0; +\infty[$$

3 $f(x) = \sqrt{3x-1}.$

$f(x)$ est une racine carrée donc son radicande ($3x-1$) doit être supérieur ou égal à 0.

$$3x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3}.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{D} = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

4 $f(x) = \frac{3}{9x-7}.$

$f(x)$ est un quotient dont le numérateur est toujours défini et dont le dénominateur doit être non nul (différent de 0). D'où :

$$9x - 7 \neq 0 \iff x \neq \frac{7}{9}.$$

On en déduit alors :

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{9} \right\}$$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}.$

Les deux conditions à remplir ici sont :

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \text{ (dénominateur non nul)} \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases} \iff x \geq 1.$$

D'où :

$$\mathcal{D} = [1; +\infty[$$

6 $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$

Les conditions à remplir ici sont :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

Pour résoudre l'inéquation $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, nous devons nous aider du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$		0	$+$

Ainsi,

$$\mathcal{D} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

7 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$

$f(x)$ existe lorsque $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Le discriminant de $x^2 - 3x + 2$ est $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc ce trinôme a pour racines $\alpha = \frac{3-1}{2} = 1$ et $\beta = \frac{3+1}{2} = 2$.

On sait qu'un trinôme est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de ses racines d'où :

$$\mathcal{D} =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

8 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$

$f(x)$ existe quand $x^2 - 1 \geq 0$ et $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

$x^2 - 1 \geq 0$ lorsque $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ car les racines (évidentes) de $x^2 - 1$ sont 1 et -1 .

De plus, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ pour tout réel x . On en déduit alors que :

$$\mathcal{D} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

9 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x^2 - 5x + 4}.$

Les conditions à remplir ici sont :

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

- Le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = 16 - 12 = 4$ donc $x^2 - 4x + 3$ admet deux racines :
 $\alpha = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$ et $\beta = \frac{4 + 2}{2} = 3.$
Ainsi, $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ pour $x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[.$
- Le discriminant de $x^2 - 5x + 4$ est $\Delta' = 25 - 16 = 9$ donc $x^2 - 5x + 4$ admet deux racines :
 $\alpha' = \frac{5 - 3}{2} = 1$ et $\beta' = \frac{5 + 3}{2} = 4.$

On en déduit alors :

$$\mathcal{D} =]-\infty; 1[\cup [3; 4[\cup]4; +\infty[$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f_1(x) = x^2 - 1.$

- Le domaine de définition de f_1 est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
- De plus, $f_1(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f_1(x).$

Par conséquent, f_1 est paire.

2 $f_2(x) = x^2 - 3x + 1.$

- Le domaine de définition de f_2 est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
- De plus, $f_2(-x) = (-x)^2 - 3(-x) + 1 = x^2 + 3x + 1.$
Donc $f_2(-x) \neq f_2(x)$ et $f_2(-x) \neq -f_2(x).$

Par conséquent, f_2 n'est ni paire ni impaire.

3 $f_3(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}.$

- Le domaine de définition de f_3 est $\mathbb{R}$, donc centré en 0 (car $x^2 + 1 \geq 0$ pour tout réel x).
- De plus, $f_3(-x) = 2(-x)\sqrt{(-x)^2 + 1} = -2x\sqrt{x^2 + 1} = -f_3(x).$

Par conséquent, f_3 est impaire.

4 $f_4(x) = \frac{x}{x^2 + 3}.$

- Le domaine de définition de f_4 est $\mathbb{R}$, donc centré en 0 (car $x^2 + 3 \neq 0$ pour tout réel x).
- De plus, $f_4(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 3} = -\frac{x}{x^2 + 3} = -f_4(x).$

Par conséquent, f_4 est impaire.

5 $f_5(x) = \frac{x}{x-3}$.

Le domaine de définition de f_5 est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ (car $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$).

$\mathcal{D}$ n'est pas centré en 0 donc f_5 ne peut pas être paire ou impaire.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1
- L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]5; 10[$.
 - Le minimum de f est -3 , atteint pour $x = 5$ et son maximum est 5 , atteint pour $x = 10$.
 - L'équation $f(x) = -\frac{3}{2}$ a 2 solutions ; l'une dans $] -5; 0[$ et l'autre dans $]0; 5[$.
- 2
- Le minimum de g est -5 , atteint pour $x = 1$ et le maximum est -1 , atteint pour $x = -2$.
 - L'équation $g(x) = 0$ admet aucune solution car son maximum est strictement inférieur à 0.
 - Le minimum de g sur $[-2; 7]$ étant strictement inférieur à 0, l'inéquation $g(x) \leq 0$ a pour solution : $S = [-2; 7]$.
 - L'équation $g(x) = -3$ admet 3 solutions : une sur $] -2; 1[$, une autre sur $]1; 5[$ et une autre sur $]5; 7[$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Nous avons :

x	-5	1	5
$f(x)$	↘		↘

x	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
$g(x)$	↗ ↘ ↗			

- 2
- $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; -1] \cup]1; 5]$.
 - La droite d'équation $y = -2$ coupe la courbe représentative de g en 3 points d'abscisses respectives : $x_1 \approx -0,9$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0,9$.
L'inéquation $g(x) \leq -2$ a alors pour ensemble solution : $S = [-5; -0,9] \cup [0; 0,9]$.

N.B. L'échelle du graphique ainsi que ses graduations ne nous permettent pas de donner avec précision les abscisses x_1 et x_3 , donc si l'élève donne d'autres valeurs que celles données ici, le résultat sera correct (dans la mesure où les valeurs sont proches de $-0,9$ et $0,9$).

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g .

On peut alors dire que l'ensemble solution est approximativement : $S = \{0,4 ; 2,5\}$.

$$\begin{aligned}
3 \quad g(x) \leq -2 &\iff \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x - 2 \leq -2 \\
&\iff \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x \leq 0 \\
&\iff x \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

Les racines de $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}$ sont $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où le tableau de signes suivant :

x	-5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	5		
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$x\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble solution de l'inéquation est donc : $S = \left[-5; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$, ce qui correspond bien aux résultats trouvés à la question 2 b. car $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,86$.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad f_1 : x \mapsto \sqrt{2-5x} \text{ sur } \left[\frac{2}{5}; +\infty \right[.$$

$$f_1 : x \xrightarrow{u} 2-5x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{2-5x}.$$

La fonction $u : x \mapsto 2-5x$ est une fonction affine de coefficient directeur négatif donc elle est décroissante; en prenant la racine carrée de u , on ne change pas les variations donc $\sqrt{u}$ est décroissante.

$$\underline{f_1 \text{ est donc décroissante sur } \left[\frac{2}{5}; +\infty \right[}$$

$$2 \quad f_2 : x \mapsto -2x + 3 + \frac{5}{x-1} \text{ sur }]-\infty; 1[\text{ et sur }]1; +\infty[.$$

Posons : $f_2 : x \mapsto g + h$ où :

$$g : x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v=\sqrt{u}} \sqrt{x-1} \xrightarrow{w=\frac{1}{v}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{5w} \frac{5}{\sqrt{x-1}} \text{ et } h : x \mapsto -2x + 3.$$

Pour g , u est une fonction affine croissante, donc $v = \sqrt{u}$ est aussi croissante et donc $w = \frac{1}{v}$ est décroissante, ce qui fait que $5w$ est aussi décroissante.

De plus, h est une fonction affine décroissante.

Ainsi, f_2 est décroissante comme somme de fonctions décroissantes sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

3 $f_3 : x \mapsto -\frac{2}{1-3\sqrt{x+1}}$ sur $] -1; +\infty[$.

$$f_3 : x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v=\sqrt{u}} \sqrt{x+1} \xrightarrow{w=-3v} -3\sqrt{x+1} \xrightarrow{z=1+w} 1-3\sqrt{x+1} \xrightarrow{\frac{1}{z}} \frac{1}{1-3\sqrt{x+1}} \xrightarrow{-2 \times \frac{1}{z}} \frac{-2}{1-3\sqrt{x+1}}$$

u est une fonction affine croissante, donc $v = \sqrt{u}$ est croissante, donc $w = -3v$ est décroissante, d'où $z = 1 + w$ aussi et $\frac{1}{z}$ est croissante. Ainsi, $-2 \times \frac{1}{z}$ est décroissante.

Ainsi, f_3 est décroissante sur $] -1; +\infty[$.

4 $f_4 : x \mapsto (-2x+8)^2$ sur $[4; +\infty[$.

$$f_4 : x \xrightarrow{u} -2x+8 \xrightarrow{v=u^2} (-2x+8)^2.$$

u est une fonction affine décroissante et positive sur $] -\infty; 4]$

(car $-2x+8 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 4$).

La fonction carré étant croissante lorsque sa variable est positive, $v = u^2$ est croissante lorsque $u \geq 0$, c'est-à-dire sur $] -\infty; 4]$.

f_4 est donc croissante sur $] -\infty; 4]$.

5 $f_5 : x \mapsto \frac{-2}{(x+3)^2}$ sur $] -3; +\infty[$.

$$f_5 : x \xrightarrow{u} x+3 \xrightarrow{v=u^2} (x+3)^2 \xrightarrow{w=\frac{1}{v}} \frac{1}{(x+3)^2} \xrightarrow{-2w} \frac{-2}{(x+3)^2}$$

u est croissante et $u \geq 0$ sur $] -3; +\infty[$, donc $v = u^2$ est croissante, donc $w = \frac{1}{v}$ est décroissante, donc $-2w$ est croissante.

f_5 est donc croissante sur $] -3; +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On a : $\mathcal{D}_f = \left] -\infty; \frac{2}{3} \right[\cup \left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$ et :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2-3x$			
$(2-3x)^2$			
$\frac{1}{(2-3x)^2}$			
$\frac{-3}{(2-3x)^2}$			

2 On a : $(x-2)^2 - 4 \geq 0 \iff x^2 - 4x + 4 - 4 \geq 0$
 $\iff x(x-4) \geq 0$

Donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$ et :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$				
$\sqrt{x^2 - 4x}$				

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $-\frac{b}{2a} = 2$ donc le sommet de la parabole (qui représente f) a pour abscisse 2.

On a donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

2 a. Le discriminant de f est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36$$

donc $f(x)$ a deux racines :

$$x_1 = \frac{4-6}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; -1] \cup [5; +\infty[$.

b. « 2 » étant entre les racines de f , f est décroissante sur $]-\infty; -1]$, puis croissante sur $[5; +\infty[$.

Or, prendre la racine carrée d'une fonction ne change pas ses variations donc :

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
g				

3 a. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ car nous pouvons calculer la valeur absolue de n'importe quel nombre réel $f(x)$.

b. On sait que $f(x) < 0$ sur $] -1; 5[$; or, prendre la valeur absolue d'une fonction négative inverse les variations alors que prendre la valeur absolue d'une fonction positive ne les change pas. On a donc :

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
h					

4 a. $\mathcal{D}_i =]-\infty; -1[\cup]-1; 5[\cup]5; +\infty[.$

b. Prendre l'inverse d'une fonction inverse ses variations donc :

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$f(x)$					
$i(x)$					

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1
- On sait que $x - 1 > 0$ pour $x > 1$; donc pour $x < 1$, $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$;
 - On sait que $x + 2 > 0$ pour $x > -2$; donc pour $x < -2$, $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$.

On a donc :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$ x - 1 =$	$1 - x$	$1 - x$	0	$x - 1$
$ x + 2 =$	$-x - 2$	0	$x + 2$	$x + 2$
$f(x) =$	$1 - x - (-x - 2) = 3$	$1 - x - (x + 2) = -2x - 1$	$x - 1 - (x + 2) = -3$	

Ainsi,

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{pour } x \in]-\infty; -2] \\ -2x - 1 & \text{pour } x \in [-2; 1] \\ -3 & \text{pour } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

- 2 De la question précédente, on déduit :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	3	3	-3	-3

- 3 $-2x - 1 > 0 \iff x < -\frac{1}{2}$ d'où :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	3	3	0	3	3

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\left| 5 - \frac{3}{8} \right| = \left| \frac{40}{8} - \frac{3}{8} \right| = \left| \frac{37}{8} \right| = \frac{37}{8}.$

2 $\left| 1 - \frac{13}{7} \right| = \left| \frac{7}{7} - \frac{13}{7} \right| = \left| -\frac{6}{7} \right| = \frac{6}{7}.$

3 $|\sqrt{3}-1| + |\sqrt{12}-5|$.

- $3 > 1$ donc $\sqrt{3} > \sqrt{1}$, soit $\sqrt{3}-1 > 0$; ainsi, $|\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$.
- $12 < 25$ donc $\sqrt{12} < \sqrt{25}$, soit $\sqrt{12}-5 < 0$;
ainsi, $|\sqrt{12}-5| = -(\sqrt{12}-5) = 5-\sqrt{12} = 5-2\sqrt{3}$.

Ainsi, $|\sqrt{3}-1| + |\sqrt{12}-5| = \sqrt{3}-1 + 5-2\sqrt{3} = \underline{4-\sqrt{3}}$.

4 $|\sqrt{5}-3| - |\sqrt{125}-15|$.

- $5 < 9$ donc $\sqrt{5} < \sqrt{9}$, soit $\sqrt{5}-3 < 0$; ainsi, $|\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$.
- $125 < 225$ donc $\sqrt{125} < \sqrt{225}$, soit $\sqrt{125}-15 < 0$;
ainsi, $|\sqrt{125}-15| = -(\sqrt{125}-15) = 15-\sqrt{125} = 15-5\sqrt{5}$.

Ainsi, $|\sqrt{5}-3| - |\sqrt{125}-15| = 3-\sqrt{5} - (15-5\sqrt{5}) = 3-\sqrt{5}-15+5\sqrt{5} = \underline{-12+4\sqrt{5}}$.

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ admet une racine évidente : $\alpha = 1$. Donc la seconde racine est $\beta = \frac{c}{a\alpha} = 2$.

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$x^2 - 3x + 2$	0	$-x^2 + 3x - 2$	0	$x^2 - 3x + 2$

- 2 On déduit de la question précédente le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		0		0	

- 3 L'inéquation $f(x) \leq x+3$ équivaut à :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
x^2-3x+2		+	0	-	0	+
		$x^2-3x+2 \leq x+3$	0	$-x^2+3x-2 \leq x+3$	0	$x^2-3x+2 \leq x+3$

- Sur $[1; 2]$, on a : $-x^2 + 2x - 5 \leq 0$.
Le discriminant de $-x^2 + 2x - 5$ est : $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (-5) = -16 < 0$ donc $-x^2 + 2x - 5$ est toujours du signe de -1 , donc toujours négatif.
Ainsi, $[1; 2]$ est inclus dans l'ensemble solution.

- Sur $]-\infty; 1]$ et sur $[2; +\infty[$, on a : $x^2 - 4x - 1 \leq 0$.

Le discriminant de $x^2 - 4x - 1$ est : $\Delta = 16 + 4 = 20$. Il y a donc deux racines : $\alpha = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - 2\sqrt{5} < 1$ et $\beta = 2 + 2\sqrt{5} > 2$. Donc α et β sont dans les intervalles $]-\infty; 1]$ et sur $[2; +\infty[$.

Ainsi, $x^2 - 4x - 1 \leq 0$ sur $[\alpha; 1]$ et sur $[2; \beta]$.

Par conséquent, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq x + 3$ est :

$$\mathcal{S} = [2 - 2\sqrt{5}; 2 + 2\sqrt{5}].$$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 1 \quad |2x - 5| > 2 &\iff 2x - 5 > 2 \quad \text{ou} \quad 2x - 5 < -2 \\ &\iff 2x > 7 \quad \text{ou} \quad 2x < 3 \\ &\iff x > \frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $|2x - 5| > 2$ est donc $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[$

$$\begin{aligned} 2 \quad |8x + 4| \leq 2 &\iff -2 \leq 8x + 4 \leq 2 \\ &\iff -6 \leq 8x \leq -2 \\ &\iff -\frac{3}{4} \leq x \leq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $|8x + 4| \leq 2$ est donc $\mathcal{S} = [-\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}]$

$$\begin{aligned} 3 \quad |3x - 9| \geq 5 &\iff 3x - 9 \geq 5 \quad \text{ou} \quad 3x - 9 \leq -5 \\ &\iff 3x \geq 14 \quad \text{ou} \quad 3x \leq 4 \\ &\iff x \geq \frac{14}{3} \quad \text{ou} \quad x \leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $|3x - 9| \geq 5$ est donc $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{4}{3}] \cup [\frac{14}{3}; +\infty[$

$$\begin{aligned} 4 \quad |5x + 20| < 5 &\iff -5 < 5x + 20 < 5 \\ &\iff -25 < 5x < -15 \\ &\iff -5 < x < -3 \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $|5x + 20| < 5$ est donc $\mathcal{S} =]-5; -3[$

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 1 \quad |x - 1| = 6 &\iff x - 1 = 6 \quad \text{ou} \quad x - 1 = -6 \\ &\iff x = 7 \quad \text{ou} \quad x = -5 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{-5; 7\}$.

2 $|x+2| = -3$. Une valeur absolue est toujours positive ou nulle donc l'ensemble solution est : $\mathcal{S} = \emptyset$.

3 $|2x+3| = 5 \iff 2x+3 = 5 \text{ ou } 2x+3 = -5$
 $\iff 2x = 2 \text{ ou } 2x = -8$
 $\iff x = 1 \text{ ou } x = -4$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{-4; 1\}$.

4 $|3x-1| = |4x+2| \iff 3x-1 = 4x+2 \text{ ou } 3x-1 = -(4x+2)$
 $\iff -1-2 = 4x-3x \text{ ou } 7x = -1$
 $\iff x = -3 \text{ ou } x = -\frac{1}{7}$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left\{-3; -\frac{1}{7}\right\}$.

5 $|5x-3| = |2x+1| \iff 5x-3 = 2x+1 \text{ ou } 5x-3 = -2x-1$
 $\iff 3x = 4 \text{ ou } 7x = 2$
 $\iff x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = \frac{2}{7}$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{7}; \frac{4}{3}\right\}$.

6 $|x^2-3| = 1 \iff x^2-3 = 1 \text{ ou } x^2-3 = -1$
 $\iff x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 2$
 $\iff x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$

L'ensemble solution est donc $\mathcal{S} = \{-2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$.

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Nous allons faire une disjonction de cas sur $x-y$ afin d'enlever les valeurs absolues.

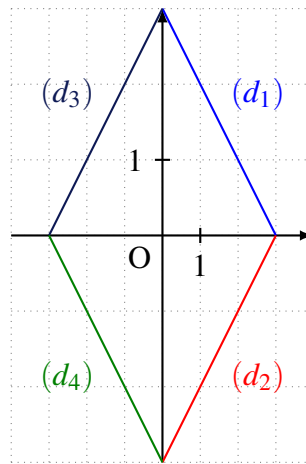
- Si $x-y > 0$ (c'est-à-dire si $y < x$), alors $|x-y| = 1 \iff x-y = 1 \iff y = x-1$.
 La condition de départ sur y (qui est $y < x$) est bien remplie car $x-1 < x$ pour tout x . Donc l'ensemble des points cherché est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x-1$.
- Si $x-y < 0$ (c'est-à-dire si $y > x$), $|x-y| = 1 \iff -(x-y) = 1 \iff y = x+1$.
 La condition de départ sur y (qui est $y > x$) est bien remplie car $x+1 > x$ pour tout x . Donc l'ensemble des points cherché est la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x+1$.

Au final, l'ensemble des points est donc la réunion de ces deux ensembles : $\mathcal{S} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$.

2 Il est ici nécessaire de faire une disjonction de cas sur x et y .

- Si $x > 0$:
 - Si $y > 0$, alors $2|x| + |y| = 3 \iff 2x + y = 3 \iff y = -2x + 3$.
L'ensemble des points vérifiant $2|x| + |y| = 3$ est donc la partie de la droite (d_1) où $x > 0$ et $y > 0$ (représentée en **bleu** ci-dessous).
 - Si $y < 0$, alors $2|x| + |y| = 3 \iff 2x - y = 3 \iff y = 2x - 3$.
L'ensemble des points vérifiant $2|x| + |y| = 3$ est donc la partie de la droite (d_2) où $x > 0$ et $y < 0$ (représentée en **rouge** ci-dessous).
- Si $x < 0$:
 - Si $y > 0$, alors $2|x| + |y| = 3 \iff -2x + y = 3 \iff y = -2x + 3$.
L'ensemble des points vérifiant $2|x| + |y| = 3$ est donc la partie de la droite (d_3) où $x < 0$ et $y > 0$ (représentée en **violet** ci-dessous).
 - Si $y < 0$, alors $2|x| + |y| = 3 \iff -2x - y = 3 \iff y = -2x - 3$.
L'ensemble des points vérifiant $2|x| + |y| = 3$ est donc la partie de la droite (d_4) où $x < 0$ et $y < 0$ (représentée en **vert** ci-dessous).

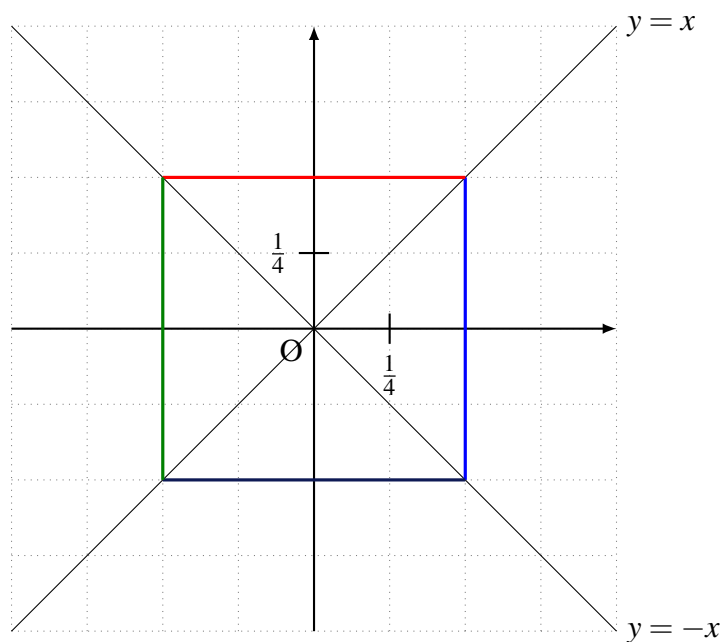
L'ensemble solution est donc l'ensemble des points représenté ci-dessous :



3 $|x+y| + |x-y| = 1$.

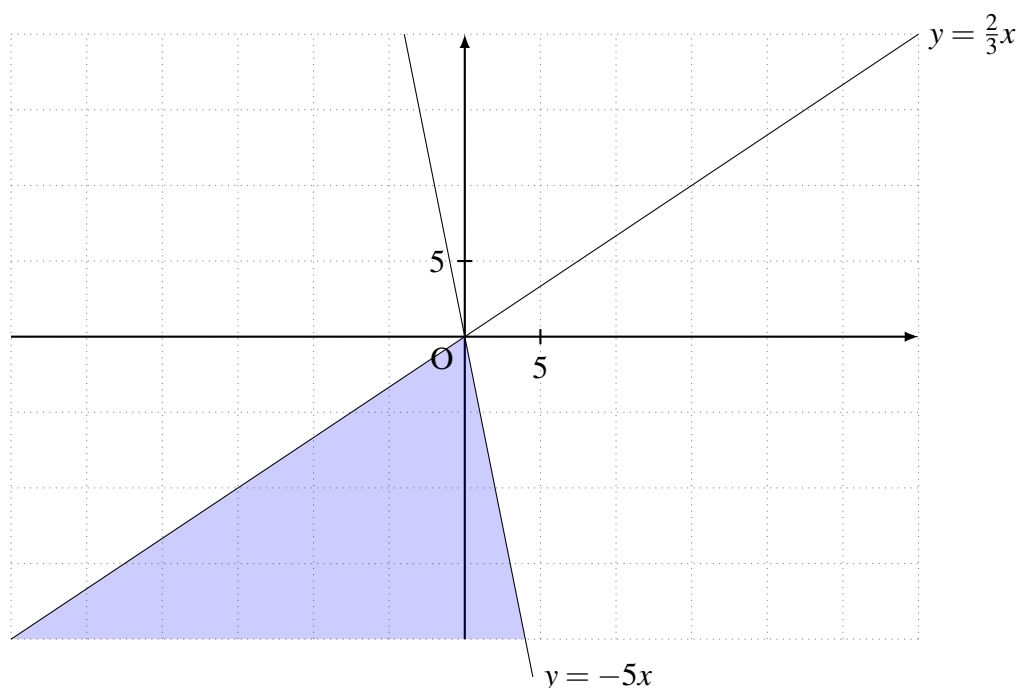
- Si $x+y > 0$ (donc si $y > -x$) :
 - Si $x-y > 0$ (donc si $y < x$), $|x+y| + |x-y| = 1 \iff x+y+x-y = 1 \iff x = \frac{1}{2}$.
 - Si $x-y < 0$ (donc si $y > x$), $|x+y| + |x-y| = 1 \iff x+y-x+y = 1 \iff y = \frac{1}{2}$.
- Si $x+y < 0$ (donc si $y < -x$) :
 - Si $x-y > 0$ (donc si $y < x$), $|x+y| + |x-y| = 1 \iff -x-y+x-y = 1 \iff y = -\frac{1}{2}$.
 - Si $x-y < 0$ (donc si $y > x$), $|x+y| + |x-y| = 1 \iff -x-y-x+y = 1 \iff x = -\frac{1}{2}$.

L'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $|x+y| + |x-y| = 1$ est donc l'ensemble représenté ci-dessous :



4 $|2x+3y| + |-5x+y| = 2.$

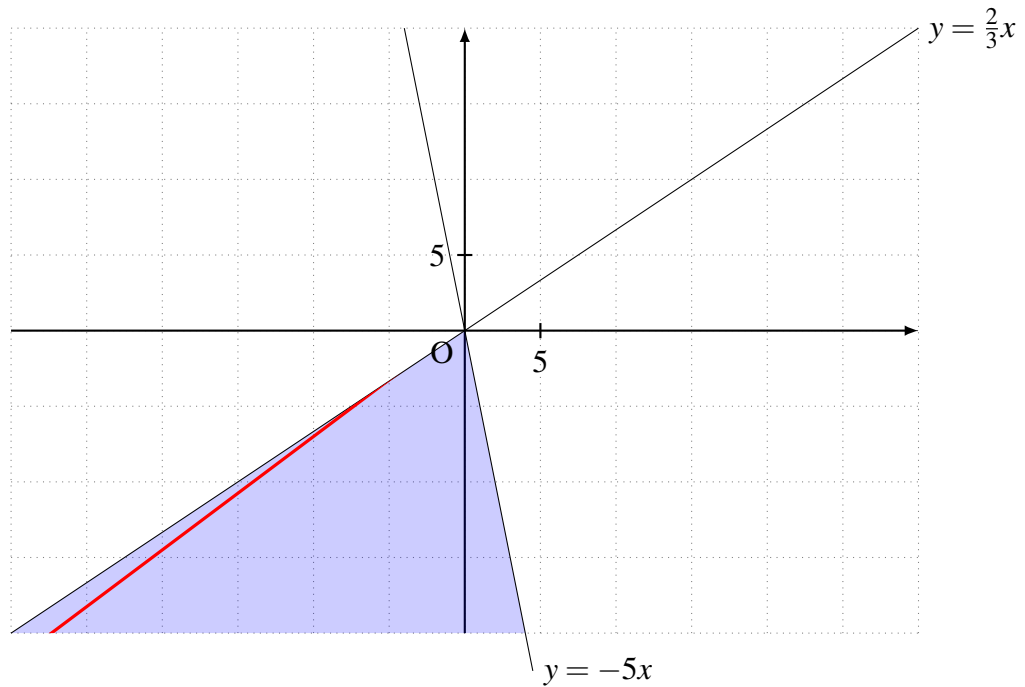
- Si $2x+3y > 0$ (soit si $y < \frac{2}{3}x$), on se trouve sous la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$.
 - Si $-5x+y > 0$ (soit si $y < -5x$), on se trouve sous la droite d'équation $y = -5x$ donc en combinant les conditions $y < \frac{2}{3}x$ et $y < -5x$, on se trouve dans la partie colorée suivante :



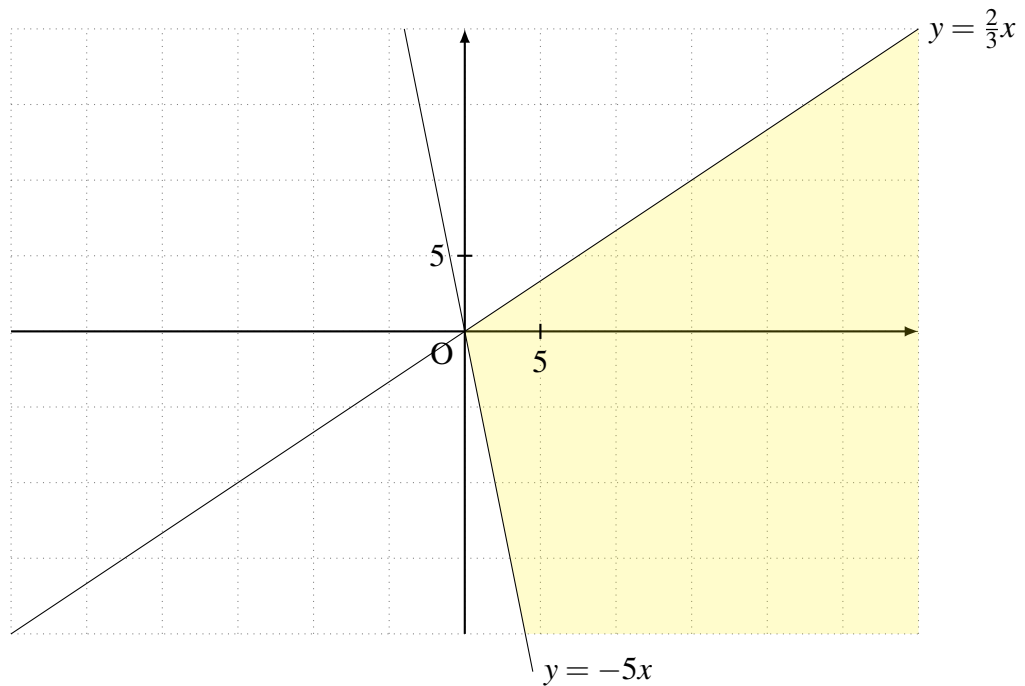
Si $2x+3y > 0$ et $-5x+y > 0$,

alors $|2x+3y| + |-5x+y| = 2 \iff -3x+4y = 2 \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$

L'ensemble solution est donc la partie de la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ comprise dans cette partie colorée du plan :



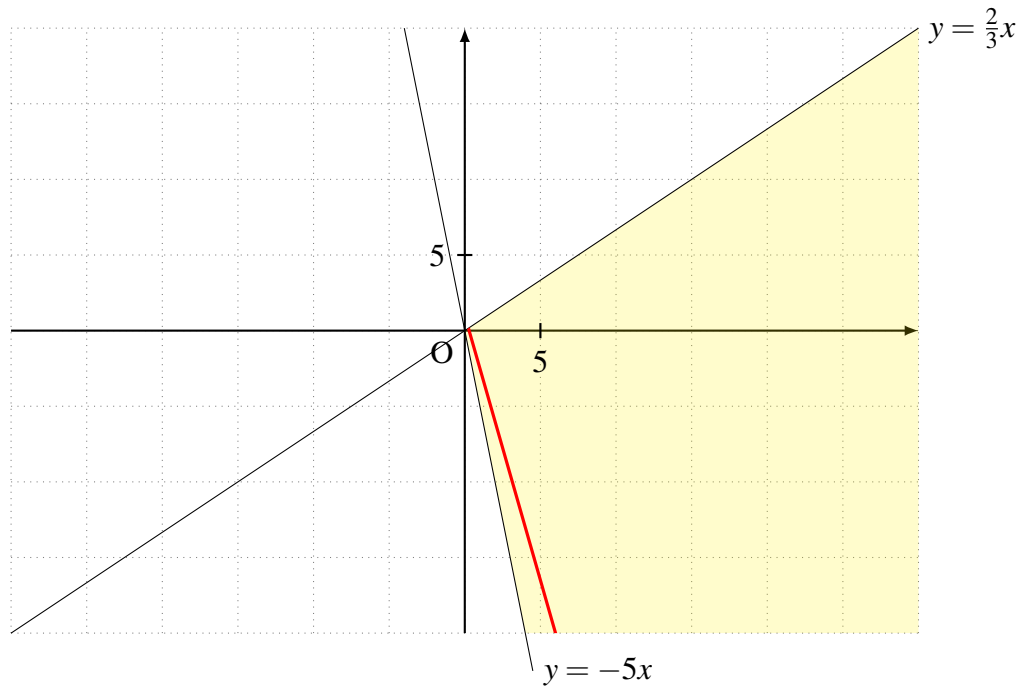
- Si $-5x + y < 0$ (soit si $y > -5x$), on se trouve au-dessus de la droite d'équation $y = -5x$ donc en combinant les conditions $y < \frac{2}{3}x$ et $y > -5x$, on se trouve dans la partie colorée suivante :



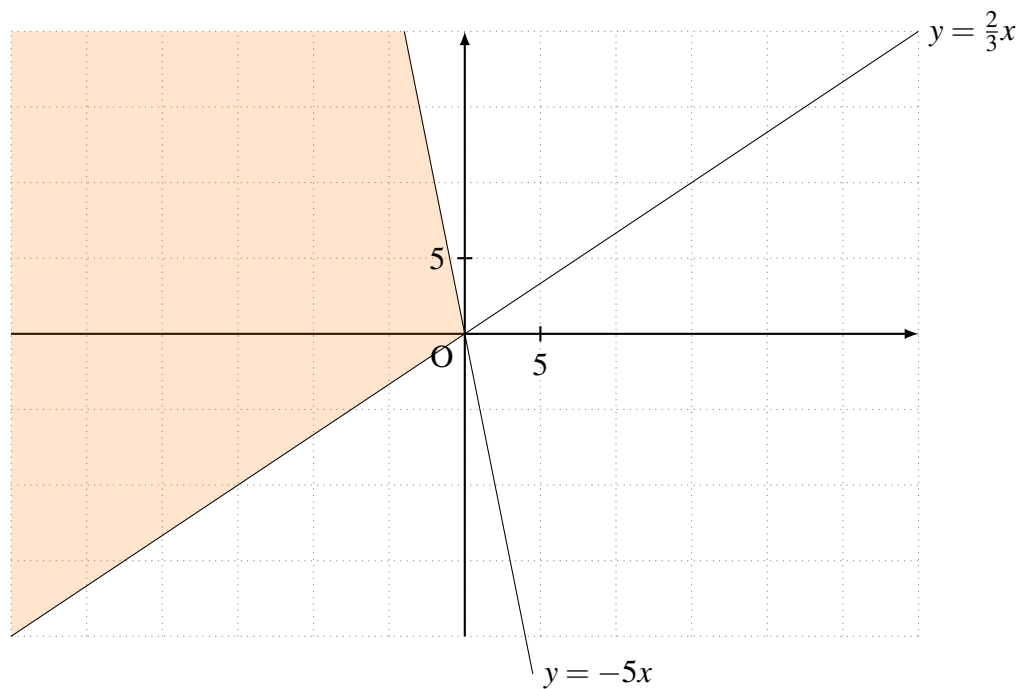
Si $2x + 3y > 0$ et $-5x + y < 0$,

$$\text{alors } |2x + 3y| + |-5x + y| = 2 \iff 7x + 2y = 2 \iff y = -\frac{7}{2}x + 1.$$

L'ensemble solution est donc la partie de la droite d'équation $y = -\frac{7}{2}x + 1$ comprise dans cette partie colorée du plan :



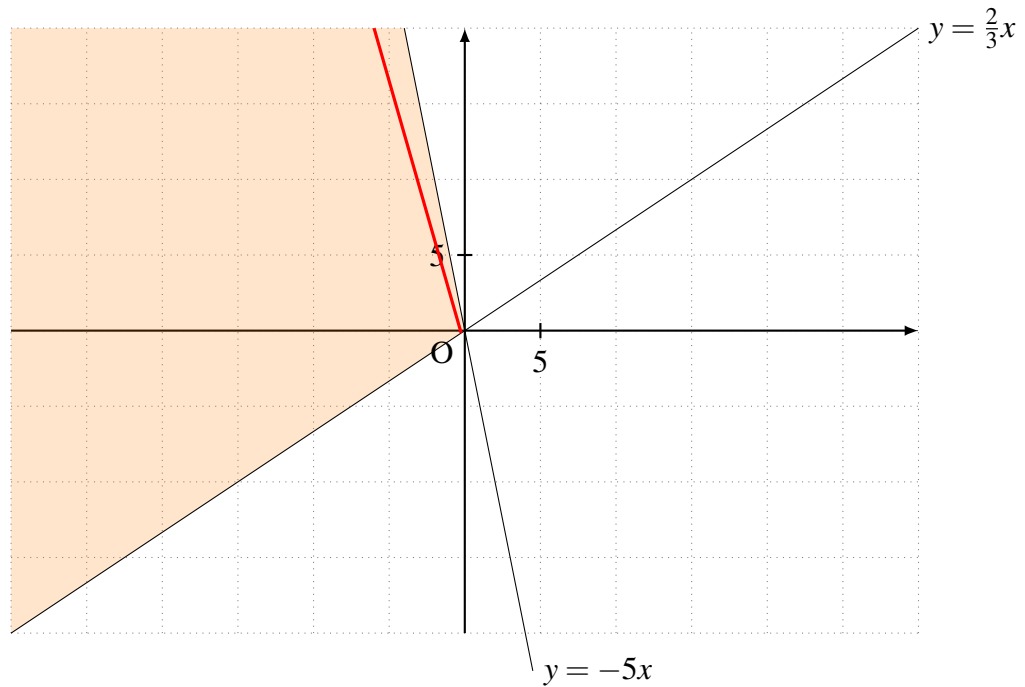
- Si $2x + 3y < 0$ (soit si $y > \frac{2}{3}x$), on se trouve au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x$.
 - Si $-5x + y > 0$ (soit si $y < -5x$), on se trouve sous la droite d'équation $y = -5x$ donc en combinant les conditions $y > \frac{2}{3}x$ et $y < -5x$, on se trouve dans la partie colorée suivante :



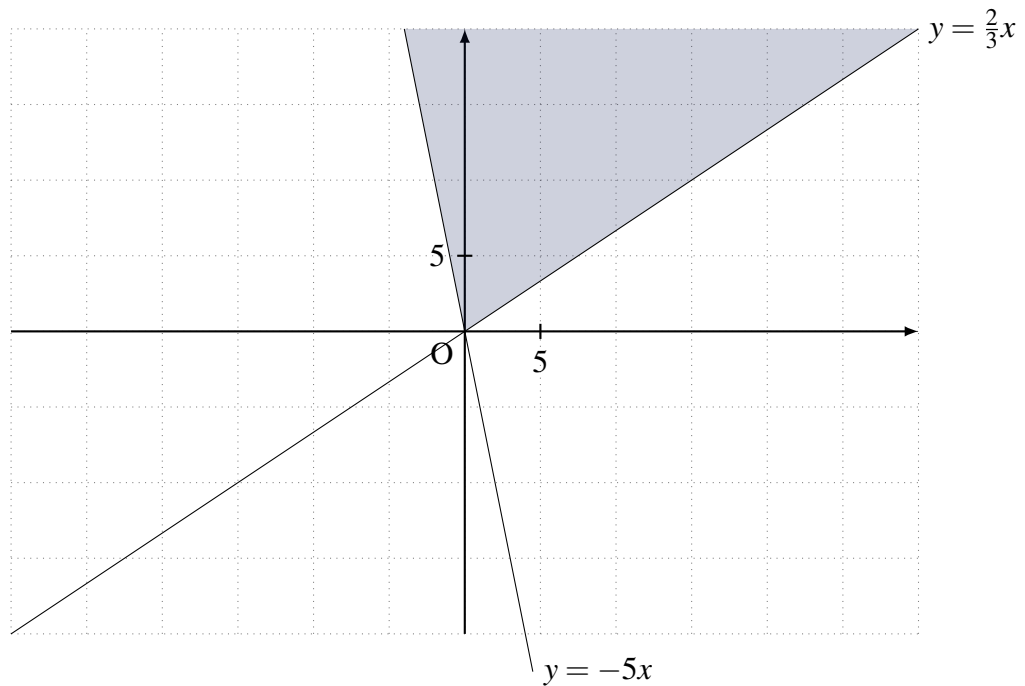
Si $2x + 3y < 0$ et $-5x + y > 0$,

$$\text{alors } |2x + 3y| + |-5x + y| = 2 \iff -7x - 2y = 2 \iff y = -\frac{7}{2}x - 1.$$

L'ensemble solution est donc la partie de la droite d'équation $y = -\frac{7}{2}x - 1$ comprise dans cette partie colorée du plan :



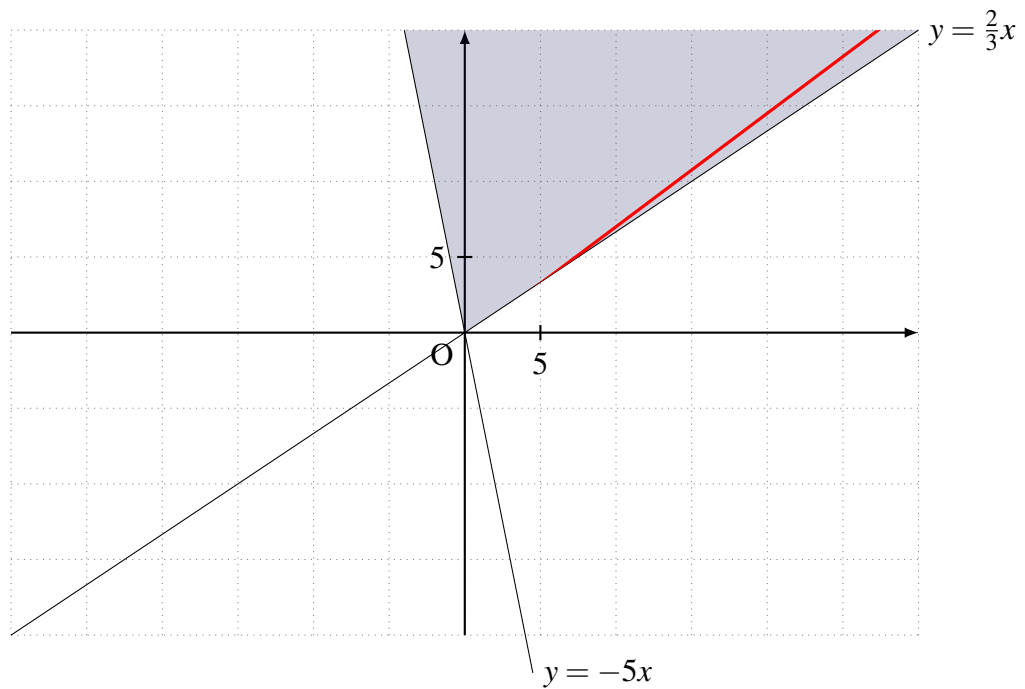
- Si $-5x + y < 0$ (soit si $y > -5x$), on se trouve au-dessus de la droite d'équation $y = -5x$ donc en combinant les conditions $y > \frac{2}{3}x$ et $y > -5x$, on se trouve dans la partie colorée suivante :



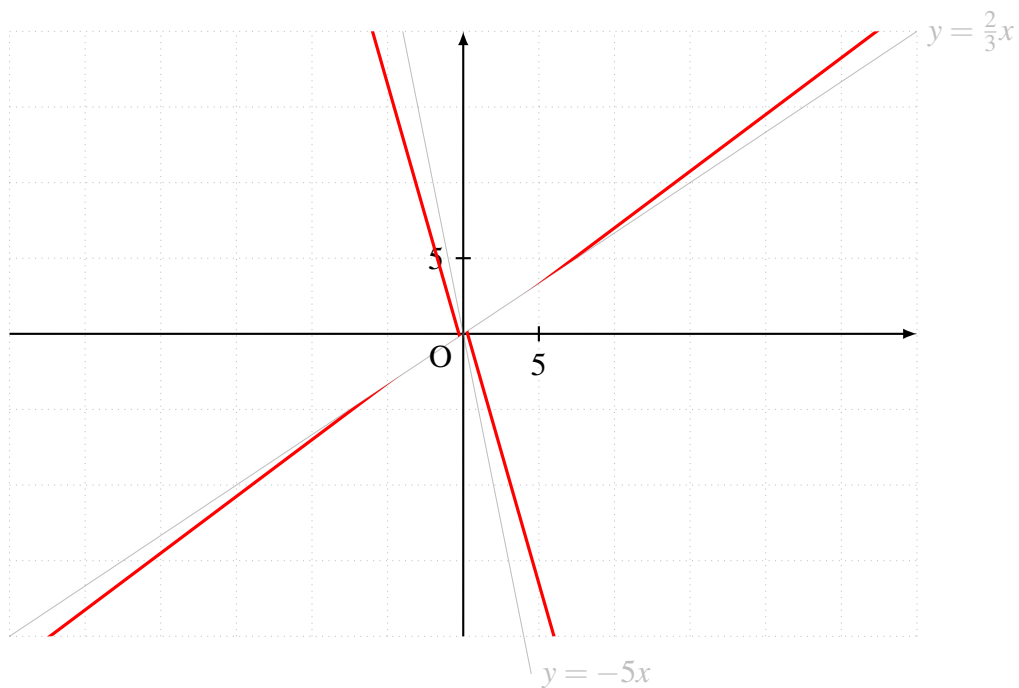
Si $2x + 3y < 0$ et $-5x + y < 0$,

$$\text{alors } |2x + 3y| + |-5x + y| = 2 \iff 3x - 4y = 2 \iff y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

L'ensemble solution est donc la partie de la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ comprise dans cette partie colorée du plan :



Finalement, l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation $|2x + 3y| + |-5x + y| = 2$ est l'ensemble représenté en rouge ci-dessous, constitué de quatre demi-droites :



Suites

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

13 octobre 2018

Généralités sur les suites

■ Exercice 1. Sens de variation

★★★★★ **A**

Corrigé page 62

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1 $u_n = \frac{2^n}{5}$

3 $u_n = \sqrt{n^2 + 3}$

2 $u_n = -n^2 + 5n - 2$

4 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

■ Exercice 2. Sens de variation, majorant et minorant

★★★★★ **A**

Corrigé page 63

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n+1}{n+2}$$

1 Montrer que (u_n) est croissante.

2 Montrer que (u_n) est majorée par 2.

3 Montrer que (u_n) est minorée.

■ Exercice 3. Sens de variation d'une suite définie par récurrence

★★★★★ **A**

Corrigé page 63

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

est croissante.

■ Exercice 4. Sens de variation d'une suite avec racines carrées

★★★★☆ (R)

Corrigé page 64

On définit la suite (u_n) par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

- 1 Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
- 2 Montrer alors que $u_{n+1} < u_n$ et en déduire les variations de (u_n) .
- 3 Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

Suites arithmétiques et géométriques

■ Exercice 5. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

★★★★☆ (A)

Corrigé page 64

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- 1 Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
- 2 Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
- 3 Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
- 4 Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

■ Exercice 6. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

★★★★☆ (A)

Corrigé page 65

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

- 1 Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
- 2 Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
- 3 Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
- 4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

■ Exercice 7. Dénombrement

★★★★☆ (R)

Corrigé page 66

Un mot de passe est composé de 1 à 25 caractères choisis parmi une liste de 70 symboles.
Donner un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe possibles.

■ Exercice 8. Reconnaître une suite arithmétique et géométrique

★★★★☆ A

Corrigé page 67

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie de façon explicite.

Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1 $u_n = 3 + 4n$

6 $u_n = n(n+1) - n(n-1)$

2 $u_n = 8 \times 2^n$

7 $u_n = n^2 + 2n + 1$

3 $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

8 $u_n = \frac{1}{3^n} + 1$

4 $u_n = \sqrt{2^n}$

9 $u_n = 2^n + 1$

5 $u_n = \frac{5}{3^n}$

10 $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$

■ Exercice 9. Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, le retour ★★★★★ A

Corrigé page 70

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie à l'aide d'une relation de récurrence. Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1 $u_{n+1} = 3u_n, u_0 = 1$

5 $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1), u_0 = 1$

2 $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, u_0 = 1$

6 $u_n = \frac{u_{n-1}}{2}, u_0 = 2$

3 $u_n = 2u_{n-1}, u_0 = 1$

7 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}, u_0 = 2$

4 $u_{n+1} = u_n - \pi, u_0 = 2\pi$

8 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}, u_0 = 1$

■ Exercice 10. Établir une relation de récurrence

★★★★☆ R

Corrigé page 71

Dans chacun des cas suivants, donner la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n . Indiquez alors si (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

1 Chaque jour, ma vue baisse de 0,001 %. u_n désigne ma note aux yeux au jour n .

2 Ma mère me donne 10 €, puis me dit : « chaque mois, je te donnerai 10 € ». u_n représente la somme que j'ai reçu en n mois, pour $n \geq 1$.

3 Je remplis d'eau une bouteille d'un litre à moitié. Chaque minute, ce qui restait la minute précédente est rempli à moitié. u_n représente la proportion de la bouteille qui est remplie la n^{e} minute, $n \geq 1$.

4 Je place 1 000 € sur un compte qui me rapporte 0,75 % chaque année. u_n représente le solde de ce compte (si je ne prélève rien) à l'année n , $n \geq 0$, avec $u_0 = 1 000$.

- 5 Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Pierre étant derrière Paul. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$ (on suppose que les pas de Pierre et de Paul sont de même longueur).
- 6 Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Paul étant derrière Pierre. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$ (on suppose que les pas de Pierre et de Paul sont de même longueur).

■ Exercice 11. Trouver un terme ou la raison dans une suite arithmétique



A

Corrigé page 72

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r .

- 1 $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r .
- 2 $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r .
- 3 $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9 .
- 4 $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .
- 5 $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r .

■ Exercice 12. Trouver un terme ou la raison d'une suite géométrique



A

Corrigé page 73

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

- 1 $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q .
- 2 $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9 .
- 3 $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8 .
- 4 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} .
- 5 $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7 .

■ Exercice 13. Le super-héros

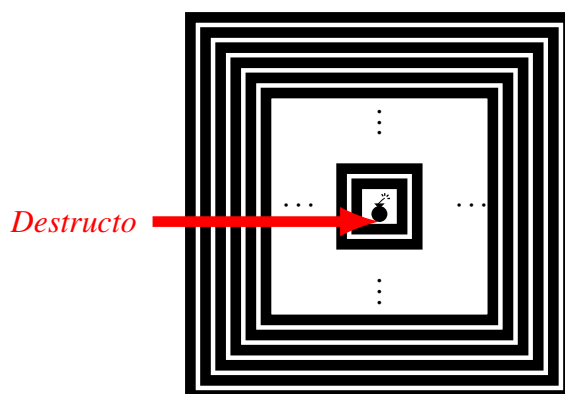
★★★★☆ R

Corrigé page 74

Destructo a la capacité de détruire les murs en fonçant dessus. Malheureusement, après chaque destruction, il perd 5 % de sa force.

Dès potron-minet, sa force est de 1 000 Newton.

Un jour, le méchant *Massono* a mis une bombe dans un bâtiment carré qui demande à *Destructo* de passer à travers 50 murs.



Sachant qu'il faut à *Destructo* au moins 100 Newton pour détruire un mur, arrivera-t-il jusqu'à la bombe ?

■ Exercice 14. Compilation d'exercices

★★★★☆ R

Corrigé page 75

- 1 On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$u_2 = 8 \quad ; \quad u_{10} = -3.$$

Donner l'expression du terme général de cette suite sous la forme $u_n = a + bn$.

- 2 On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

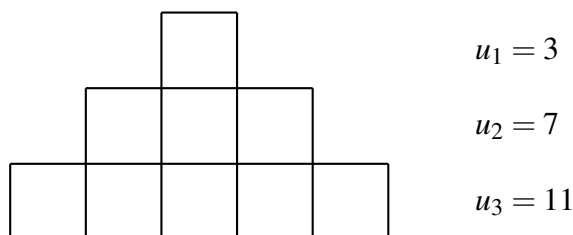
$$u_0 = -6 \quad ; \quad u_8 = 10.$$

Donner l'expression du terme général de cette suite sous la forme $u_n = a + bn$.

- 3 Trouver toutes les suites géométriques $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que :

$$u_0 = 90 \quad ; \quad u_2 = 10.$$

- 4 On construit une pyramide en allumettes comme sur le schéma suivant :



On note u_n le nombre d'allumettes nécessaires pour le n -ième étage de cette pyramide, $n \geq 1$.

Combien faut-il d'allumettes pour faire 20 étages ?

- 5 Dans chacun des cas suivants, dire si les termes sont ceux d'une suite géométrique, d'une suite arithmétique ou d'une autre suite. S'ils définissent une suite arithmétique ou géométrique, donner les paramètres de la suite (raison et 1^{er} terme).

a. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - \frac{1}{3}u_n$.

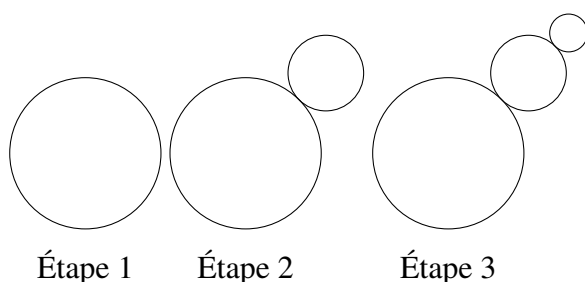
b. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{10}$.

c. $u_n = 3 + 4(n - 1)$.

d. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1$.

e. $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

- 6 On construit une figure étape par étape comme suit :



À chaque étape, on ajoute un disque dont le rayon est la moitié de celui qui a été ajouté à l'étape précédente.

Sachant que le premier disque a un rayon égal à 5 cm, quelle sera la valeur approchée à l'unité de l'aire totale des disques à l'étape 10 ?

Suites arithmético-géométriques

■ Exercice 15. Étude d'une suite arithmético-géométrique avec algorithme ★★★★★ R

Corrigé page 76

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle une suite arithmétique ? Une suite géométrique ?

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{9}{2}.$$

- 3 Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 4 En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis une expression de u_n en fonction de n .

5 On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1

Initialisation
Affecter à U la valeur 1
Affecter à i la valeur 0
Saisir la valeur de N

Traitement
Tant que $i < N$
 Affecter à i la valeur $i+1$
 Affecter à U la valeur $U/3+3$
Fin du Tant que

Sortie
Afficher U

- À l'aide d'un tableau (par exemple), exécuter cet algorithme pour $N = 3$.
- Que permet de faire cet algorithme ?
- À l'aide de votre calculatrice, donner la valeur qu'affiche cet algorithme pour $N=10$, $N=20$ et $N=30$.
Que peut-on conjecturer ?

■ Exercice 16. Le débit de l'eau, le débit de lait

★★★★☆ R

Corrigé page 78

Léonard achète deux bidons de 100 litres : un dans lequel il met de l'eau, l'autre dans lequel il met du lait.

Chaque jour, il consomme 30 % de la quantité de lait et 50 % de la quantité d'eau qu'il y avait le jour précédent. Tous les soir avant de se coucher, il ajoute 10 litres de lait dans le bidon de lait et 20 litres d'eau dans le bidon d'eau après .

On note e_n la quantité d'eau et ℓ_n la quantité de lait (en litres) au n -ième jour après les ajouts d'eau et de lait. On a ainsi $e_0 = 100$ et $\ell_0 = 100$.

- Calculer e_1 et ℓ_1 .
- Déterminer les relations de récurrence des suites (e_n) et (ℓ_n) .
- On pose $u_n = e_n - 40$.
 - Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - En déduire le terme général de (u_n) en fonction de n , puis celui de (e_n) .
- On pose $v_n = \ell_n - \frac{100}{3}$.
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - En déduire le terme général de (v_n) en fonction de n , puis celui de (ℓ_n) .
- Calculer alors e_{365} et ℓ_{365} d'une part, e_{730} et ℓ_{730} . Que peut-on remarquer et alors conjecturer ?

■ Exercice 17. Somme des premiers termes d'une suite arithmético-géométrique★★★★☆ A

Corrigé page 79

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n + 6 \end{cases}$$

1 Calculer u_1 et u_2 .

2 Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - \frac{42}{5}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

3 a. Calculer $S = \sum_{k=0}^{10} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.

b. En déduire $S' = \sum_{k=0}^{10} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

Suites homographiques

■ Exercice 18. Suite homographique et suite géométrique, avec un algorithme★★★★☆ R

Corrigé page 80

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3u_n + 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On considère alors l'algorithme suivant :

Algorithme 2

Initialisation

Affecter à U la valeur 2
Affecter à i la valeur 0
Saisir la valeur de N

Traitement

Tant que i < N

Affecter à i la valeur i+1
Affecter à U la valeur $2/(3*U+1)$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher U

- 1 À l'aide d'un tableau, exécuter cet algorithme pour $N = 4$.
Qu'affiche alors cet algorithme ?

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - \frac{2}{3}}{u_n + 1}.$$

- 2 Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3 En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis une expression de u_n en fonction de n .

■ Exercice 19. Suite homographique et suite arithmétique

★★★★☆ R

Corrigé page 82

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - \frac{1}{4u_n}.$$

On pose alors pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{1}{u_n - 0,5}.$$

- 1 Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.
- 2 En déduire le terme général de (v_n) puis celui de (u_n) en fonction de n .
- 3 À l'aide d'un tableur, de votre calculatrice ou tout simplement de votre cerveau, vers quel nombre se rapproche u_n lorsque n augmente de plus en plus ?

Suites imbriquées

■ Exercice 20. Suites imbriquées

★★★★☆ R

Corrigé page 82

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 0,8u_n + 0,4v_n \end{cases}$$

- 1 Pour tout entier naturel n , on pose $t_n = u_n + v_n$.
Montrer que (t_n) est une suite constante. Exprimer alors t_n pour tout entier naturel n .
- 2 Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = 3v_n - 4u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Exprimer alors w_n en fonction de n .
- 3 Exprimer alors u_n et v_n en fonction de n .

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,55u_n + 0,35v_n \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 0,45u_n + 0,65v_n \end{cases}$$

1 Soient deux nombres réels non nuls a et b tels que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = au_n + bv_n$ soit géométrique de raison notée q .

a. Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = qa \\ 0,35a + 0,65b = bq \end{cases}$$

b. En déduire que $a = \frac{q-0,65}{0,35}b$ et $b = \frac{q-0,55}{0,45}b$.

c. Montrer alors que q est solution de l'équation $q^2 - 1,2q + 0,2 = 0$.

d. Trouver alors les deux valeurs de q possibles, notées q_1 et q_2 , avec $q_1 < q_2$, puis les valeurs possibles de a et b pour chacune de ces deux valeurs de q .

2 On pose alors $c_n = u_n + v_n$ et $g_n = 9u_n - 7v_n$.

a. Montrer que ces deux suites vérifient les conditions de la suite (w_n) .

b. En déduire une expression de c_n et g_n en fonction de n .

c. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n .

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_n = \frac{2^n}{5}.$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{2^{n+1}}{5} - \frac{2^n}{5} \\
 &= \frac{2^{n+1} - 2^n}{5} \\
 &= \frac{2^n \times 2^1 - 2^n \times 1}{5} \\
 &= \frac{2^n(2^1 - 1)}{5} \\
 &= \frac{2^n}{5} \\
 u_{n+1} - u_n &> 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est croissante.

2 $u_n = -n^2 + 5n - 2.$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) \\
 &= -(n^2 + 2n + 1) + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\
 &= -n^2 - 2n - 1 + 5n + 5 - 2 + n^2 - 5n + 2 \\
 &= -2n + 4
 \end{aligned}$$

$$-2n + 4 > 0 \iff -2n > -4 \iff n < 2 \text{ donc } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ pour } n \geq 2.$$

La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 2.

3 $u_n = \sqrt{n^2 + 3}.$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sqrt{(n+1)^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 3} \\
 &= \sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 + 3}
 \end{aligned}$$

Or, $n^2 + 4 > n^2 + 3$ donc $n^2 + 2n + 4 > n^2 + 3$ (car $n \geq 0$), donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

4 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$.

$u_{n+1} - u_n = u_n - 5 - u_n = -5 < 0$ donc (u_n) est décroissante.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{3}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

$n+2 > 0$ et $n+3 > 0$ car $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

2 Si la suite (u_n) est majorée par 5, alors $u_n < 5$ donc $u_n - 5 < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n - 5 &= \frac{2n+1}{n+2} - 5 \\ &= \frac{2n+1}{n+2} - \frac{5(n+2)}{n+2} \\ &= \frac{2n+1-5n-10}{n+2} \\ &= \frac{-3n-9}{n+2} \end{aligned}$$

$-3n-9 < 0$ car $n \geq 0$ donc $u_n - 5 < 0$, soit $u_n < 5$.

Donc la suite est majorée par 5.

3 Quand on ne précise pas le minorant (ou le majorant), c'est qu'il doit être facile à trouver.

Ici, $2n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite est donc minorée par 0.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + 1} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{u_n^2 + 1} - u_n)(\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n)}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n} \\ &= \frac{u_n^2 + 1 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1} + u_n} \end{aligned}$$

$u_n > 0$ car chaque terme est défini comme étant égal à une racine carrée ; de plus, $\sqrt{u_n^2 + 1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite est donc croissante.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
 &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (\text{on multiplie par l'expression conjuguée}) \\
 &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
 \boxed{u_n} &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

$$2 \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Or, $n+2 > n$ donc $\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$ et donc, en ajoutant $\sqrt{n+1}$ aux deux membres de cette dernière inégalité, on a $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

En inversant, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (attention à ne pas oublier d'inverser le signe de l'inégalité).

Ceci nous dit alors que $u_{n+1} < u_n$, et donc que (u_n) est décroissante.

$$3 \quad \sqrt{n+1}\sqrt{n} > 0 \text{ donc } u_n > 0.$$

(u_n) est donc minorée par 0.

De plus, $\sqrt{n+1}\sqrt{n} \geq 1$ (car $\sqrt{n+1} \geq 1$ et $\sqrt{n} \geq 0$) donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} \leq 1$, soit $u_n \leq 1$.

(u_n) est donc majorée par 1.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad \text{Si } u_0 = 5 \text{ et } r = 3, \text{ calculer } u_0 + u_1 + \dots + u_{100}.$$

(u_n) est une suite arithmétique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$

donc ici :

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= \frac{5 + (5 + 100 \times 3)}{2} \times 101 \\
 &= 155 \times 101
 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 15\,655}$$

$$2 \quad \text{Si } u_0 = 3 \text{ et } u_{50} = 60, \text{ calculer } u_0 + u_1 + \dots + u_{50}.$$

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= \frac{3 + 60}{2} \times 51 \\
 &= 155 \times 101
 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 1\,606,5}$$

3 Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \\&= \frac{60 + (60 + 5 \times 99)}{2} \times 100 \\&= \frac{61\,500}{2} \\ \boxed{u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= 30\,750}\end{aligned}$$

4 Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{50} &= \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 \\&= \frac{50 + 1}{2} \times 50 \\ \boxed{u_1 + u_2 + \dots + u_{50} &= 25,5}\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.

(u_n) est une suite géométrique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Donc ici,

$$\begin{aligned}u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= \frac{1 - 2^{101}}{1 - 2} \\ \boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= 2^{101} - 1}\end{aligned}$$

2 Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned}u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{51}}}{1 - \frac{1}{2}} \\&= 3 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right) \times 2 \\ \boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= 6 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right)}\end{aligned}$$

3 Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= u_1 \times \frac{1 - q^{100}}{1 - q} \\ &= 60 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{100}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 60 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = 45 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = 50 \times \frac{1 - 10^{50}}{1 - 10}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = \frac{50}{9} (10^{50} - 1)$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- Si le mot de passe comporte 1 seul caractère, alors il y a 70 possibilités (car un caractère est choisi parmi 70 symboles);
- si le mot de passe comporte 2 caractères, il y a 70^2 possibilités;
- si le mot de passe comporte 3 caractères, il y a 70^3 possibilités; etc.

Ainsi, le nombre total de possibilités est :

$$S = 70 + 70^2 + 70^3 + \dots + 70^{25}$$

car il y a au plus 25 caractères dans le mot de passe.

$$\begin{aligned} S &= 70(1 + q + q^2 + \dots + q^{24}) \quad \text{avec } q = 70 \\ &= 70 \times \frac{q^{25} - 1}{q - 1} \\ &= 70 \times \frac{70^{25} - 1}{70 - 1} \\ &= \frac{70}{70 - 1} \times (70^{25} - 1). \end{aligned}$$

On peut considérer que $\frac{70}{70 - 1}$ est proche de 1 et que $70^{25} - 1$ est proche de 70^{25} .

Ainsi, un ordre de grandeur du nombre total de mots de passe est 70^{25} .

Mais par « ordre de grandeur », on peut comprendre « une puissance de 10 ». Nous allons donc aller plus loin.

$$\begin{aligned}
 70^{25} &= (7 \times 10)^{25} \\
 &= 7^{25} \times 10^{25} \\
 &= 7 \times 7^{24} \times 10^{25} \\
 &= 7 \times (7^2)^{12} \times 10^{25} \\
 &\approx 7 \times 50^{12} \times 10^{25} \\
 &\approx 7 \times 5^{12} \times 10^{12} \times 10^{25} \\
 &\approx 7 \times 2 \times 10^8 \times 10^{37} \\
 &\approx 14 \times 10^{45} \\
 &\approx 10^{46}.
 \end{aligned}$$

Petite précision : j'ai calculé 5^{12} à l'aide de la calculatrice pour écrire que c'était à peu près égal à 2×10^8 .

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_n = 3 + 4n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= 3 + 4(n+1) - (3 + 4n) \\
 &= 3 + 4n + 4 - 3 - 4n \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 4$ est une constante (un nombre qui ne dépend pas de n) donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 3 + 4 \times 0 = 3$.

Remarque : j'ai remarqué que u_n était de la forme $u_0 + nr$ donc j'ai commencé par calculer $u_{n+1} - u_n$ car je savais alors que c'était une suite arithmétique.

2 $u_n = 8 \times 2^n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{8 \times 2^{n+1}}{8 \times 2^n} \\
 &= \frac{2^n \times 2^1}{2^n} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ est une constante donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 8 \times 2^0 = 8$.

Remarque : ici, j'ai remarqué que u_n était de la forme $u_0 \times q^n$, d'où le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3 $u_n = 2 \times 3^{n-1}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n-1}} \\
 &= \frac{3^{n-1} \times 3}{3^{n-1}} \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2 \times 3^{0-1} = \frac{2}{3}$.

4 $u_n = \sqrt{2^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{n+1}}{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^n \times 2}{2^n}} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2^0} = 1$.

5 $u_n = \frac{5}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\cancel{5}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\cancel{5}} \\ &= \frac{3^n}{3^n \times 3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{5}{3^0} = 5$.

6 $u_n = n(n+1) - n(n-1) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$. u_n est donc de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = 0$ et $r = 2$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$.

7 $u_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+2)^2 - (n+1)^2 \\ &= (n+2-n-1)(n+2+n+1) \\ &= 2n+3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

8 $u_n = \frac{1}{3^n} + 1$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3^{n+1}} + 1 - \frac{1}{3^n} - 1 \\ &= \frac{1}{3^n \times 3} - \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{3^{n+1}} + 1}{\frac{1}{3^n} + 1} \\ &= \frac{\frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1+3^n}{3^n}} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{1+3^n} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3(1+3^n)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

9 $u_n = 2^n + 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 \\ &= 2^n \times 2 - 2^n \\ &= 2^n(2 - 1) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1}.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

10 $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_{n+1} = 3u_n$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.

2 $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

3 $u_n = 2u_{n-1}$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

4 $u_{n+1} = u_n - \pi$, $u_0 = 2\pi$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \pi$.

5 $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1) = u_n - 5$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = -5$.

6 $u_n = \frac{u_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}u_{n-1}$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

7 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 2$. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - (\sqrt{u_n})^2 = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

- 8** $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 1$. La relation de récurrence de cette suite est la même que dans la question précédente. Cependant, le premier terme change. On a ici : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{1} = 1$, etc.
Ainsi, (u_n) est constante. On peut alors dire qu'elle est arithmétique (de raison $r = 0$) et géométrique (de raison $q = 1$).

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** Chaque jour, ma vue baisse de 0,001 %. u_n désigne ma note aux yeux au jour n .

Alors,

$$u_{n+1} = 99,999u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 99,999$.

- 2** Ma mère me donne 10 €, puis me dit : « chaque mois, je te donnerai 10 € ». u_n représente la somme que j'ai reçu en n mois, pour $n \geq 1$.

Alors,

$$u_{n+1} = u_n + 10.$$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 10$.

- 3** Je remplis d'eau une bouteille d'un litre à moitié. Chaque minute, ce qui restait la minute précédente est rempli à moitié. u_n représente la proportion de la bouteille qui est remplie la n^{e} minute, $n \geq 1$.

Alors,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(1 - u_n) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}.$$

(u_n) n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

- 4** Je place 1 000 € sur un compte qui me rapporte 0,75 % chaque année. u_n représente le solde de ce compte (si je ne prélève rien) à l'année n , $n \geq 0$, avec $u_0 = 1 000$.

Alors,

$$u_{n+1} = 1,075u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,075$.

- 5** Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Pierre étant derrière Paul. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$.

D'une étape à l'autre, si Paul avance de deux mètres, la distance qui le sépare de Pierre s'agrandit de deux mètres, mais si Pierre avance d'un mètre, elle se réduit d'un mètre. Au final, elle s'agrandit d'un mètre. Mais attention ! u_n est une distance donc :

$$u_{n+1} = |u_n + 1|.$$

Ici, $u_n + 1 > 0$ pour tout n (c'est assez intuitif) donc on peut enlever les valeurs absolues. Finalement, on a :

$$u_{n+1} = u_n + 1.$$

(u_n) est donc arithmétique de raison $r = 1$.

- 6** Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Paul étant derrière Pierre. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$.

D'une étape à l'autre, si Paul avance de deux mètres, la distance qui le sépare de Pierre se réduit de deux mètres, mais si Pierre avance d'un mètre, elle s'agrandit d'un mètre. Au final, elle se réduit d'un mètre. Mais attention ! u_n est une distance donc :

$$u_{n+1} = |u_n - 1|.$$

On ne peut pas ici enlever les valeurs absolues car $u_n - 1$ sera négatif au-delà d'un certain rang. Par conséquent, (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc

$$u_8 = u_0 + 8r$$

$$7 = 3 + 8r$$

$$7 - 3 = 8r$$

$$r = \frac{4}{8}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{2}}$$

- 2** $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

$$2 = 5 + 3r$$

$$2 - 5 = 3r$$

$$3r = -3$$

$$\boxed{r = -1}$$

- 3** $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc

$$u_9 = u_0 + 9r$$

$$u_9 = 5 - \frac{9}{2}$$

$$u_9 = \frac{10}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\boxed{u_9 = \frac{1}{2}}$$

4 $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_{20} = u_5 + (20 - 5)r$$

$$u_{20} = 6 + 15 \times 2$$

$$u_{20} = 6 + 30$$

$$\boxed{u_{20} = 36}$$

5 $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_7 = u_2 + (7 - 2)r$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{7} + 5r$$

$$5r = \sqrt{2} - \sqrt{7}$$

$$\boxed{r = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{5}}$$

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_2 = u_0 \times q^2$$

$$12 = 5 \times q^2$$

$$q^2 = \frac{12}{5}$$

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{12}{5}} \quad \text{ou} \quad q = -\sqrt{\frac{12}{5}}}$$

2 $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_9 = u_0 \times q^9$$

$$u_9 = 3 \times 2^9$$

$$u_9 = 1536$$

3 $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_8 = u_2 \times q^{8-2}$$

$$u_8 = 8 \times 2^{-6}$$

$$u_8 = 2^{-3}$$

4 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_{10} = u_0 \times q^{10}$$

$$u_{10} = 2 \times 3^{-10}$$

$$u_{10} = \frac{2}{3^{10}}$$

5 $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5}$$

$$u_7 = 2 \times \sqrt{2}^2$$

$$u_7 = 4$$

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons u_n la force de *Destructo* (en Newton) après avoir traversé n murs, avec $u_0 = 1\,000$.

On a :

$$u_{n+1} = 0,95u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$.

Ainsi,

$$u_n = u_0 \times q^n = 1000 \times 0,95^n.$$

Avant le 50^e mur, sa force sera :

$$u_{49} = 1000 \times 0,95^{49} \approx 81.$$

Par conséquent, *Destructo* n'aura pas assez de force pour détruire le 50^e mur ... Le méchant *massono* a bien calculé son coup !

■ Corrigé de l'exercice 14.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_k + (n - k)r$.

Ainsi, $u_{10} = u_2 + (10 - 2)r$, soit $-3 = 8 + (10 - 2)r$. On obtient alors $r = \frac{-3 - 8}{10 - 2} = -\frac{11}{8}$.

On peut alors écrire :

$$u_n = u_2 + (n - 2)r$$

$$u_n = 8 - \frac{11}{8}(n - 2)$$

$$= 8 - \frac{11}{8}n + \frac{11}{4}$$

$$\boxed{u_n = \frac{43}{4} - \frac{11}{8}n}$$

2 $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_k + (n - k)r$.

Ainsi, $u_8 = u_0 + 8r$, soit $10 = -6 + 8r$. On obtient alors $r = \frac{10 + 6}{8} = 2$.

On peut alors écrire :

$$u_n = u_0 + nr$$

$$\boxed{u_n = -6 + 2n}$$

3 $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique donc $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_2 = u_0 \times q^2$. Ainsi, $10 = 90 \times q^2$, soit $q^2 = \frac{1}{9}$.

Par conséquent, $q = \frac{1}{3}$ ou $q = -\frac{1}{3}$.

Il existe donc deux suites géométriques, chacune de premier terme $u_0 = 90$, l'une de raison $\frac{1}{3}$ et l'autre de raison $-\frac{1}{3}$.

4 On constate que $u_n = u_{n-1} + 4$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$.

Ainsi, la somme des 20 premiers termes est :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} &= (\text{nombre de termes dans la somme}) \times \frac{\text{1^{er} terme} + \text{dernier terme}}{2} \\ &= 20 \times \frac{1 + (u_1 + (20 - 1) \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{1 + (1 + 19 \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{78}{2} \\ &= 780. \end{aligned}}$$

Le nombre total d'allumettes qu'il faut pour faire 20 étages correspond à la somme des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, donc il faut 780 allumettes.

- 5** a. $u_{n+1} = 3u_n - \frac{1}{3}u_n = \left(3 - \frac{1}{3}\right)u_n = \frac{8}{3}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n donc c'est le terme général de la suite géométrique de raison $q = \frac{8}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.
- b. $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n avec $q = \frac{1}{10}$. Il définit donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ et de premier terme $u_0 = 1$.
- c. $u_n = 3 + 4(n-1) = 3 + 4n - 4 = -1 + 4n$ donc u_n est de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = -1$ et $r = 4$. C'est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = -1$.
- d. $u_{n+1} = u_n + 1$ donc c'est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. u_n est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 2$.
- e. $u_{n+1} = 3u_n - 5$ n'est pas de la forme $u_n + r$ ou qu_n donc u_n n'est pas un terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.

- 6** Appelons r_n le rayon du disque ajouté à l'étape n et a_n l'aire du disque de rayon r_n .

Alors, $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$. Donc (r_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

L'aire du disque ajouté à l'étape n est $a_n = \pi \times r_n^2 = \frac{5\pi}{2^{n-1}}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi \times r_{n+1}^2}{\pi \times r_n^2} = \frac{r_{n+1}^2}{r_n^2} = q$ donc (a_n) est aussi une suite géométrique de raison q .

L'aire totale des disques (en cm^2) à l'étape 10 est donc :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{10} &= (\text{1er terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \\ &= 25\pi \times \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 50\pi \times \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= 50\pi \left(1 - \frac{1}{1024}\right) \\ &= 50\pi \times \frac{1023}{1024} \\ &= \frac{25575\pi}{512} \\ &\approx 157. \end{aligned}$$

L'aire totale est donc environ égale à 157 cm^2 .

■ Corrigé de l'exercice 15.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 3 = \frac{1}{3} \times 1 + 3 = \frac{10}{3}$.

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 3 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 3 = \frac{10}{9} + \frac{27}{9} = \frac{37}{9}.$$

$$2 \quad \left. \begin{aligned} u_1 - u_0 &= \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3} \\ u_2 - u_1 &= \frac{37}{9} - \frac{10}{3} = \frac{7}{9} \neq u_1 - u_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ n'est pas arithmétique.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= \frac{\frac{10}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{10}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{10}{7} \\ \frac{u_2}{u_1} &= \frac{37}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{37}{30} \neq \frac{u_1}{u_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ n'est pas géométrique.}$$

$$3 \quad \begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{3}u_n + 3 - \frac{9}{2} \\ &= \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(u_n - \frac{9}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n}$$

Ainsi, $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifie une relation de récurrence de la forme $v_{n+1} = qv_n$ qui est significatif d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$. Son premier terme est :

$$v_0 = u_0 - \frac{9}{2} = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}.$$

4 De la question précédente, on peut déduire que pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n}$$

et comme $v_n = u_n - \frac{9}{2}$, on a :

$$u_n = v_n + \frac{9}{2}$$

soit :

$$\boxed{u_n = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n} + \frac{9}{2}}$$

5 a. On a le tableau suivant :

Condition $i < N$		vraie : $0 < 3$	vraie : $1 < 3$	vraie : $2 < 3$	fausse
Valeurs de i	0	1	2	3	4
Valeurs de U	1	$\frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$	$\frac{10}{9} + 3 = \frac{37}{9}$	$\frac{37}{27} + 3 = \frac{118}{81}$	

b. On voit qu'à chaque boucle, l'algorithme permet d'obtenir la valeur de u_i . On n'entre plus dans la boucle lorsque $i = N$ et la dernière valeur de U calculée est alors u_N .

Ainsi, cet algorithme permet de calculer u_N pour un entier naturel N donné par l'utilisateur.

c. On obtient $u_{10} \approx 4,4999407272$, $u_{20} \approx 4,4999999999$ et $u_{30} \approx 4,5$.

On peut alors conjecturer que u_n se rapproche de plus en plus de 4,5 au fur et à mesure que n prend des valeurs de plus en plus grandes.

■ Corrigé de l'exercice 16.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Au jour 1, Léonard consomme la moitié d'eau ; donc il lui reste 50 litres. Il ajoute ensuite 20 litres d'eau donc $e_1 = 70$.

Au jour 1, il consomme 30 % de lait donc il lui reste 70 litres de lait ; il ajoute ensuite 10 litres de lait donc $\ell_1 = 80$.

- 2
- **Pour (e_n)** : pour passer de e_n à e_{n+1} , on doit multiplier par $\frac{1}{2}$ (ou diviser par 2). On a alors à ce stade : $e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n$. Ensuite, on ajoute 20 litres donc finalement, $e_{n+1} = \frac{1}{2}e_n + 20$
 - **Pour (ℓ_n)** : pour passer de ℓ_n à ℓ_{n+1} , on doit multiplier par 0,7 (car enlever 30 % de la quantité signifie qu'il en reste 70 %). On a alors à ce stade : $\ell_{n+1} = 0,7\ell_n$. Ensuite, on ajoute 10 litres donc finalement, $\ell_{n+1} = 0,7\ell_n + 10$

3 a.
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e_{n+1} - 40 \\ &= \frac{1}{2}e_n + 20 - 40 \\ &= \frac{1}{2}e_n - 20 \\ &= \frac{1}{2}\left(e_n - \frac{40}{1}\right) \\ &= \frac{1}{2}(e_n - 40) \\ &= \frac{1}{2}u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir u_{n+1} , on doit multiplier u_n par $\frac{1}{2}$; la suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Son premier terme est : $u_n = e_0 - 40$, soit $u_0 = 100 - 40 = 60$.

- b. La suite (u_n) étant géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$ d'après le cours. Ainsi, ici, $u_n = 60 \times 0,5^n$.

Or, $u_n = e_n - 40$ donc $e_n = u_n + 40$, soit $e_n = 60 \times 0,5^n + 40$.

4 a.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ell_{n+1} - \frac{100}{3} \\ &= 0,7\ell_n + 10 - \frac{100}{3} \\ &= 0,7\ell_n - \frac{70}{3} \\ &= 0,7\left(\ell_n - \frac{70}{0,7}\right) \\ &= 0,7\left(\ell_n - \frac{100}{3}\right) \\ &= 0,7v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir v_{n+1} , on doit multiplier v_n par $0,7$; la suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,7$.

Son premier terme est : $v_n = \ell_0 - \frac{100}{3}$, soit $v_0 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$.

b. La suite (v_n) étant géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$ d'après le cours. Ainsi, ici, $v_n = \frac{200}{3} \times 0,7^n$.

Or, $v_n = \ell_n - \frac{100}{3}$ donc $\ell_n = v_n + \frac{100}{3}$, soit $\ell_n = \frac{200}{3} \times 0,7^n + \frac{100}{3}$.

5 • $e_{365} = 60 \times 0,5^{365} + 40 \approx 40$ et $\ell_{365} = \frac{200}{3} \times 0,7^{365} + \frac{100}{3} \approx 33,3$.

• $e_{730} = 60 \times 0,5^{730} + 40 \approx 40$ et $\ell_{730} = \frac{200}{3} \times 0,7^{730} + \frac{100}{3} \approx 33,3$.

On peut alors remarquer que les quantités au bout d'un an sont égales à celles obtenues au bout de 2 ans.

Tout porte donc à croire qu'au bout d'un nombre important de jours, la quantité d'eau stagne autour de 40 litres et que celle de lait stagne autour de 33,33 litres.

■ Corrigé de l'exercice 17.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_1 = \frac{2}{7}u_0 + 6 = \frac{2}{7} \times 2 + 6 = \frac{4}{7} + \frac{42}{7} = \frac{46}{7}$.

$$u_2 = \frac{2}{7}u_1 + 6 = \frac{2}{7} \times \frac{46}{7} + 6 = \frac{92}{49} + \frac{294}{49} = \frac{386}{49}.$$

2 $v_n = u_n - \frac{42}{5}$.

$$\begin{aligned} a. \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n + 6 - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n + \frac{30}{5} - \frac{42}{5} \\ &= \frac{2}{7}u_n - \frac{12}{5} \\ &= \frac{2}{7} \left(u_n - \frac{12}{5} \times \frac{7}{2} \right) \\ &= \frac{2}{7} \left(u_n - \frac{42}{5} \right) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{7}$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - \frac{42}{5} = 2 - \frac{42}{5} = -\frac{32}{5}.$$

b. On déduit que $v_n = v_0 \times q^n$, soit $v_n = -\frac{32}{5} \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$.

Or, $v_n = u_n - \frac{42}{5}$ donc $u_n = v_n + \frac{42}{5}$; ainsi, $u_n = \frac{42}{5} - \frac{32}{5} \times \left(\frac{2}{7}\right)^n$.

3 a. S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique donc :

$$\begin{aligned}
 S &= v_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q} \\
 &= -\frac{32}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}}{1 - \frac{2}{7}} \\
 &= -\frac{32}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}}{\frac{5}{7}} \\
 &= -\frac{32}{5} \times \frac{7}{5} \times \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right] \\
 \boxed{S &= -\frac{134}{25} \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right]}
 \end{aligned}$$

b. On a :

$$\begin{aligned}
 S' &= \sum_{k=0}^{10} \left(v_k - \frac{42}{5}\right) \quad \text{car } u_k = v_k - \frac{42}{5} \\
 &= \sum_{k=0}^{10} v_k - \sum_{k=0}^{10} \frac{42}{5} \quad (\text{on a découpé la somme en deux}) \\
 &= S' - \frac{42}{5} \times 11 \quad \text{car la dernière somme signifie que l'on ajoute 11 fois la fraction } \frac{42}{5} \\
 &= -\frac{134}{25} \left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{11}\right] - \frac{462}{5} \\
 &= -\frac{134}{25} + \frac{134}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{462}{5} \\
 &= \frac{134}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{134}{25} - \frac{462 \times 5}{5 \times 5} \\
 \boxed{S' &= \frac{134}{25} \times \left(\frac{2}{7}\right)^{11} - \frac{2444}{25}}
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 18.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On a le tableau suivant :

Condition $i < N$		vraie : $0 < 4$	vraie : $1 < 4$	vraie : $2 < 4$	vraie : $3 < 4$	fausse
Valeurs de i	0	1	2	3	4	5
Valeurs de U	2	$\frac{2}{3 \times 2 + 1} = \frac{2}{7}$	$\frac{2}{3 \times \frac{2}{7} + 1} = \frac{14}{13}$	$\frac{2}{3 \times \frac{14}{13} + 1} = \frac{26}{41}$	$\frac{2}{3 \times \frac{26}{41} + 1} = \frac{82}{119}$	

Cet algorithme affiche alors la dernière valeur de U calculée, à savoir $\frac{82}{119}$, qui est u_4 .

$$\begin{aligned}
2 \quad v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \frac{2}{3}}{u_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\frac{2}{3u_n+1} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3u_n+1} + 1} \\
&= \frac{6-2(3u_n+1)}{3(3u_n+1)} \\
&= \frac{2+3u_n+1}{3u_n+1} \\
&= \frac{-6u_n+4}{3(3u_n+1)} \times \frac{3u_n+1}{3u_n+3} \\
&= \frac{-6u_n+4}{9u_n+9} \\
&= \frac{-6(u_n - \frac{2}{3})}{9(u_n+1)} \\
&= -\frac{6}{9}v_n
\end{aligned}$$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme :

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{u_0 - \frac{2}{3}}{u_0 + 1} \\
&= \frac{2 - \frac{2}{3}}{2 + 1} \\
&= \frac{\frac{4}{3}}{3}
\end{aligned}$$

$$v_0 = \frac{4}{9}$$

3 De la question précédente, on déduit :

$$v_n = \frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n - \frac{2}{3}}{u_n + 1} \\
\iff v_n(u_n + 1) &= u_n - \frac{2}{3} \\
\iff v_n u_n - u_n &= -v_n - \frac{2}{3} \\
\iff u_n(v_n - 1) &= -v_n - \frac{2}{3} \\
\iff u_n &= \frac{-v_n - \frac{2}{3}}{v_n - 1} \\
\iff u_n &= \frac{-\frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 19.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 0,5} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4u_n} - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{4u_n}{4u_n} - \frac{1}{4u_n} - \frac{2u_n}{4u_n}} \\
 &= \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n}} \\
 &= \frac{4u_n}{2u_n - 1} \\
 &= \frac{4u_n}{2(u_n - 0,5)} \\
 &= \frac{2u_n}{u_n - 0,5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n}{u_n - 0,5} - \frac{1}{u_n - 0,5} \\
 &= \frac{2u_n - 1}{u_n - 0,5} \\
 &= \frac{2(u_n - 0,5)}{u_n - 0,5} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

$v_{n+1} - v_n$ étant égal à une constante, (v_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 0,5} = \frac{1}{3 - 0,5} = \frac{2}{5} = 0,4$.

2 (v_n) étant arithmétique, $v_n = v_0 + nr$, soit $v_n = 0,4 + 2n$.

Or, $v_n = \frac{1}{u_n - 0,5}$ donc $\frac{1}{v_n} = u_n - 0,5$, soit $u_n = \frac{1}{v_n} + 0,5$.

Ainsi, $\boxed{u_n = \frac{1}{0,4 + 2n} + 0,5}$

3 Lorsque n augmente de plus en plus, $2n + 0,4$ augmente aussi de plus en plus, donc son inverse se rapproche de plus en plus de 0. Finalement, u_n se rapproche alors de 0,5.

■ Corrigé de l'exercice 20.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad t_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\
 &= (0,2u_n + 0,6v_n) + (0,8u_n + 0,4v_n) \\
 &= (0,2 + 0,8)u_n + (0,6 + 0,4)v_n \\
 &= u_n + v_n
 \end{aligned}$$

$$\boxed{t_{n+1} = t_n}$$

Ainsi, (t_n) est une suite constante et $t_n = t_0 = u_0 + v_0$.

Par conséquent, $\boxed{t_n = 1}$

$$\begin{aligned}
2 \quad w_{n+1} &= 3v_{n+1} - 4u_{n+1} \\
&= 3(0,8u_n + 0,4v_n) - 4(0,2u_n + 0,6v_n) \\
&= 2,4u_n + 1,2v_n - 0,8u_n - 2,4v_n \\
&= (2,4 - 0,8)u_n + (1,2 - 2,4)v_n \\
&= 1,6u_n - 1,2v_n \\
&= -0,4(-4u_n + 3v_n) \quad \leftarrow (*) \\
&= -0,4w_n.
\end{aligned}$$

(*) Pour trouver $-0,4$, j'ai regardé les coefficients que je voulais faire apparaître devant u_n et v_n . Par exemple, dans l'expression $w_n = 3v_n - 4u_n$, il me faut « 3 » devant v_n . Or, j'avais $-1,2$ dans l'expression $w_{n+1} = 1,6u_n - 1,2v_n$. J'ai donc fait $-1,2 \div 3 = -0,4$. Je sais donc ici qu'il faut que je factorise mon expression $w_{n+1} = 1,6u_n - 1,2v_n$ par $-0,4$.

Ainsi, (w_n) est une suite géométrique de raison $q = -0,4$ et de premier terme $w_0 = 3v_0 - 4u_0 = -4$.

On en déduit alors que $w_n = w_0 \times q^n$ donc $w_n = -4 \times (-0,4)^n$.

3 D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{cases} t_n = u_n + v_n \\ w_n = -4u_n + 3v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = u_n + v_n \\ -4 \times (-0,4)^n = -4u_n + 3v_n \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par 4, on a :

$$\begin{cases} 4 = 4u_n + 4v_n \\ -4 \times (-0,4)^n = -4u_n + 3v_n \end{cases}$$

En ajoutant alors les deux lignes, on obtient :

$$4 - 4 \times (-0,4)^n = 4u_n + 4v_n - 4u_n + 3v_n$$

soit :

$$4 - 4 \times (-0,4)^n = 7v_n.$$

En divisant par 7, on arrive alors à :

$$v_n = \frac{4 - 4 \times (-0,4)^n}{7}$$

et donc, comme $u_n + v_n = 1$,

$$\begin{aligned}
u_n &= 1 - v_n = 1 - \frac{4 - 4 \times (-0,4)^n}{7} \\
&= \frac{7}{7} - \frac{4 - 4 \times (-0,4)^n}{7} \\
&= \frac{7 - [4 - 4 \times (-0,4)^n]}{7} \\
&= \frac{7 - 4 + 4 \times (-0,4)^n}{7} \\
&= \frac{3 + 4 \times (-0,4)^n}{7}
\end{aligned}$$

1 a. Calculons :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= au_{n+1} + bv_{n+1} \\ &= a(0,55u_n + 0,35v_n) + b(0,45u_n + 0,65v_n) \\ &= (0,55a + 0,45b)u_n + (0,35a + 0,65b)v_n. \end{aligned}$$

(w_n) est une suite géométrique de raison q donc $w_{n+1} = qw_n$; par conséquent,

$$(0,55a + 0,45b)u_n + (0,35a + 0,65b)v_n = qau_n + qbv_n,$$

et donc :

$$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = aq \\ 0,35a + 0,65b = bq \end{cases}$$

b. Du système précédent, on déduit :

$$\begin{cases} 0,45b = qa - 0,55a \\ 0,35a = qb - 0,65b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} b = \frac{q-0,55}{0,45}a \\ a = \frac{q-0,65}{0,35}b \end{cases}$$

c. En remplaçant a par $\frac{q-0,65}{0,35}b$ dans la première équation, on a :

$$\begin{aligned} b &= \frac{q-0,55}{0,45} \times \frac{q-0,65}{0,35}b \Leftrightarrow 1 = \frac{q-0,55}{0,45} \times \frac{q-0,65}{0,35} \quad (b \neq 0) \\ &\Leftrightarrow 0,45 \times 0,35 = (q-0,55)(q-0,65) \\ &\Leftrightarrow 0,1575 = q^2 - 0,65q - 0,55q + 0,3575 \\ &\Leftrightarrow \boxed{q^2 - 1,2q + 0,2 = 0} \end{aligned}$$

d. Le discriminant du polynôme $q^2 - 1,2q + 0,2$ est :

$$\Delta = (-1,2)^2 - 4 \times 1 \times 0,2 = 0,64$$

donc il admet deux racines :

$$q_1 = \frac{1,2 - \sqrt{0,64}}{2} = 0,2 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1,2 + \sqrt{0,64}}{2} = 1.$$

- Pour $q = 1$, le système de la question **1**a. devient :

$$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = a \\ 0,35a + 0,65b = b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -0,45a + 0,45b = 0 \\ 0,35a - 0,35b = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors que $\boxed{a = b}$.

- Pour $q = 0,2$, le système de la question **1**a. devient :

$$\begin{cases} 0,55a + 0,45b = 0,2a \\ 0,35a + 0,65b = 0,2b \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 0,355a + 0,45b = 0 \\ 0,35a + 0,45b = 0 \end{cases}$$

On en déduit alors que $\boxed{a = \frac{-0,45}{0,35}b = -\frac{9}{7}b}$.

- 2 a. Pour c_n , $a = b = 1$ donc nous sommes dans le cas où $q = 1$: (c_n) est donc une suite constante.
 Pour g_n , $a = 9$ et $b = -7$, soit $a = -\frac{9}{7}b$ donc nous sommes dans le cas où $q = 0,2$.

b. On en déduit que $\boxed{c_n = c_0 = u_0 + v_0 = 1}$ (car c'est une suite constante) et $g_n = g_0 \times q^n = (9u_0 - 7v_0) \times 0,2^n$, soit $\boxed{g_n = 9 \times (0,2)^n}$.

c. On a :

$$\begin{cases} c_n = u_n + v_n \\ g_n = 9u_n - 7v_n \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 1 = u_n + v_n \\ 9(0,2)^n = 9u_n - 7v_n \end{cases}$$

En multipliant par 7 la première équation, on a :

$$\begin{cases} 7 = 7u_n + 7v_n \\ 9(0,2)^n = 9u_n - 7v_n \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations membre à membre, on a :

$$7 + 9(0,2)^n = 16u_n \quad \text{soit} \quad \boxed{u_n = \frac{7 + 9(0,2)^n}{16}}$$

De l'équation initiale $u_n + v_n = 1$, on déduit alors :

$$v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{7 + 9(0,2)^n}{16} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_n = \frac{9 - 9(0,2)^n}{16}}$$

Dérivation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

Calcul du nombre dérivé par taux d'accroissement

■ Exercice 1. Nombre dérivé & équation de tangentes

★★★★☆ **A**

Corrigé page 93

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

1 $f(x) = x^2, a = 2$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1$

4 $f(x) = \sqrt{x}, a = 4$

Lectures graphiques

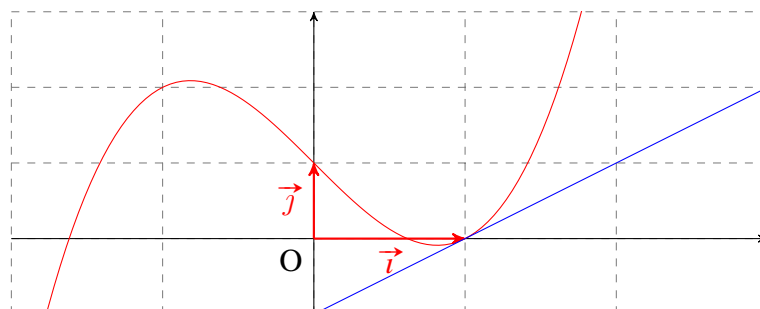
■ Exercice 2. Lecture graphique de nombres dérivés

★★★★☆ **A**

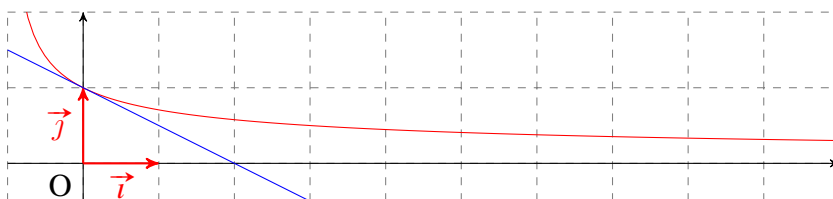
Corrigé page 96

Pour chacune des questions suivantes, on a la représentation graphique d'une fonction f (en rouge) et la tangente à cette représentation au point d'abscisse a . Déterminer graphiquement $f'(a)$, puis écrire l'équation réduite de la tangente tracée.

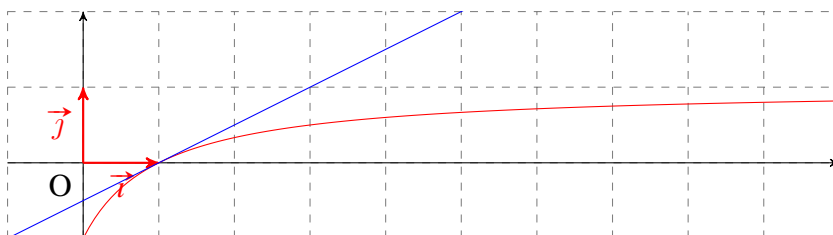
1 $a = 1$.



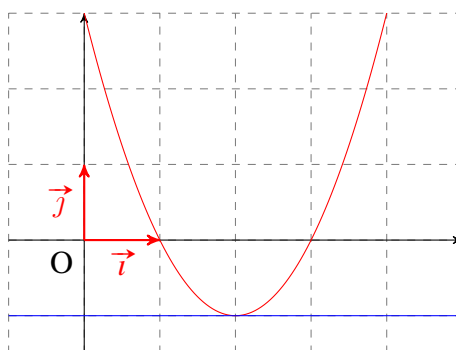
2 $a = 0$.



3 $a = 1$.

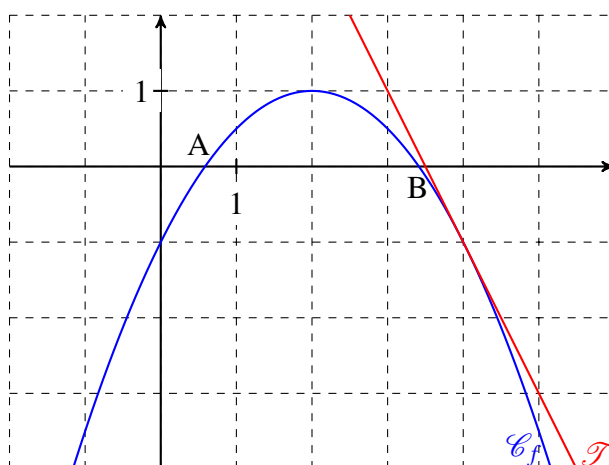


4 $a = 2$.



■ Exercice 3. Détermination d'une fonction par lecture graphique

★★★★★ 
Corrigé page 96



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1 Lire graphiquement les valeurs :

$$f(0) \quad ; \quad f(2) \quad ; \quad f'(2) \quad ;$$

$$f(4) \quad ; \quad f'(4)$$

2 Déterminer les valeurs de a , b et c à l'aide des valeurs trouvées précédemment.

3 Calculer l'abscisse des points A et B.

■ Exercice 4. Détermination d'une fonction par lecture graphique

★★★★☆ R

Corrigé page 97

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d ,$$

où a , b , c et d sont quatre nombres réels.

On sait que :

- le point $A(1; -1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$;
- la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x + 1$;
- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2;
- $f'(0) = -5$

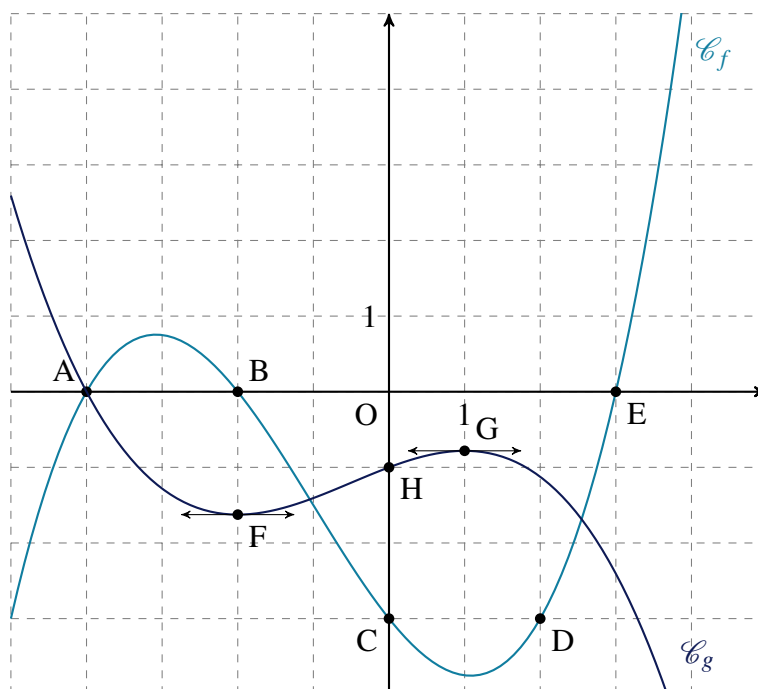
Déterminer les valeurs de a , b , c et d à l'aide de ces informations.

■ Exercice 5. Deux courbes

★★★★☆ A

Corrigé page 98

On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives sont données ci-dessous :



On sait que :

- les fonctions f et g sont des polynômes de degré 3 ;
- $\mathcal{C}_f$ passe par les points A, B, C, D et E ;
- $\mathcal{C}_g$ passe par les points A et H ;
- les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse -2 et 1 sont horizontales.

1 À l'aide des informations ci-dessous, déterminer l'expression factorisée de $f(x)$.

2 À l'aide des informations ci-dessous, déterminer une expression de $g(x)$.

3 Trouver les abscisses des points d'intersection des deux courbes par le calcul.

Calculs de dérivées

■ Exercice 6. Dérivées de référence

★★★★☆ A

Corrigé page 98

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée.

1 $f(x) = 3x - 1$

4 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$

5 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

6 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$

■ Exercice 7. Dérivées de fonctions produits et quotient

★★★★☆ A

Corrigé page 99

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée.

1 $f(x) = 2x\sqrt{x}$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$

2 $f(x) = \frac{3x - 1}{4x + 5}$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

■ Exercice 8. Variations de fonctions produits

★★★★☆ A

Corrigé page 101

Pour chacune des fonctions f et g ci-contre,

- trouver son domaine de définition ;
- trouver sa dérivée ;
- trouver son sens de variation sur son domaine de définition ;
- tonner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1 $f(x) = (3x + 2)\sqrt{x}$

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

■ Exercice 9. Sens de variation de fonctions quotients

★★★★☆ (A)

Corrigé page 103

Pour chacune des fonctions suivantes,

- donner son domaine de définition ;
- trouver sa dérivée ;
- en déduire ses variations sur son domaine de définition.

1 $f(x) = \frac{3x-4}{5x-2}$

2 $g(x) = \frac{5x-3}{x^2-x-2}$

3 $h(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$

■ Exercice 10. Étude complète de la fonction $x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$

★★★★☆ (R)

Corrigé page 105

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Montrer que la dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3-x^2)}{2(x^2+1)^2}.$$

- 2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- 3 Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

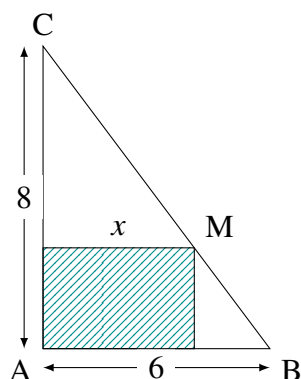
Problèmes d'optimisation

■ Exercice 11. Optimisation d'une aire dans un triangle rectangle

★★★★☆ (R)

Corrigé page 106

On considère la figure suivante (M est un point de $[BC]$) :



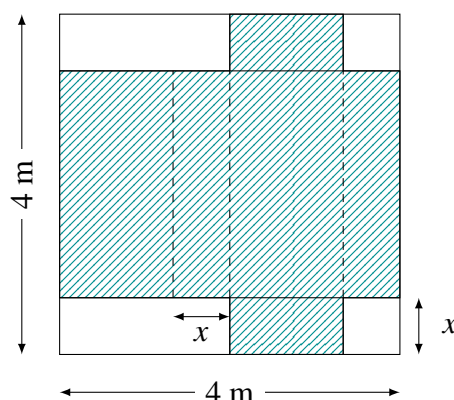
Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle hachuré est optimale.

■ Exercice 12. Optimisation du volume d'une boîte

★★★★☆ R

Corrigé page 107

On souhaite construire une boîte parallélépipédique à partir d'un carton carré de 4 mètres de côté, comme l'illustre le schéma suivant :



La partie hachurée correspond à la partie du carton qui va être pliée (aux pointillés) pour obtenir la boîte.

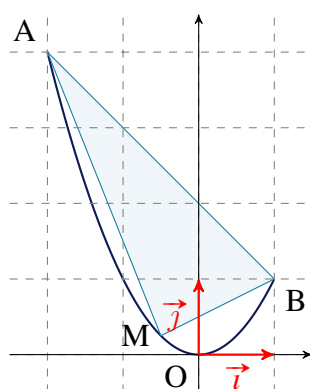
- 1 Montrer que le volume de la boîte est égal à $f(x) = 2x(2-x)^2$.
- 2 Étudier les variations de f , puis en déduire la valeur de x (arrondie au centimètre près) pour laquelle le volume de la boîte est optimal.

■ Exercice 13. Optimisation d'une aire dans une parabole

★★★★☆ R

Corrigé page 108

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ sur laquelle se trouvent deux points : $A(-2;4)$ et $B(1;1)$. Soit M un point de cette parabole d'abscisse a , $-2 \leq a \leq 1$. On cherche à optimiser l'aire du triangle ABM .



- 1 Calculer AB .
- 2 Déterminer une équation de la droite (AB) .
- 3 Soit H le pied de la hauteur du triangle ABM issue du sommet M . Déterminer une équation de la droite (MH) en fonction de a .
- 4 Déduire des questions 2 et 3 les coordonnées de H en fonction de a .

- 5 Justifier qu'optimiser l'aire du triangle ABM revient à optimiser MH^2 , et donc à optimiser la fonction f définie par $f(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + 1$.
- 6 En déduire alors l'abscisse du point M telle que l'aire du triangle ABM soit optimale.

■ Exercice 14. Optimisation de la surface d'une casserole

★★★★★ R

Corrigé page 109



Une casserole peut être assimilée à un cylindre avec une seule base (le fond). On note R le rayon du disque constituant la base et h la hauteur du cylindre.

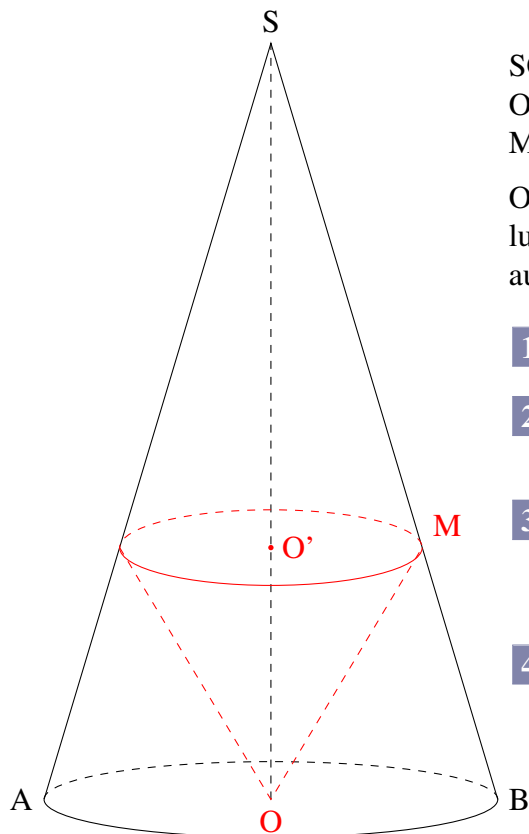
- 1 Montrer que la surface de la casserole est donnée par la fonction $f(R) = \pi R^2 + \frac{2V}{R}$, où V est le volume de la casserole.
- 2 Montrer alors que la surface est minimale quand la hauteur de la casserole est égale au rayon de la base.

■ Exercice 15. Optimisation du volume d'un cône

★★★★★ R

Corrigé page 109

On considère la figure suivante :



$SO = 10$ cm.

$OB = 3$ cm.

M est un point mobile sur $[SB]$ tel que $MB = x$ cm.

On cherche à déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du cône de sommet O est optimal. Pour cela, répondre aux questions suivantes :

- 1 Calculer SB.
- 2 Déterminer en fonction de x le rayon de la base ainsi que la hauteur OO' du cône de sommet O.
- 3 En notant $f(x)$ le volume du cône de sommet O, montrer que $f(x) = \frac{30\pi}{109\sqrt{109}}x(\sqrt{109} - x)^2$.
- 4 Conclure.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = x^2, a = 2.$

- Calcul de $f'(2)$.

Le taux d'accroissement de f en 2 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} \\ &= 4+h.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 2 est :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est alors :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = 4(x-2) + 4$$

$$y = 4x - 8 + 4$$

$$\boxed{y = 4x - 4}$$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1.$

- Calcul de $f'(1)$.

Le taux d'accroissement de f en 1 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{h} \\ &= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} \\ &= -\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)} \\ &= -\frac{1}{1+h}. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1+h} \right) = -1.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -1(x - 1) + 1$$

$$y = -x + 1 + 1$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1.$

- Calcul de $f'(-1)$.

Le taux d'accroissement de f en -1 est :

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - ((-1)^2 - 2 \times (-1) + 3)}{h} \\ &= \frac{h^2 - 2h + 1 + 2 - 2h + 3 - 6}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(h-4)}{\cancel{h}} \\ &= h - 4. \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en -1 est :

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est alors :

$$\begin{aligned}
 y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\
 y &= f'(-1)(x+1) + f(-1) \\
 y &= -4(x+1) + 6 \\
 y &= -4x - 4 + 6 \\
 \boxed{y &= -4x + 2}
 \end{aligned}$$

4 $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$.

- Calcul de $f'(3)$.

Le taux d'accroissement de f en 4 est :

$$\begin{aligned}
 \frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\
 &= \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h} \\
 &= \frac{h^2 - 4h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\
 &= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 4 est :

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \right) = \frac{1}{4}.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est alors :

$$\begin{aligned}
 y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\
 y &= f'(4)(x-4) + f(4) \\
 y &= \frac{1}{4}(x-4) + 2 \\
 y &= \frac{1}{4}x - 1 + 2 \\
 \boxed{y &= \frac{1}{4}x + 1}
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Dans cet exercice, il faut avoir en tête que le nombre dérivé d'une fonction en un point a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

Il faut donc, pour chaque question, regarder la tangente à la courbe tracée en rouge au point d'abscisse a donné.

- 1 Ici, la tangente a pour coefficient directeur 1. Donc $f'(1) = 1$.

Ainsi, la tangente tracée a pour équation réduite :

$$y = x - 1$$

(N'oublions pas que dans l'équation d'une droite $y = mx + p$, p désigne l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

- 2 Ici, le coefficient directeur de la tangente tracée est $-\frac{1}{2}$. En effet, les points $A(0;1)$ et $B(2;0)$ sont sur la tangente donc :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

- 3 Ici, le coefficient directeur de la tangente est $\frac{1}{2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

- 4 Ici, la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.

L'équation de la tangente est alors :

$$y = -1$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1
- $f(0) = -1$;
 - $f(2) = 1$;
 - $f'(2) = 0$ car la fonction atteint un maximum pour $x = 2$;
 - $f(4) = -1$;
 - $f'(4) = -2$ (c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4).

- 2
- $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$; donc $c = -1$ d'après la question précédente (1^{er} point).
 - $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(2) = 4a + b$; donc $4a + b = 0$, soit $b = -4a$.
 - $f(2) = 1$ donc $4a + 2b - 1 = 1$, soit $-b + 2b = 2$ d'après le point précédent. Ainsi, $b = 2$.
 - $f'(4) = 8a + b = -2$ donc $8a = -4$, soit $b = -\frac{1}{2}$.

Finalement, on a : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

- 3 L'abscisse des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll} x_B = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_B = \frac{-2 - \sqrt{2}}{-1} & x_A = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-1} \\ \underline{x_B = 2 + \sqrt{2}} & \underline{x_A = 2 - \sqrt{2}} \end{array}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1
- $A(1; -1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = -1$, soit :

$$a + b + c + d = -1 \quad (\text{IV.1})$$

- la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x + 1$ donc $f'(1) = -2$, soit :

$$3a + 2b + c = -2 \quad (\text{IV.2})$$

- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc $f(0) = 2$, d'où :

$$d = 2.$$

- $f'(0) = -5$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc :

$$c = -5.$$

Les équations IV.1 et IV.2 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = -1 - (-5) - 2 = 2 \\ 3a + 2b = -2 - (-5) = 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a = 2 - b \\ 3(2 - b) + 2b = 3 \end{cases}$$

La seconde équation donne alors :

$$6 - b = 3 \quad \text{soit :} \quad b = 3.$$

La première équation donne alors :

$$a = 2 - 3 = -1.$$

On obtient finalement :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2.$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = a(x+4)(x+2)(x-3)$. En effet, f s'annule pour $x = -4$, $x = -2$ et $x = 3$.

De plus, $f(0) = -3$ donc $a \times 4 \times 2 \times (-3) = -3$, soit $a = \frac{1}{8}$. Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{8}(x+4)(x+2)(x-3)$$

2 $g(x) = (x+4)(ax^2 + bx + c)$. En effet, $g(-4) = 0$.

De plus, $g(0) = -1$ donc $4c = -1$, soit $c = -\frac{1}{4}$.

Ainsi, $g'(x) = ax^2 + bx - \frac{1}{4} + (x+4)(2ax + b)$ (on dérive le produit).

Or, $g'(-2) = 0$ donc $4a - 2b - \frac{1}{4} + 2(-4a + b) = 0$, soit $-4a = \frac{1}{4}$. Donc $a = -\frac{1}{16}$.

De plus, $g'(1) = 0$ donc $-\frac{1}{16} + b - \frac{1}{4} + 5\left(-\frac{1}{8} + b\right) = 0$, soit $6b = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{15}{16}$. Donc $c = \frac{5}{32}$. Ainsi :

$$g(x) = (x+4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right)$$

3 L'abscisse d'un point d'intersection des deux courbes vérifie l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x+4)(x+2)(x-3) = (x+4)\left(-\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8}(x^2 - x - 6) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{32}x - \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 24 = -2x^2 + 5x - 8 \text{ on a multiplié par } 32 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 9x - 16 = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = 81 - 4 \times 6 \times (-16) = 465.$$

Les abscisses des deux points d'intersection sont donc :

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{465}}{12} \quad ; \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{465}}{12}.$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = 3x - 1$ donc $f'(x) = 3$.

2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = 10x + 3$.

$$\text{3 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \text{ donc } f'(x) = x^2 - 10x + 3.$$

$$\text{4 } f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} \text{ donc } f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{5 } f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} \text{ donc } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}.$$

$$\text{6 } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x} \text{ donc } f'(x) = -x + 3 - \frac{1}{6\sqrt{x}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\text{1 } f(x) = 2x\sqrt{x}. \text{ On pose :}$$

$$u(x) = 2x$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 2$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}} \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 3\sqrt{x}}$$

$$\text{2 } f(x) = \frac{3x-1}{4x+5}. \text{ On pose :}$$

$$u(x) = 3x - 1$$

$$v(x) = 4x + 5$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = 4$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3(4x+5) - 4(3x-1)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{12x+15-12x+4}{(4x+5)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{19}{(4x+5)^2}}$$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x^2+1}$. On pose :

$$u(x) = \sqrt{x} - x$$

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$v'(x) = 2x$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times (x^2 + 1) - (\sqrt{x} - x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} - x^2 - 1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 1}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$. On pose :

$$u(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$v(x) = x - 3$$

$$u'(x) = 2x - 3$$

$$v'(x) = 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x - 3) - (x^2 - 3x + 1) \times 1}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}.$

On commence par simplifier l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2+1}{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} u(x) &= x\sqrt{x} & v(x) &= x^2 + 1 \\ u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} & v'(x) &= 2x \\ &= \sqrt{x} + \frac{\cancel{x}\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\cancel{x}\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}(3-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}.$

- Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[.$
- f est de la forme uv avec :

$$u(x) = 3x + 2$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 &= 3\sqrt{x} + (3x+2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= 3\sqrt{x} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{6x+3x+2}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}}$$

- $f'(x) > 0 \iff 9x+2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\frac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

- D'après le tableau de variation de f , on peut dire que $f(x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$.

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x}.$

- Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.
- g est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= 1 + \frac{1}{x} \\
 u'(x) &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x) &= \sqrt{x} \\
 v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 &= -\frac{1}{x^2} \sqrt{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{x \times \sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

- $g'(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$ car $2x\sqrt{x} > 0$ sur $\mathcal{D}_g$.

On a alors le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$		2	

- D'après le tableau de variation de g , on peut dire que $g(x) \geq 2$ sur $]0; +\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = \frac{3x-4}{5x-2}$.

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}$.

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 3x - 4$$

$$v(x) = 5x - 2$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = 5$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3(5x-2) - 5(3x-4)}{(5x-2)^2} \\ &= \frac{15x-6-15x+20}{(5x-2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{14}{(5x-2)^2}$$

- $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ donc :

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

2 $g(x) = \frac{5x-3}{x^2-x-2}$.

- Une racine évidente de $x^2 - x - 2$ est $x_1 = 2$. De plus, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donc $2x_2 = -2$, soit $x_2 = -1$.

Ainsi, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 5x - 3$$

$$v(x) = x^2 - x - 2$$

$$u'(x) = 5$$

$$v'(x) = 2x - 1$$

Ainsi,

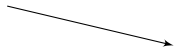
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{5(x^2 - x - 2) - (5x - 3)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} \\ &= \frac{5x^2 - 5x - 10 - 10x^2 + 5x + 6x + 3}{(x^2 - x - 2)^2} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{-5x^2 + 6x - 7}{(x^2 - x - 2)^2}$$

- $g'(x)$ est du signe de $-5x^2 + 6x - 7$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 140 = -104 < 0.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	-	-
$g(x)$				

3 $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$

- $x^2 - 3x + 2$ possède $\alpha = 1$ comme racine évidente, donc la seconde racine est $\beta = 2$.
Ainsi, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.
- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = x^2 + x + 1$$

$$v(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$u'(x) = 2x + 1$$

$$v'(x) = 2x - 3$$

D'où :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x + 1)(x^2 - 3x + 2) - (x^2 + x + 1)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + x^2 - 3x + 2 - (2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + 2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2 - 2x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{-4x^2 + 2x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

- $h'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 2x + 5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 80 = 84.$$

Ses deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \approx -0,9 < \alpha$$

et

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 - 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \approx 1,4 \in]\alpha; \beta[=]1; 2[.$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	$\alpha = 1$	x_2	$\beta = 2$	$+\infty$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$							

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x\sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.

u est une fonction produit gh avec $g(x) = x$ et $h(x) = \sqrt{x}$, donc $u = g'h + h'g$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2}(x) \\ &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2 + 1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(x^2 + 1) - 4x^2\sqrt{x}}{2(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}(3 - x^2)}{2(x^2 + 1)^2}$$

- 2 $2(x^2 + 1)^2 > 0$ et $\sqrt{x} \geq 0$ sur $[0; +\infty[$. Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $3 - x^2$, polynôme de degré 2 admettant pour racines $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ et dont le coefficient de x^2 est négatif, d'où le tableau suivant :

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	0	$\longrightarrow$	$\longrightarrow$	0	

- 3 L'équation réduite d'une tangente est donnée par la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec ici $a = 1$.

$f(a) = \frac{1}{2}$ et $f'(a) = \frac{1}{4}$ donc l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = \frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$$

soit $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- x désigne a priori la longueur du rectangle hachuré. On voit alors que $x \in [0; 6]$.
- Notons h la largeur du rectangle ; d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{6 - x}{6} = \frac{h}{8}$$

donc

$$h = \frac{8(6 - x)}{6} = \frac{24 - 4x}{3} = 8 - \frac{4}{3}x.$$

L'aire du rectangle hachuré est alors :

$$a(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x = x \left(8 - \frac{4}{3}x \right).$$

a est donc un polynôme de degré 2 dont la courbe représentative est une parabole dont les branches sont dirigées vers le bas (car le coefficient de x^2 est négatif).

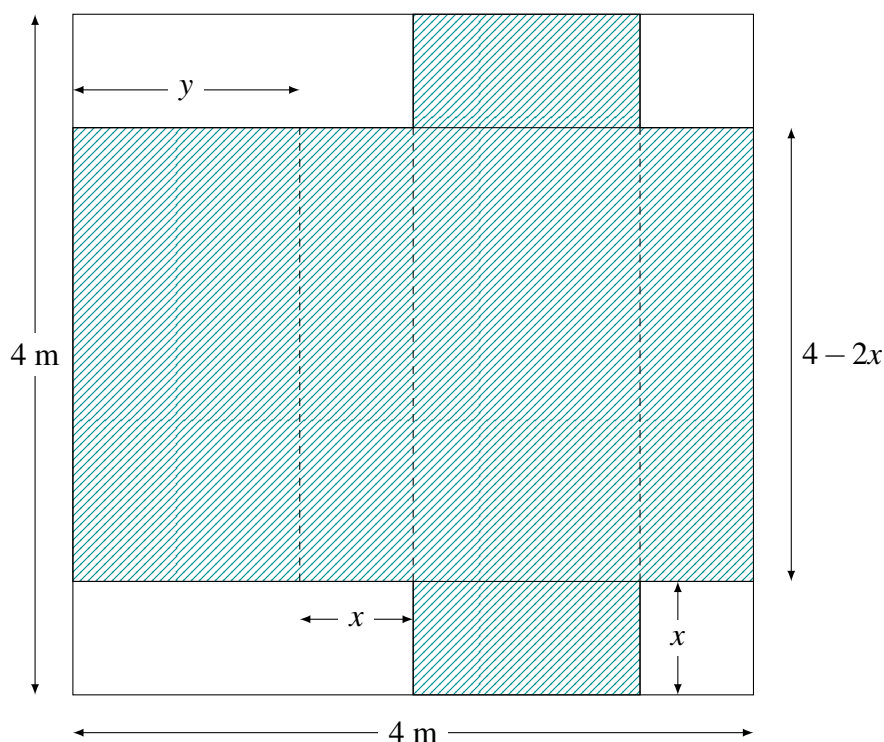
Par conséquent, le maximum de a est atteint pour $x = -\frac{8}{2 \times (-\frac{4}{3})} = 3$.

L'aire du rectangle hachuré est donc optimale pour $x = 3$.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Notons y la largeur d'une face de la boîte :



Alors,

$$y + x + y + x = 4,$$

soit :

$$y = 2 - x.$$

Le volume de la boîte est alors :

$$f(x) = x \times (4 - 2x) \times y$$

$$f(x) = 2x(2 - x)^2$$

2 $f(x) = 2x(4 - 4x + x^2) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$.

Ainsi, $f'(x) = 6x^2 - 16x + 8$, dont le discriminant est $\Delta = 16^2 - 4 \times 6 \times 8 = 64$. $f'(x)$ admet donc deux racines : $\alpha = \frac{16 - \sqrt{64}}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{16 + 8}{12} = 2$. On a alors :

x	0	$\frac{2}{3}$	2		
$f'(x)$		+	0	-	0
f					

Notons que x ne peut pas dépasser la valeur 2 car il faut que $4 - 2x \geq 0$, soit $2x \leq 4$, d'où $x \leq 2$.

Le maximum de f est atteint en $x = \frac{2}{3}$ (exprimé en mètre).

Le volume de la boîte est optimal pour $x = 67$ cm.

$$\begin{aligned}
 1 \quad AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
 &= \sqrt{(1+2)^2 + (1-4)^2} \\
 &= \sqrt{9+9} \\
 &= \sqrt{9 \times 2} \\
 &= 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

2 Le coefficient directeur de (AB) est : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3}{-3} = -1$. Ainsi, l'équation réduite de (AB) est : $y = -x + p$.

$B \in (AB)$ donc $y_B = -x_A + p$, soit $1 = -1 + p$. Donc $p = 2$.

Ainsi, (AB) : $y = -x + 2$.

3 (MH) : $y = mx + p$ est perpendiculaire à (AB) donc le produit de m et du coefficient directeur de (AB) doit être égal à -1 , soit $m = 1$. Ainsi, (MH) : $y = x + p$, avec $y_M = x_M + p$, soit $p = y_M - x_M = a^2 - a$.

Ainsi, (MH) : $y = x + a^2 - a$.

4 H est le point d'intersection de (AB) et (MH) donc $y_H = -x_H + 2$ (car $H \in (AB)$) et $y_H = x_H + a^2 - a$ (car $H \in (MH)$).

Donc $-x_H + 2 = x_H + a^2 - a$, soit $2x_H = 2 - a^2 + a$ ou encore $x_H = 1 - \frac{1}{2}(a^2 - a)$.

On en déduit alors que $y_H = -x_H + 2 = \frac{1}{2}(a^2 - a) - 1 + 2 = 1 + \frac{1}{2}(a^2 - a)$.

5 L'aire de ABM est égale à $\frac{AB \times MH}{2}$.

AB étant constante, optimiser l'aire de ABM revient à optimiser MH, et donc MH^2 .

$$\begin{aligned}
 MH^2 &= (x_H - x_M)^2 + (y_M - y_H)^2 \\
 &= \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 - a) - a\right]^2 + \left[1 + \frac{1}{2}(a^2 - a) - a^2\right]^2 \\
 &= \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 + a)\right]^2 + \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 - a) + a\right]^2 \\
 &= 2 \left[1 - \frac{1}{2}(a^2 + a)\right]^2
 \end{aligned}$$

Donc optimiser MH^2 revient à optimiser $f(a) = 1 - \frac{1}{2}(a^2 + a)$, soit en développant : $f(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + 1$.

6 f est un polynôme du second degré, où le coefficient du terme de degré 2 est négatif; donc f admet un maximum pour $a = -\frac{-\frac{1}{2}}{2 \times (-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, l'aire de ABM est optimale lorsque l'abscisse de M est $-\frac{1}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 14.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'aire du disque de fond est : πR^2 ;

l'aire de la surface latérale est : $2\pi R h$ (c'est un rectangle de largeur h et de longueur égale au périmètre du disque de base, soit $2\pi R$).

Donc $f(R) = \pi R^2 + 2\pi R h$.

Or, le volume d'un cylindre est :

$$V = \pi R^2 h$$

donc :

$$h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Alors,

$$f(R) = \pi R^2 + 2\pi R \times \frac{V}{\pi R^2} = \boxed{\pi R^2 + \frac{2V}{R}}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad f'(R) &= 2\pi R - \frac{2V}{R^2} \\ &= 2 \times \frac{\pi R^3 - V}{R^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(R) = 0 \iff R^3 = \frac{V}{\pi} = \frac{\pi R^2 h}{\pi} = R^2 h.$$

Donc, en simplifiant par R^2 :

$$R = h.$$

Ainsi, l'extremum de la fonction f est atteint pour $R = h$.

Il est aisé de vérifier que $f'(R) < 0$ pour $R < h$ donc cet extremum est un minimum.

Nous avons bien vérifié que la surface de la casserole est minimale quand la hauteur de la casserole est égale à son rayon. Prenez une casserole chez vous et essayez !

■ Corrigé de l'exercice 15.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Dans le triangle BOS rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore,

$$SB^2 = SO^2 + OB^2,$$

donc :

$$\boxed{SB = \sqrt{109}}$$

2 (O'M) // (OB) donc le théorème de Thalès nous permet d'écrire :

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{SM}{SB} = \frac{O'M}{OB},$$

soit :

$$\frac{SO'}{10} = \frac{\sqrt{109} - x}{\sqrt{109}} = \frac{O'M}{3},$$

On peut donc dire d'une part que :

$$\boxed{O'M = \frac{3(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}}} \quad (\text{rayon de la base du c\^one})$$

et d'autre part :

$$SO' = \frac{10(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}}$$

donc la hauteur du c\^one est :

$$\begin{aligned} h(x) &= 10 - \frac{10(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}} \\ &= \frac{10\sqrt{109} - 10\sqrt{109} + 10x}{\sqrt{109}} \end{aligned}$$

$$\boxed{h(x) = \frac{10}{\sqrt{109}}x}$$

3 Le volume d'un c\^one est donn\^e par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3(\sqrt{109} - x)}{\sqrt{109}} \right)^2 \times \frac{10}{\sqrt{109}}x$$

$$\boxed{f(x) = \frac{30\pi}{109\sqrt{109}}x(\sqrt{109} - x)^2}$$

4 Optimiser $f(x)$ \^equivaut \^a optimiser la fonction g d\^efinie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= x(\sqrt{109} - x)^2 = \\ &= x(109 - 2\sqrt{109}x + x^2) \\ &= x^3 - 2\sqrt{109}x^2 + 109x. \end{aligned}$$

On a :

$$g'(x) = 3x^2 - 4\sqrt{109}x + 109.$$

Le discriminant de $g'(x)$ est :

$$\Delta = (4\sqrt{109})^2 - 4 \times 3 \times 109 = 436 = (2\sqrt{109})^2.$$

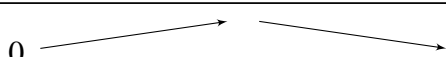
Donc ses racines sont :

$$\alpha = \frac{4\sqrt{109} - 2\sqrt{109}}{6} = \frac{\sqrt{109}}{3}$$

et

$$\beta = \frac{4\sqrt{109} + 2\sqrt{109}}{6} = \sqrt{109}.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	α	$\sqrt{109}$		
$g'(x)$		+	0	-	0
$g(x)$	0			0	

Ainsi, le volume est optimal lorsque M est au tiers de [SB] en partant de B.

Trigonométrie

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

Mesures principales & angles orientés

■ Exercice 1. Mesure principale

★★★★☆ **A**

Corrigé page 116

Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants.

1 $\frac{17\pi}{3}$

4 $-\frac{2015\pi}{6}$

7 $\frac{89\pi}{9}$

10 $-\frac{123321\pi}{123}$

2 $-\frac{8\pi}{3}$

5 $\frac{9999\pi}{7}$

8 $-\frac{107\pi}{13}$

3 $\frac{9\pi}{5}$

6 $-\frac{78\pi}{9}$

9 $\frac{21\pi}{2}$

■ Exercice 2. Calculs de mesures principales d'angles

★★★★☆ **A**

Corrigé page 117

- 1 Soit un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{5}$.

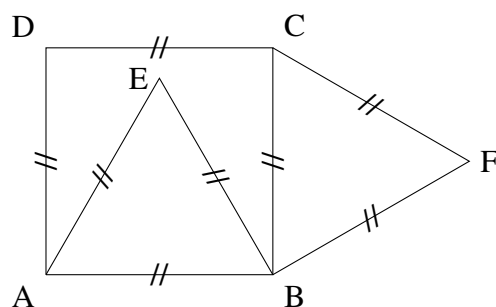
Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

a. $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

b. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$.

c. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

- 2 Dans la figure suivante, ABCD est un carré, AEB et BFC sont équilatéraux.



Calculer une mesure des angles :

- $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB})$
- $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF})$
- $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})$

Que conclure quant à D, E et F ?

■ Exercice 3. Trouver des angles

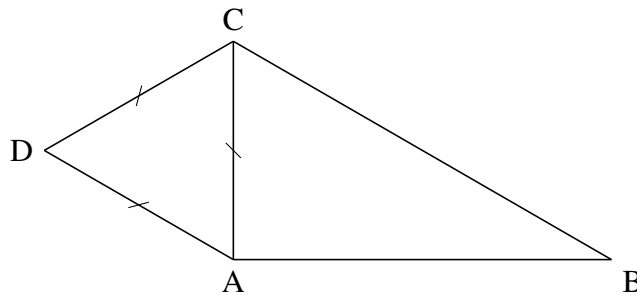
★★★★☆ A

Corrigé page 118

ABC est un triangle rectangle en A de sens direct.

ACD est un triangle équilatéral de sens direct.

De plus, $(\vec{BA}, \vec{BC}) = -\frac{\pi}{6}$.



Déterminer les mesures principales en radians des angles suivants (en justifiant).

1 $(\vec{AD}, \vec{AB})$

3 $(\vec{DC}, \vec{BA})$

2 $(\vec{DC}, \vec{AC})$

4 $(\vec{CA}, \vec{CB})$

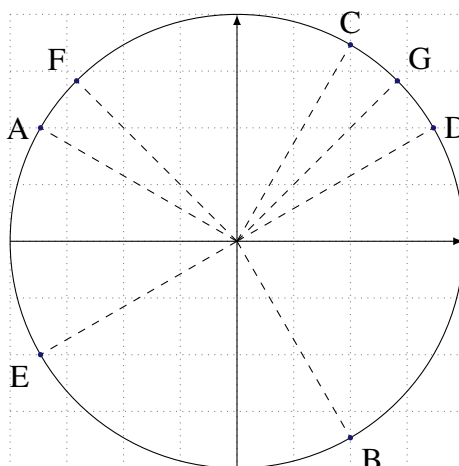
Équations

■ Exercice 4. Lecture d'angles sur le cercle trigonométrique

★★★★☆ A

Corrigé page 118

Attribuer à chaque point sur le cercle trigonométrique ci-dessous la mesure principale de l'angle qui lui est associé.



■ Exercice 5. Résolution d'équations trigonométriques

★★★★☆ A

Corrigé page 118

Résoudre, dans $\mathbb{R}$ puis sur $]-\pi; \pi]$, les équations suivantes :

1 $\cos x = \frac{1}{2}$

4 $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\sin x = \frac{1}{2}$

5 $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

3 $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

■ Exercice 6. Transformation d'une équation

★★★★☆ R

Corrigé page 120

Soient a et b deux réels positifs. On considère alors l'équation :

$$\sqrt{a} \cos x = \sqrt{b} \sin x \quad (\text{E})$$

1 Montrer que les solutions de (E) sont aussi solutions de l'équation :

$$\cos^2 x = \frac{b}{a+b} \quad (\text{E}')$$

2 On prend $a = 3$ et $b = 1$. Résoudre (E').

3 Résoudre alors (E) sur $]-\pi; \pi]$.

■ Exercice 7. Équations avec changement de variable

★★★★☆ A

Corrigé page 121

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

2 $2\sin^2 x - (4 + \sqrt{2})\sin x + 2\sqrt{2} = 0$

3 $4\cos^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$

4 $3\sin^2 x - 5\cos^2 x + 1 = 0$

5 $\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) - \frac{5}{4} = 0$

■ Exercice 8. À la découverte d'un sinus et d'un cosinus inconnu

★★★★☆ R

Corrigé page 124

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $16X^2 - 20X + 5 = 0$.

Dans un manuel de trigonométrie avancée, on peut lire la formule suivante :

$$\sin(5x) = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.$$

2 En prenant $x = \frac{\pi}{5}$, que donne cette formule ?

3 En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{5}$.

4 En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$.

5 a. Montrer que $4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$.

b. En déduire une écriture plus simple de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Calculs algébriques

■ Exercice 9. Un calcul simple

★★★★☆ A

Corrigé page 126

Calculez :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

■ Exercice 10. Avec des carrés

★★★★☆ A

Corrigé page 126

On sait qu'un angle α a pour cosinus le nombre 0,6 et que $\alpha \in]0 ; \pi[$. Que vaut $\sin(\alpha)$?

■ Exercice 11. Avec des carrés (le retour)

★★★★☆ A

Corrigé page 127

Calculez :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right).$$

■ Exercice 12. Simplifications

★★★★☆ A

Corrigé page 127

Effectuer les calculs suivants :

1 $\cos^2 \frac{\pi}{5} - \cos^2 \frac{4\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{7} - \sin^2 \frac{8\pi}{7}$

2 $\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4}$

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Méthode

Dans ce genre d'exercice, où il est question de trouver la mesure principale de $\frac{k\pi}{n}$, il est à mon avis important de respecter l'algorithme suivant :

- D'abord, on « met de côté » le signe « $-$ » quand il y en a un et on ne s'occupe que de la fraction avec π ;
- On calcule $k \div n$.
 - Si on trouve un nombre compris entre -1 et 1 , alors on a déjà la mesure principale ;
 - Sinon, on prend l'entier PAIR le plus proche du résultat (notons-le p et on écrit k sous la forme $k = p \times n \pm r$).

$$1 \quad \frac{17\pi}{3} = \frac{(6 \times 3 - 1)\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3} \text{ donc la mesure principale est } -\frac{\pi}{3}.$$

$$2 \quad -\frac{8\pi}{3} = -\frac{(2 \times 3 + 2)\pi}{3} = -\frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}; \text{ la mesure principale est donc } -\frac{2\pi}{3}.$$

$$3 \quad \frac{9\pi}{5} = \frac{(2 \times 5 - 1)\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}; \text{ la mesure principale est donc } -\frac{\pi}{5}.$$

$$4 \quad -\frac{2015\pi}{6}. \text{ On commence par calculer } 2015 \div 6 \approx 335,83, \text{ ce qui est plus proche de } 336 \text{ que de } 334 \text{ (il nous faut un nombre pair). On écrit alors :}$$

$$-\frac{2015\pi}{6} = -\frac{(336 \times 6 - 1)\pi}{6} = -336\pi + \frac{\pi}{6}; \text{ la mesure principale est donc } \frac{\pi}{6}.$$

$$5 \quad \frac{9999\pi}{7}.$$

$9999 \div 7 \approx 1428,4$ donc on écrit :

$$\frac{9999\pi}{7} = \frac{(1428 \times 7 + 3)\pi}{7} = 1428\pi + \frac{3\pi}{7}. \text{ Ainsi, la mesure principale est } \frac{3\pi}{7}.$$

$$6 \quad -\frac{78\pi}{9} = -\frac{(8 \times 9 + 6)\pi}{9} = -8\pi - \frac{6\pi}{9} = -8\pi - \frac{2\pi}{3}. \text{ La mesure principale est donc } -\frac{2\pi}{3}.$$

$$7 \quad \frac{89\pi}{9} = \frac{(10 \times 9 - 1)\pi}{9} = 10\pi - \frac{\pi}{9} \text{ donc la mesure principale est } \frac{\pi}{9}.$$

$$8 \quad -\frac{107\pi}{13} = -\frac{(8 \times 13 + 3)\pi}{13} = -8\pi - \frac{3\pi}{13} \text{ donc la mesure principale est } -\frac{3\pi}{13}.$$

$$9 \quad \frac{21\pi}{2} = \frac{(10 \times 2 + 1)\pi}{2} = 10\pi + \frac{\pi}{2} \text{ donc la mesure principale est } \frac{\pi}{2}.$$

$$10 \quad -\frac{123321\pi}{123} = -\frac{(1002 \times 123 + 75)\pi}{123} = -1002\pi - \frac{75\pi}{123} \text{ donc la mesure principale est } -\frac{75\pi}{123}.$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad a. \quad \frac{2015\pi}{7}.$$

On calcule : $2015 \div 7 \approx 287,85 \approx 288$ donc $2015 = 288 \times 7 - 1$ d'où :

$$\begin{aligned} \frac{2015\pi}{7} &= \frac{(288 \times 7 - 1)\pi}{7} \\ &= 288\pi - \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{2015\pi}{7} = -\frac{\pi}{7}}$$

$$b. \quad \frac{1695\pi}{9}.$$

On a : $1695 \div 9 \approx 188,33 \approx 188$, donc on écrit : $1695 = 188 \times 9 + 2$ et donc :

$$\begin{aligned} \frac{1695\pi}{9} &= \frac{(188 \times 9 + 2)\pi}{9} \\ &= 188\pi + \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1695\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}}$$

$$c. \quad \frac{2001\pi}{4}.$$

On a : $2001 \div 4 = 500,25 = 500 \times 4 + 1$ donc :

$$\frac{2001\pi}{4} = 500\pi + \frac{1\pi}{4}$$

$$\boxed{\frac{2001\pi}{4} = \frac{\pi}{4}}$$

$$2 \quad \bullet \quad (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)}_{\text{DAE isocèle en A}} + \frac{\pi}{3}$$

DAE isocèle en A

$$= \frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}$$

$$= \frac{9\pi}{12}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EB}) = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\bullet (\vec{EB}, \vec{EF}) = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) \quad (\text{EBF isocèle en B})$$

$$\boxed{(\vec{EB}, \vec{EF}) = \frac{\pi}{4}}$$

$$\bullet (\vec{ED}, \vec{EF}) = (\vec{ED}, \vec{EB}) + (\vec{EB}, \vec{EF})$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{(\vec{ED}, \vec{EF}) = \pi}$$

On en conclut que D, E et F sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\textbf{1} \quad (\vec{AD}, \vec{AB}) (\vec{AD}, \vec{AC}) + (\vec{AC}, \vec{AB})$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{(\vec{AD}, \vec{AB}) = -\frac{5\pi}{6}}$$

$$\textbf{2} \quad (\vec{DC}, \vec{AC}) = (\vec{CD}, \vec{CA}) \quad \text{car } (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

$$\boxed{(\vec{DC}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}}$$

$$\textbf{3} \quad (\vec{DC}, \vec{BA}) = (\vec{DC}, \vec{DA}) + (\vec{DA}, \vec{BA})$$

$$= -\frac{\pi}{3} + (\vec{AD}, \vec{AB})$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \quad \text{d'après } \textbf{1}$$

$$= -\frac{7\pi}{6} \quad (\text{qui n'est pas une mesure principale car } -\frac{7\pi}{6} < -\pi)$$

$$= -\frac{7\pi}{6} + 2\pi$$

$$\boxed{(\vec{DC}, \vec{BA}) = \frac{5\pi}{6}}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\bullet A : \frac{5\pi}{6}$$

$$\bullet C : \frac{\pi}{3}$$

$$\bullet E : -\frac{5\pi}{6}$$

$$\bullet G : \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet B : -\frac{\pi}{3}$$

$$\bullet D : \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet F : \frac{3\pi}{4}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\textbf{1} \quad \cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

- sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- sur $]-\pi; \pi]$, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} \right\}$

$$\boxed{2} \quad \sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

- sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- sur $]-\pi; \pi]$, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$

$$\boxed{3} \quad \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos(2x) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\iff 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\iff x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi$$

Ainsi,

- sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi ; -\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- sur $]-\pi; \pi]$, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5\pi}{8} ; -\frac{3\pi}{8} ; \frac{3\pi}{8} ; \frac{5\pi}{8} \right\}$

$$\boxed{4} \quad \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\iff 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 3x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 3x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi,

- sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} ; \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- sur $]-\pi; \pi]$, $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{36} ; \frac{23\pi}{36} ; -\frac{25\pi}{36} ; \frac{5\pi}{36} ; \frac{29\pi}{36} ; -\frac{19\pi}{36} \right\}$

Remarque : pour obtenir ces 6 valeurs, nous avons pris $k = 0$, $k = 1$ et $k = -1$ pour chaque expression dépendant de k .

$$\begin{aligned}
 5 \quad \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} &\iff \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} \\
 &\iff 5x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 5x - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff 5x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 5x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff 5x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 5x = -\frac{3\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

- sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5}; -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- sur $]-\pi; \pi]$,

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{17\pi}{30}; \frac{29\pi}{30}; -\frac{7\pi}{30}; -\frac{19\pi}{30}; -\frac{\pi}{10}; \frac{3\pi}{10}; \frac{7\pi}{10}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{9\pi}{10} \right\}$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad \sqrt{a}\cos x = \sqrt{b}\sin x &\implies (\sqrt{a}\cos x)^2 = (\sqrt{b}\sin x)^2 \\
 &\implies a\cos^2 x = b\sin^2 x \\
 &\implies a\cos^2 x = b(1 - \cos^2 x) \\
 &\implies a\cos^2 x = b - b\cos^2 x \\
 &\implies a\cos^2 x + b\cos^2 x = b \\
 &\implies (a + b)\cos^2 x = b \\
 &\implies \cos^2 x = \frac{b}{a + b} \quad \text{car } a + b \neq 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation $\sqrt{a}\cos x = \sqrt{b}\sin x$ sont aussi les solutions de l'équation $\cos^2 x = \frac{b}{a + b}$.

Remarque : la réciproque est fautive; les solutions de l'équation $\cos^2 x = \frac{b}{a + b}$ ne sont pas nécessairement solutions de l'équation $\sqrt{a}\cos x = \sqrt{b}\sin x$ à cause des simples implications (pas d'équivalences).

En effet, quand nous élevons au carré l'égalité « $\sqrt{a}\cos x = \sqrt{b}\sin x$ », nous n'avons pas d'équivalence car $A^2 = B^2 \iff \begin{pmatrix} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{pmatrix}$.

2 $a = 3$ et $b = 1$. Alors,

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad (E')$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x = \frac{1}{4} &\iff \cos^2 x - \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) \left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\iff \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3 D'après la question **1**, parmi les solutions de (E') se trouvent les solutions de :

$$3 \cos x = \sin x \quad (E)$$

On voit alors que $\cos x$ et $\sin x$ doivent avoir le même signe, donc $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Les seules solutions de (E') appartenant à $\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ donc l'ensemble solution de (E) sur $]-\pi; \pi]$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. On pose $X = \cos x$.

Le polyôme $2X^2 + X - 1$ a pour discriminant :

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9.$$

Ses deux racines sont donc :

$$X_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Les solutions x_1 et x_2 de l'équation $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ vérifient donc :

$$\cos x_1 = -1 \quad \text{et} \quad \cos x_2 = \frac{1}{2}.$$

On a alors :

$$x_1 = \pi + 2k\pi \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble solution de l'équation $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \pi + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2 $2\sin^2 x - (4 + \sqrt{2})\sin x + 2\sqrt{2} = 0$. On pose $X = \sin x$.

Une racine évidente du polynôme $2X^2 - (4 + \sqrt{2})X + 2\sqrt{2}$ est : $X_1 = 2$ donc l'autre racine est telle que $X_1 X_2 = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, donc $X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ainsi,

$$\sin x_1 = 2 \quad \text{et} \quad \sin x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

x_1 n'existe pas car un sinus ne peut pas être égal à 2.

$$\begin{aligned} \sin x_2 = \sin \frac{\pi}{4} &\iff x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $2\sin^2 x - (4 + \sqrt{2})\sin x + 2\sqrt{2} = 0$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3 $4\cos^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$. Posons $X = \cos x$.

Le polynôme $4X^2 + 2(1 - \sqrt{3})X - \sqrt{3}$ ne possédant pas de racine évidente, on calcule son discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(1 - \sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{3}) \\ &= 4(1 - 2\sqrt{3} + 3) + 16\sqrt{3} \\ &= 16 + 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On cherche à mettre Δ sous la forme d'un carré ; on veut donc trouver a et b tels que :

$$16 + 8\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^2$$

soit :

$$16 + 8\sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}.$$

Dans un premier temps, on doit donc avoir :

$$8 = 2ab$$

soit :

$$b = \frac{4}{a}.$$

Dans un second temps, on doit avoir :

$$a^2 + b^2 = 16$$

donc :

$$a^2 + \frac{16}{a^2} = 16$$

ou encore :

$$a^4 + 16 = 16a^2$$

c'est-à-dire :

$$a^4 - 16a^2 + 16 = 0.$$

$a = 2$ est une racine évidente, donc $b = \frac{4}{2} = 2$.

Ainsi,

$$\Delta = (2 + 2\sqrt{3})^2.$$

Les deux racines du polynôme $4X^2 + 2(1 - \sqrt{3})X - \sqrt{3}$ sont donc :

$$X_1 = \frac{2(\sqrt{3} - 1) - (2 + 2\sqrt{3})}{8} = -\frac{1}{2}$$

et

$$X_2 = \frac{2(\sqrt{3} - 1) + (2 + 2\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les solutions x_1 et x_2 de l'équation $4\cos^2 x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$ vérifient donc :

$$\cos x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

soit :

$$\cos x_1 = \cos \frac{2\pi}{3} \quad \text{et} \quad \cos x_2 = \cos \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi,

$$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble solution est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4 $3\sin^2 x - 5\cos^2 x + 1 = 0.$

On sait que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ donc :

$$\begin{aligned} 3\sin^2 x - 5\cos^2 x + 1 = 0 &\iff 3(1 - \cos^2 x) - 5\cos^2 x + 1 = 0 \\ &\iff -8\cos^2 x + 4 = 0 \\ &\iff \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff \left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ &\iff \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\iff x = -\frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

5 $\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) - \frac{5}{4} = 0.$

On remplace $\sin^2(2x)$ par $1 - \cos^2(2x)$:

$$\begin{aligned}\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) - \frac{5}{4} = 0 &\iff \cos^2(2x) + 2(1 - \cos^2(2x)) - \frac{5}{4} = 0 \\ &\iff -\cos^2(2x) + \frac{3}{4} = 0 \\ &\iff \cos^2(2x) = \frac{3}{4} \\ &\iff \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff 2x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } 2x = -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } 2x = \frac{\pi}{6} \\ &\iff x = -\frac{5\pi}{12} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} \text{ ou } x = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

L'ensemble solution est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le polynôme $16X^2 - 20X + 5$ a pour discriminant :

$$\Delta = 400 - 4 \times 16 \times 5 = 80.$$

Ses deux racines sont donc :

$$X_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}.$$

L'équation $16X^2 - 20X + 5 = 0$ a donc pour ensemble solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{5 - \sqrt{5}}{8} ; \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right\}$$

2 En prenant $x = \frac{\pi}{5}$, la formule donne :

$$\sin 5 \times \frac{\pi}{5} = 16 \sin^5 \frac{\pi}{5} - 20 \sin^3 \frac{\pi}{5} + 5 \sin \frac{\pi}{5}.$$

soit, en posant $S = \sin \frac{\pi}{5}$:

$$0 = S(16S^4 - 20S^2 + 5)$$

3 $S \neq 0$ donc on sait que $16S^4 - 20S^2 + 5 = 0$. Posons $s = S^2$; alors ,

$$16s^2 - 20s + 5 = 0.$$

D'après la question **1**, $s = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ ou $s = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$.

On a alors $S = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \approx 0,35$ ou $S = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \approx 0,9$: on exclut les valeurs négatives car $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ vu que $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Or, $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$ donc $\sin \frac{\pi}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$.

Ainsi,

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

4 À l'aide de la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 ,$$

on peut écrire :

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} + \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = 1$$

ou encore :

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} = 1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}.$$

Ainsi,

$$\cos \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}$$

$$\begin{aligned} \text{5 } a. \quad 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 &= 4 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{8} \right) - 2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} - 1 \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - 2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} - 1 \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 2 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 &= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

et donc :

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$$

b. De la question précédente, on déduit que $\cos \frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation :

$$4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Le discriminant de $4x^2 - 2x - 1$ est :

$$\Delta = 20.$$

Donc les racines sont :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

On sait que $\cos \frac{\pi}{5} > \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc :

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On a :

$$\cos \left(\frac{6\pi}{5} \right) = \underbrace{\cos \left(\pi + \frac{\pi}{5} \right)}_{\text{car } \cos(\pi+x) = -\cos(x)} = -\cos \left(\frac{\pi}{5} \right).$$

De plus,

$$\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \underbrace{\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right)}_{\text{car } \cos(\pi-x) = -\cos(x)} = -\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc :

$$\cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{6\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Donc, en prenant $x = \alpha$:

$$\begin{aligned} 0,6^2 + (\sin \alpha)^2 &= 1 \iff (\sin \alpha)^2 = 1 - 0,6^2 \\ &\iff (\sin \alpha)^2 = 0,64. \end{aligned}$$

De plus, $\alpha \in]0 ; \pi[$ donc $\sin \alpha > 0$ et :

$$\sin \alpha = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Remarquons que les angles dans les cosinus ne sont pas des valeurs remarquables, ce qui nous laisse à penser qu'il y a des transformations à faire.

On remarque que :

$$\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}.$$

(ce qui peut nous guider est le dénominateur « 14 » qui s'écrit 7×2 , donc cela nous pousse à écrire $\frac{5\pi}{14}$ en fonction de $\frac{\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{2}$).

Donc :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)}_{\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)} = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

et alors :

$$\boxed{\cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}.$$

De même,

$$\frac{9\pi}{22} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{11},$$

donc :

$$\cos\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{11}\right)}_{\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)} = \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

et alors :

$$\boxed{\cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right) \\ &= \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}_{=1 \text{ car } \cos^2 x + \sin^2 x = 1} + \underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)}_{=1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} & \textbf{1} \quad \cos^2 \frac{\pi}{5} - \cos^2 \frac{4\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{7} - \sin^2 \frac{8\pi}{7} \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{5} - \cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \sin^2 \frac{\pi}{7} - \sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{5} - \cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{7} - \sin^2 \frac{\pi}{7} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Explications :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ donc $[\cos(\pi - x)]^2 = [-\cos x]^2 = \cos^2 x$.

- $\sin(\pi + x) = -\sin x$ donc $[\sin(\pi + x)]^2 = [-\sin x]^2 = \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
 & \text{2} \quad \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} \\
 &= \cos \frac{\pi}{3} - \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \frac{\pi}{4} - \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \\
 &= 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \right] \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= 1 + \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Géométrie plane

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

■ Exercice 1. Vecteurs colinéaires dans un repère

★★★★☆ **A**

Corrigé page 132

Pour chaque question, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$.

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4 $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.

■ Exercice 2. Vecteurs avec paramètre

★★★★☆ **A**

Corrigé page 132

1 Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles ces deux vecteurs sont colinéaires.

2 Même question avec les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a+2 \\ -3a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$.

■ Exercice 3. Alignement de points

★★★★☆ **A**

Corrigé page 133

Soit ABC un triangle. On considère alors les points E, F et H tels que :

$$\vec{EC} = \frac{3}{5}\vec{AC} \quad ; \quad \vec{AF} = \frac{3}{4}\vec{AB} \quad ; \quad \vec{CH} = -\frac{9}{7}\vec{BC}.$$

1 Faire une figure.

2 Exprimer $\vec{EF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\frac{2}{5}\vec{AC}$.

3 Exprimer le vecteur $\vec{EH}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

En déduire que les points E, F et G sont alignés.

■ Exercice 4. Dans un parallélogramme

★★★★☆ A

Corrigé page 134

ABCD est un parallélogramme.

Soit I le milieu de [BC] et J celui de [CD].

On définit alors H par l'égalité $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et K par l'égalité $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

- 1 Faire une figure.
- 2 Exprimer $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- 3 Les droites (HI) et (KJ) sont-elles parallèles ?

■ Exercice 5. Équations cartésiennes de droites

★★★★☆ A

Corrigé page 135

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

- 1 A(-1;2) et B(3;-7).
- 2 A(3;-2) et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).
- 3 A(5;-4) et (AB) est parallèle à la droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.
- 4 A(3;2) et (AB) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

■ Exercice 6. Équation de droites avec paramètre

★★★★☆ A

Corrigé page 136

Dans un repère orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}_m$, $m \in \mathbb{R}$, dont une équation cartésienne est :

$$mx + (2m - 1)y + 4 = 0.$$

- 1 Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?
- 2 Pour quelle(s) valeur(s) de m la droite est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?
- 3 Montrer que quelle que soit la valeur de m , la droite $\mathcal{D}_m$ passe par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

■ Exercice 7.

★★★★☆ R

Corrigé page 136

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$m^2x - (2m - 1)y + 3 = 0$$

où $m \in \mathbb{R}$.

On pose A(1;m). Pour quelles valeurs de m le point A appartient-il à $\mathcal{D}$?

■ Exercice 8. Équation de droites & médiatrice

★★★★☆ A

Corrigé page 136

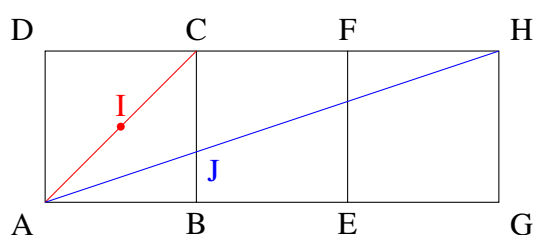
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(3;1)$, $B(1;2)$, $C(2;-1)$ et $D(-4;2)$.

- 1 Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- 2 Montrer que O appartient à (CD) .
- 3 Soit $M(x;y)$. Exprimer les distances BM et CM en fonction de x et y .
En déduire une équation de la droite Δ , médiatrice de $[BC]$, puis montrer que Δ est la droite (OA) .

■ Exercice 9. Alignement de points

★★★★☆ R

Corrigé page 137



$ABCD$, $CEFD$ et $EGHF$ sont trois carrés de même côtés.

I est le milieu de $[AC]$ et J est le point d'intersection de (BC) et (AH) .

Montrer que E , J et I sont alignés.

■ Exercice 10. Un algorithme

★★★★☆ R

Corrigé page 137

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère trois points A , B et C .

On considère alors l'algorithme suivant :

Algorithme 3: Tester l'alignement de trois points

Entrées

a , b , c , d , e , f sont des nombres réels
 d est un nombre

Initialisation

Saisir la valeur de a , b , c , d , e , f

Traitement

d prend la valeur ...

Si $d = 0$ alors

Afficher : « les points A , B et C ... »

sinon

Afficher : « Les points A , B et C ... »

Fin du Si

- 1 Que peuvent représenter a , b , c , d , e et f dans cet algorithme ?
- 2 Compléter cet algorithme.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$-1 \times 2 - 5 \times 3 = -2 - 15 = -17 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$-3 \times 3 - 7 \times (-7) = -9 + 49 = 40 \neq 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$2 \times 5 - \frac{10}{3} \times 3 = 10 - 10 = 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4 $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$.

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2} \times 2 = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff (a+1)(a-1) - 2a = 0 \\ &\iff a^2 - 2a - 1 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $a^2 - 2a - 1$ est :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8.$$

Il y a donc deux solutions à l'équation :

$$a_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

et son conjugué :

$$a_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} a+2 \\ -3a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ a-2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} &\iff (a+2)(a-2) + 3a(2a-1) = 0 \\ &\iff a^2 - 4 + 6a^2 - 3a = 0 \\ &\iff 7a^2 - 3a - 4 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $7a^2 - 3a - 4$ est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 7 \times (-4) = 9 + 112 = 121.$$

Il y a donc deux solutions à l'équation :

$$a_1 = \frac{3 - 11}{14} = -\frac{4}{7}$$

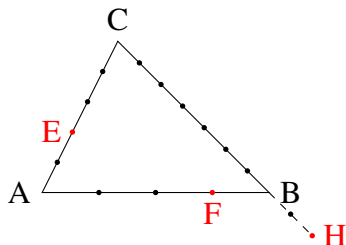
et :

$$a_2 = \frac{3 + 11}{14} = 1.$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On a la figure suivante :



- $\vec{EC} = \frac{3}{5}\vec{AC}$ donc $\vec{CE} = \frac{3}{5}\vec{CA}$ (il est plus simple de partir d'un point que l'on connaît (ici, le point C) pour construire le point E).
- $\vec{CH} = -\frac{9}{7}\vec{BC}$ donc $\vec{CH} = \frac{9}{7}\vec{CB} = \vec{CB} + \frac{2}{7}\vec{CB}$.

2
$$\begin{aligned} \vec{EF} &= \vec{EC} + \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{BF} \\ &= \frac{3}{5}\vec{AC} - \vec{AC} + \vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AB} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{EF} = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{2}{5}\vec{AC}}$$

3
$$\begin{aligned} \vec{EH} &= \vec{EC} + \vec{CH} \\ &= \frac{3}{5}\vec{AC} + \frac{9}{7}\vec{CB} \\ &= \frac{3}{5}\vec{AC} + \frac{9}{7}(\vec{CA} + \vec{AB}) \\ &= \frac{3}{5}\vec{AC} - \frac{9}{7}\vec{AC} + \frac{9}{7}\vec{AB} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{EH} = \frac{9}{7}\vec{AB} - \frac{24}{35}\vec{AC}}$$

4 Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$, on a :

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{24}{35} \end{pmatrix}.$$

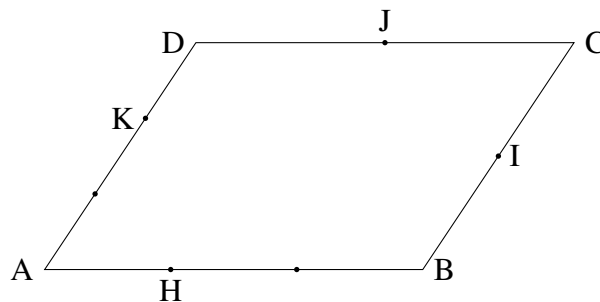
$$\frac{3}{4} \times \left(-\frac{24}{35}\right) - \frac{9}{7} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{18}{35} + \frac{18}{35} = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont colinéaires ; ils ont un point en commun (E), donc les points E, F et H sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 La figure est la suivante :



$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BI} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KJ} &= \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DJ} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$$

3 Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$, on a :

$$\overrightarrow{HI} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} \neq 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ ne sont pas colinéaires.

Les droites (HI) et (KJ) ne sont donc pas parallèles.

■ **Corrigé de l'exercice 5.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $A(-1;2)$ et $B(3;-7)$, donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ -7 - 2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff -9(x+1) - 4(y-2) = 0 \\ &\iff -9x - 4y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $9x + 4y + 1 = 0$.

2 $A(3;-2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff 1(x-3) - 2(y+2) = 0 \\ &\iff x - 2y - 7 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $x - 2y - 7 = 0$.

3 $A(5;-4)$ et (AB) est parallèle à la droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.

La droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (AB) est parallèle à cette droite, donc $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (AB). Donc :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y+4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff 1(x-5) - (-1)(y+4) = 0 \\ &\iff x + y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $x + y - 1 = 0$.

4 $A(3;2)$ et (AB) a pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, où m est le coefficient directeur de la droite.

Donc un vecteur directeur de (AB) est ici $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (AB) &\iff \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff -\frac{1}{2}(x-3) - 1(y-2) = 0 \\ &\iff -\frac{1}{2}x - y + \frac{7}{2} = 0 \\ &\iff x + 2y - 7 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (AB) est donc $x + 2y - 7 = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La droite est parallèle à l'axe des abscisses lorsqu'un vecteur directeur est de la forme $\vec{u} \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Or, on sait que la droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Ainsi, il faut que $m = 0$ pour que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

- 2 La droite est parallèle à l'axe des ordonnées lorsqu'un vecteur directeur est de la forme $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

D'après ce que l'on a dit dans la question précédente, il faut donc que $1 - 2m = 0$, soit $m = \frac{1}{2}$.

Ainsi, il faut que $m = \frac{1}{2}$ pour que $\mathcal{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées.

- 3 Posons $A(x_A; y_A)$ le point fixe. Ainsi, $A \in \mathcal{D}_0$ et $A \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$ (on prend les valeurs de m précédemment trouvées par exemple).

$\mathcal{D}_0 : y = 4$. Donc $y_A = 4$.

$\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} : x = -8$. Donc $x_A = -8$.

Le point fixe est donc $A(-8; 4)$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D} &\iff m^2 x_A - (2m - 1)y_A + 3 = 0 \\ &\iff m^2 - (2m - 1)m + 3 = 0 \\ &\iff m^2 - 2m^2 + m + 3 = 0 \\ &\iff -m^2 + m + 3 = 0 \\ &\iff m^2 - m - 3 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $m^2 - m - 3$ est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 13 > 0$$

donc il admet deux racines :

$$m_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ces deux valeurs sont les deux valeurs de m pour lesquelles $A \in \mathcal{D}$.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 - 2 \\ 2 - (-1) \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$-2 \times 3 - 1 \times (-6) = -6 + 6 = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

2 $\overrightarrow{OC}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{OD}\left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. De plus,

$$2 \times 2 - (-1) \times (-4) = 4 - 4 = 0.$$

Donc, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et par conséquent, O, C et D sont alignés.

O appartient donc à la droite (CD).

3
$$BM = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$$

De même, $CM = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$.

Δ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $BM = CM$.

$$\begin{aligned} BM = CM &\iff BM^2 = CM^2 && \text{car } BM > 0 \text{ et } CM > 0 \\ &\iff (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \\ &\iff -2x - 4y + 5 = -4x + 2y + 5 \\ &\iff 2x - 6y = 0 \\ &\iff y = \frac{1}{3}x. \end{aligned}$$

Un équation de Δ est donc $y = \frac{1}{3}x$.

$$O \in \Delta \text{ car } 0 = \frac{1}{3} \times 0 \text{ et } A \in \Delta \text{ car } y_A = \frac{1}{3}x_A \text{ (} 1 = \frac{1}{3} \times 3 \text{)}.$$

Donc Δ est la droite (OA).

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

Dans ce repère, on a : $A(0; 0)$; $B(1; 0)$; $H(3; 1)$; $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; $E(2; 0)$.

Ainsi, la droite (AH) a pour coefficient directeur $\frac{1}{3}$ et donc, son équation est :

$$(AH) \quad : \quad y = \frac{1}{3}x.$$

Par conséquent, $J(1; \frac{1}{3})$. Donc,

$$\overrightarrow{EJ}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EI}\left(\begin{smallmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right).$$

$$-1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires, ce qui implique que E, I et J sont alignés.

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Les variables peuvent représenter les coordonnées des points A, B et C.

Par exemple, on peut décider de dire que $A(a;b)$, $B(c;d)$ et $C(e;f)$.

2 D'après le titre de l'algorithme, il sert à tester si A, B et C sont alignés.

Or, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} e-a \\ f-b \end{pmatrix}$. Ainsi, les points A, B et C sont alignés si ces deux vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si :

$$(c-a)(f-b) - (d-b)(e-a) = 0.$$

L'algorithme complété est donc :

Algorithme 4: Tester l'alignement de trois points (complété)

Entrées

a, b, c, d, e, f sont des nombres réels
d est un nombre

Initialisation

Saisir la valeur de a, b, c, d, e, f

Traitement

d prend la valeur $(c-a)(f-b) - (d-b)(e-a)$

Si $d = 0$ alors

Afficher : « les points A, B et C **sont alignés** »

sinon

Afficher : « Les points A, B et C **ne sont pas alignés** »

Fin du Si

Produit scalaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

Produit scalaire : définitions

■ Exercice 1. Produits scalaires et angles

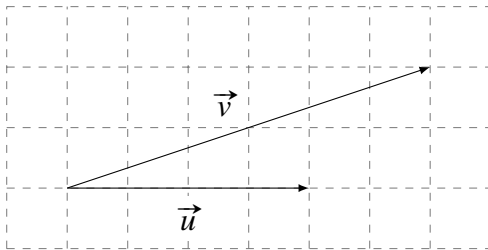
★★★★★

A

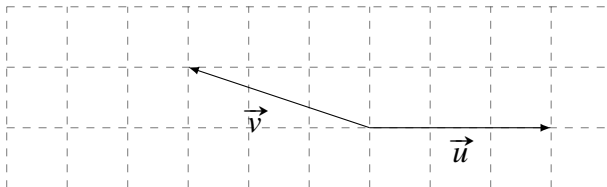
Corrigé page 144

Dans chacun des cas suivants, déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis en déduire l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

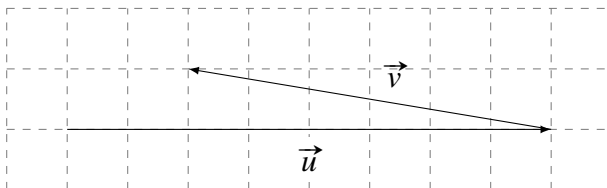
1



2



3



■ Exercice 2. Produits scalaires et angles dans un repère orthonormé

★★★★★

A

Corrigé page 145

Dans chacun des cas suivants, déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis en déduire l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

■ Exercice 3. Angle dans un carré

★★★★☆ R

Corrigé page 146

Soit ABCD un carré. On considère alors I le milieu de [CD] et le point J défini par $\vec{CJ} = \frac{1}{4}\vec{CB}$.

Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$ au degré près.

Applications du produit scalaire

■ Exercice 4. Équations de cercles

★★★★☆ A

Corrigé page 147

Dans chacun des cas suivants, donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

- 1 $\mathcal{C}$ a pour centre le point $A(-1; 2)$ et pour rayon 2.
- 2 $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [AB], où $A(2; -1)$ et $B(-2; 3)$.
- 3 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(4; 3)$ tangent au cercle $\mathcal{C}'$ d'équation $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

■ Exercice 5. Équation de droites perpendiculaires

★★★★☆ A

Corrigé page 147

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

- 1 $A(-1; 2)$, $B(4; -3)$ et $\mathcal{D}$ est la médiatrice de [AB].
- 2 $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(1; 3)$ et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.
- 3 $\mathcal{D}$ est la tangente au cercle de centre O et de rayon 3 passant par le point d'abscisse 2.
- 4 $\mathcal{D}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et passe par le point $A(-1; 2)$.

■ Exercice 6. Détermination d'un angle dans un cercle

★★★★☆ R

Corrigé page 148

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2; 0)$ et de rayon 2 et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $B(18; 0)$ et de rayon 14.

Soit (d) la droite passant par O et faisant un angle de 30° avec l'axe des abscisses; elle coupe $\mathcal{C}'$ en deux points I et J, J étant le point le plus éloigné de O.

On considère les points $E(4; 0)$ et $F(32; 0)$. On s'intéresse à la mesure de l'angle $\widehat{JEF}$.

- 1 Déterminer une équation de la droite (d) .
- 2 Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}'$.
- 3 En déduire les coordonnées de J.
- 4 Calculer $\vec{EF} \cdot \vec{EJ}$, puis en déduire une mesure de $\widehat{JEF}$ en degrés.

■ Exercice 7. Dans un rectangle

★★★★☆ (R)

Corrigé page 149

ABCD est un rectangle tel que $AB = 1$.

R est le milieu de [DA]. On sait que (BR) et (AC) sont perpendiculaires.

Quelle est la mesure de AD ?

■ Exercice 8. Avec les formules trigonométriques

★★★★☆ (A)

Corrigé page 150

À l'aide des formules trigonométriques d'addition et de duplication, calculer :

1 $\cos \frac{7\pi}{12}$

2 $\sin \frac{\pi}{12}$

3 $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$

4 $\sin \frac{\pi}{24}$

■ Exercice 9. Dans un repère : cercle, angle et hauteur

★★★★☆ (R)

Corrigé page 151

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(0;4)$, $B(3;6)$ et $C(6;0)$.

Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B.

1 Déterminer les coordonnées de H.

2 Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BH].

3 On appelle E et F les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec respectivement [AB[et]BC].

Le triangle EFH est-il rectangle en H ?

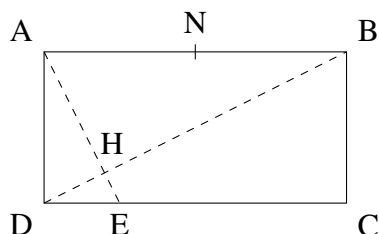
Dans la négative, donner une mesure approchée au degré près de $\widehat{EHF}$.

■ Exercice 10. Dans un rectangle

★★★★☆ (R)

Corrigé page 154

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$. E est le point de [DC] tel que $DE = 1$. Les droites (AE) et (BD) se coupent en H et N est le milieu de [AB].



1 Décomposer $\vec{AE}$ et $\vec{BD}$ à l'aide de la relation de Chasles, puis calculer $\vec{AE} \cdot \vec{BD}$.

Que peut-on conclure quant à (AE) et (BD) ?

2 En calculant de deux façons différentes $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$, trouver BH.

3 Montrer que $\vec{HA} + \vec{HB} = 2\vec{HN}$.

4 Calculer HA, puis montrer que $\vec{HN} \cdot \vec{HA} = \frac{8}{5}$.

5 Justifier que $HN = 2$.

6 Calculer $\cos \widehat{AHN}$ et en déduire une valeur approchée de $\widehat{AHN}$ au degré près.

■ Exercice 11. Puissance d'un point par rapport à un cercle

★★★★☆ R

Corrigé page 156

Dans le plan, on considère un point M et un cercle Γ , de centre O et de rayon r .

Soit d une droite passant par M et coupant Γ en deux points A et B.

On appelle *puissance de M par rapport à Γ* le nombre :

$$\mathcal{P}_{\Gamma}(M) = OM^2 - r^2$$

1 En considérant le projeté orthogonal de O sur (AB), c'est-à-dire le point H de (AB) telle que $(OH) \perp (AB)$, montrer que :

- si M est à l'extérieur de Γ alors $MA \times MB = \mathcal{P}_{\Gamma}(M)$;
- sinon, $MA \times MB = -\mathcal{P}_{\Gamma}(M)$

2 On considère un cercle Γ' , de centre O' distinct de O, et de rayon r' . Soit M un point tel que $\mathcal{P}_{\Gamma}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M)$.

a. Soient K le projeté orthogonal de M sur (OO') et I le milieu de $[OO']$.

Après avoir justifié que $r^2 - r'^2 = MO^2 - MO'^2$, montrer que $r^2 - r'^2 = 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IK}$.

b. Déterminer alors l'ensemble des points M.

Cet ensemble est appelé l'*axe radical des deux cercles*.

3 Soit Γ'' un troisième cercle de centre O'' tel que O'' n'appartient pas à (OO') .

Montrer que les trois axes radicaux sont concourants en vous aidant de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle.

■ Exercice 12. Trois cercles tangents

★★★★☆ R

Corrigé page 158

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.

1 Donner son rayon et les coordonnées de son centre A.

On considère maintenant le cercle $\mathcal{C}'$ de centre C, dont le rayon est le double de celui de $\mathcal{C}$ et qui est tangent à $\mathcal{C}$ au point B(5;2).

2 Donner l'équation de $\mathcal{C}'$.

On souhaite maintenant construire un cercle $\mathcal{C}_1$ dont le diamètre est le triple de celui de $\mathcal{C}$ et qui est tangent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On appelle D le centre de $\mathcal{C}_1$ de sorte que son ordonnée soit positive.

3 Expliquer pourquoi $AD = 8$ et $CD = 10$.

4 Calculer alors les coordonnées de D.

5 Donner alors une équation cartésienne de $\mathcal{C}_1$.

On appelle E le point d'intersection de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$, et F celui de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$.

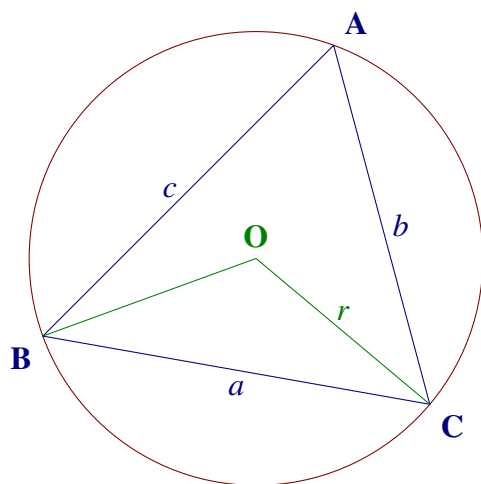
6 Les droites (AE), (CF) et (DB) sont-elles concourantes ?

■ Exercice 13. Aire d'un triangle inscrit dans un cercle

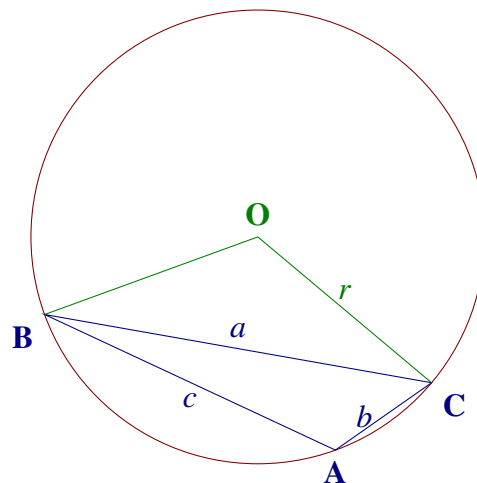
★★★★☆ R

Corrigé page 161

On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r .
On note $\hat{A} = \widehat{BAC}$.



Cas 1



Cas 2

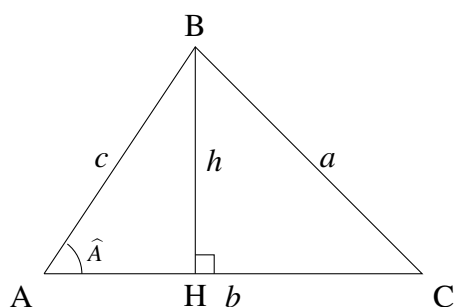
- 1 Montrer que, dans le cas 1 comme dans le cas 2, on a : $\frac{a}{2} = r \sin \hat{A}$.
- 2 En déduire que : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r$.
- 3 En déduire que l'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{abc}{4r}$.

■ Exercice 14. La formule de Héron

★★★★☆ R

Corrigé page 161

Soit un triangle ABC, et H le pied de la hauteur issue du sommet B. On note $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et $BH = h$.



- 1 Exprimer h en fonction de c et $\sin \hat{A}$, puis en déduire que l'aire du triangle ABC est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$.
- 2 À l'aide de la formule d'Al-Kashi, exprimer $\sin^2 \hat{A}$ en fonction de a , b et c .

- 3 En notant $p = \frac{a+b+c}{2}$, montrer alors que : $\sin^2 \hat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$.
- 4 En déduire alors que : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
Cette dernière formule est appelée la *formule de Héron*.
- 5 Application : calculer l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour mesure 7 cm, 12 cm et 9 cm.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 6 = 24.$

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = 2\sqrt{10}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 4$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{24}{8\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

et donc :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 18^\circ.$$

2 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-3) = -9.$

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 3$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-9}{3\sqrt{10}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

et donc :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \approx 162^\circ.$$

3 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \times (-6) = -48$ (les deux vecteurs sont de sens contraires donc leur produit scalaire est négatif).

On sait de plus que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$; ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

On a :

$$\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + 6^2 = 37 \quad \text{soit} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{37}.$$

De plus, $\|\vec{u}\| = 8$, donc :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{-48}{8\sqrt{37}} = \frac{-6\sqrt{37}}{37}$$

et donc :

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx 171^\circ.}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = (-1) \times 3 + 2 \times (-5) = -13.$$

Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-13}{\sqrt{5} \times \sqrt{34}} = \frac{-13}{\sqrt{170}},$$

soit :

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx 177^\circ.}$$

2 $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 3 \times 5 + 4 \times 6 = 39.$$

Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{39}{5 \times \sqrt{61}},$$

soit :

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx 3^\circ.}$$

3 $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 10.$$

Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{10}{2 \times \sqrt{26}},$$

soit :

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx 11^\circ.}$$

4 $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

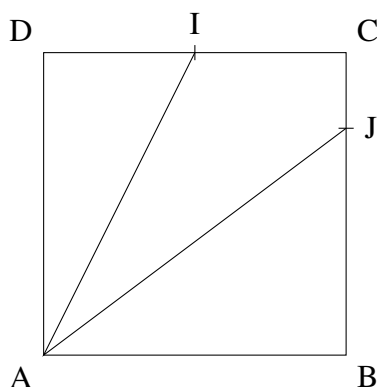
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = -2.$$

Ainsi,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-1}{\sqrt{26}},$$

soit :

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) \approx 101^\circ.}$$



Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$, on a :

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors, d'une part :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = xx' + yy' = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

et d'autre part :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AJ}\| \times \cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}).$$

Or, dans le triangle ADI rectangle en D, on a :

$$AI^2 = 1^2 + \frac{1^2}{2^2} = \frac{5}{4} \quad \text{soit} \quad AI = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

et dans le triangle ABJ rectangle en B, on a :

$$AJ^2 = 1^2 + \frac{3^2}{4^2} = \frac{25}{4} \quad \text{soit} \quad AJ = \frac{5}{2}.$$

Donc :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{5}{4} \times \cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}).$$

Ainsi, on a :

$$\cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}) = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{16}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

soit :

$$\boxed{(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AJ}) \approx 27^\circ}$$

N.B. Pour être précis, on trouve un angle de mesure $26,57^\circ$, mais donner une approximation décimale pour une mesure d'angle est à mon avis une incohérence monumentale car un angle s'exprime en base sexagésimale (en base 60) et donc, les décimaux n'ont pas leur place ici (comme pour les heures). Il faudrait donc ici donner l'approximation :

$$26^\circ + 0,57 \times 60' = 26^\circ 34' + 0,2 \times 60 = 26^\circ 34' 12''.$$

■ **Corrigé de l'exercice 4.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $\mathcal{C}$ a pour centre le point $A(-1; 2)$ et pour rayon 2.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff (x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \\ &\iff x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donc $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

- 2 $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$, où $A(2; -1)$ et $B(-2; 3)$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x-2)(x+2) + (y+1)(y-3) = 0 \\ &\iff x^2 - 4 + y^2 - 3y + y - 3 = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donc $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.

- 3 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $A(4; 3)$ tangent au cercle $\mathcal{C}'$ d'équation $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

$\mathcal{C}'$ a pour centre le point $B(1; 2)$ d'après son équation.

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents donc le rayon de $\mathcal{C}$ est $r = AB - 1$ (« 1 » étant le rayon de $\mathcal{C}'$).

$$AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \text{donc} \quad r = \sqrt{10} - 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff (x-4)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{10} - 1)^2 \\ &\iff x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10 - 2\sqrt{10} + 1 \\ &\iff x^2 + y^2 - 8x - 6y + 14 + 2\sqrt{10} = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donc $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 14 + 2\sqrt{10} = 0$.

■ **Corrigé de l'exercice 5.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $A(-1; 2)$, $B(4; -3)$ et $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AB]$.

On a donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le milieu de $[AB]$ est $I(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 5 \left(x - \frac{3}{2} \right) - 5 \left(y + \frac{1}{2} \right) = 0 \\ &\iff 5x - 5y - 10 = 0 \\ &\iff x - y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $x - y + 2 = 0$.

- 2 $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A(1;3)$ et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}'$, soit par exemple $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Ainsi, une équation de $\mathcal{D}$ est de la forme :

$$-5x - 2y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$A(1;3) \in \mathcal{D} \iff -5 \times 1 - 2 \times 3 + c = 0 \iff c = 11.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $5x + 2y - 11 = 0$.

- 3 $\mathcal{D}$ est la tangente au cercle de centre O et de rayon 3 passant par le point d'abscisse 2.

Dans ce cas, $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à (OA), où A est le point du cercle d'abscisse 2. Son ordonnée est $y = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ donc $A(2; \sqrt{5})$.

Ainsi, (OM) a pour équation $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, ou encore $\frac{\sqrt{5}}{2}x - y = 0$, dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{n}$ car elle est perpendiculaire à (OM) donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est :

$$-x - \frac{\sqrt{5}}{2}y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$A \in \mathcal{D} \iff -2 - \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} + c = 0 \iff c = \frac{9}{2}.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $2x + \sqrt{5}y - 9 = 0$.

- 4 $\mathcal{D}$ a pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passe par le point $A(-1;2)$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathcal{D} &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 2(x+1) - 1(y-2) = 0 \\ &\iff 2x - y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc $2x - y - 4 = 0$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le coefficient directeur de (d) est le nombre $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ car (d) forme un angle de 30° avec l'axe des abscisses. De plus, elle passe par l'origine du repère donc c'est une droite représentant une fonction linéaire.

Ainsi, une équation de (d) est : $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

- 2 L'équation du $\mathcal{C}'$ est de la forme $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$ où $(a;b)$ sont les coordonnées de son centre et r son rayon.

Ainsi, $\mathcal{C}'$ a pour équation : $\boxed{(x-18)^2 + y^2 = 196}$

- 3 Notons $(x;y)$ les coordonnées d'un point d'intersection de (d) avec $\mathcal{C}'$; alors, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ et

$(x-18)^2 + y^2 = 196$, donc $(x-18)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 = 196$, soit $\frac{4}{3}x^2 - 36x + 128 = 0$, ou encore, en multipliant par $\frac{3}{4}$: $x^2 - 27x + 96 = 0$.

Le discriminant du polynôme $x^2 - 27x + 96$ est $\Delta = (-27)^2 - 4 \times 1 \times 96 = 345$ donc ses deux racines sont :

$$x_1 = \frac{27 - \sqrt{345}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{27 + \sqrt{345}}{2}.$$

L'abscisse de J est donc $\frac{27 + \sqrt{345}}{2}$ (le point le plus éloigné de O). Son ordonnée est donc $\frac{27 + \sqrt{345}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3} + \sqrt{1035}}{6}$.

Ainsi, $\boxed{J\left(\frac{27 + \sqrt{345}}{2}; \frac{27\sqrt{3} + \sqrt{1035}}{6}\right)}$

- 4 $\vec{EJ}\left(\frac{19 + \sqrt{345}}{2}; \frac{27\sqrt{3} + \sqrt{1035}}{6}\right)$ et $\vec{EF}\begin{pmatrix} 28 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{EF} \cdot \vec{EJ} = xx' + yy' = \frac{19 + \sqrt{345}}{2} \times 28 = 14(19 + \sqrt{345})$.

Or, $\vec{EF} \cdot \vec{EJ} = \|\vec{EF}\| \times \|\vec{EJ}\| \times \cos(\vec{EF}, \vec{EJ})$, donc :

$$\cos(\vec{EF}, \vec{EJ}) = \frac{14(19 + \sqrt{345})}{28 \times \sqrt{\left(\frac{19 + \sqrt{345}}{2}\right)^2 + \left(\frac{27\sqrt{3} + \sqrt{1035}}{6}\right)^2}}$$

On en déduit alors que $\widehat{JEF} \approx 35^\circ$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons x la longueur AD.

Dans le repère $(A; \vec{AB}; \frac{1}{x}\vec{AD})$, on a :

$$\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{BR}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\vec{AC} \cdot \vec{BR} = 0 \iff -1 + \frac{x^2}{2} = 0$

$$\iff \frac{x^2}{2} = 1$$

$$\iff x^2 = 2$$

$$\iff x = \sqrt{2} \quad \text{car } x > 0.$$

Ainsi, AD = $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 1 \quad \cos \frac{7\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\
 \boxed{\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\
 \boxed{\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \cos \frac{\pi}{4} &= \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \\
 \frac{\sqrt{2}}{2} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \\
 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \sin^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\
 \boxed{\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}} &\quad \text{car } \frac{\pi}{8} \in [0; \pi] \text{ donc } \sin \frac{\pi}{8} > 0.
 \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \frac{\pi}{8} &= 1 - \sin^2 \frac{\pi}{8} \\
 \cos^2 \frac{\pi}{8} &= 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\
 \cos^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\
 \boxed{\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} &\quad \text{car } \cos \frac{\pi}{8} > 0.
 \end{aligned}$$

4 Nous allons ici utiliser le fait que :

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 \quad \text{donc} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{12}}$$

et que :

$$\cos \left(2 \times \frac{\pi}{24} \right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(2 \times \frac{\pi}{24} \right) \\ \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{12}} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} \quad \text{d'après la question 2} \\ \sqrt{1 - \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} \\ \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{3}}{16}} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} \\ \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} \\ \sin^2 \frac{\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \right) \\ \sin^2 \frac{\pi}{24} &= \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}{4} \\ \boxed{\sin \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}} & \quad \text{car } \sin \frac{\pi}{24} > 0.\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}1 \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} &= 0 \iff \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_H - 3 \\ y_H - 6 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 6(x_H - 3) - 4(y_H - 6) = 0 \\ &\iff 6x_H - 4y_H + 6 = 0 \\ &\iff 3x_H - 2y_H + 3 = 0 \quad (1)\end{aligned}$$

De plus, on sait que $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} &\iff -4x_H - 6(y_H - 4) = 0 \\ &\iff -4x_H - 6y_H + 24 = 0 \\ &\iff 2x_H + 3y_H - 12 = 0 \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On a alors : } \begin{cases} 3x_H - 2y_H + 3 = 0 & (1) \\ 2x_H + 3y_H - 12 = 0 & (2) \end{cases} &\iff \begin{cases} 6x_H - 4y_H + 6 = 0 & 2 \times (1) \rightarrow L_1 \\ 6x_H + 9y_H - 36 = 0 & 3 \times (2) \rightarrow L_2 \end{cases} \\ &\implies 13y_H - 42 = 0 \quad L_2 - L_1 \\ &\implies y_H = \frac{42}{13} \\ &\implies 2x_H = 12 - 3 \times \frac{42}{13} \quad \text{d'après (2)} \\ &\implies x_H = 6 - \frac{63}{13} = \frac{15}{13}\end{aligned}$$

Ainsi, $H\left(\frac{15}{13}; \frac{42}{13}\right)$.

2 $M(x;y) \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 3-x \\ 6-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{15}{13}-x \\ \frac{42}{13}-y \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (3-x)\left(\frac{15}{13}-x\right) + (6-y)\left(\frac{42}{13}-y\right) = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} = 0$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donc $x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} = 0$.

- 3 • Déterminons d'abord les coordonnées $(x;y)$ du point E, intersection de $\mathcal{C}$ et $[AB[$.

$E(x;y) \in [AB[\iff \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix} x & 3 \\ y-4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2x - 3y + 12 = 0$$

$$\iff x = \frac{3}{2}y - 6$$

De plus, $E \in \mathcal{C}$ donc :

$$x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} = 0$$

$$\iff \left(\frac{3}{2}y - 6\right)^2 + y^2 - \frac{54}{13}\left(\frac{3}{2}y - 6\right) - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} = 0$$

$$\iff 169y^2 - 1740y + 4356 = 0$$

$$\iff y = \frac{726}{169} \quad \text{ou} \quad y = 6$$

Or, $E \neq B$ donc $y = \frac{726}{169}$ et donc $x = \frac{3}{2} \times \frac{726}{169} - 6 = \frac{75}{169}$.

Ainsi, $E\left(\frac{75}{169}; \frac{726}{169}\right)$.

- Déterminons ensuite les coordonnées $(x;y)$ du point F, intersection de $\mathcal{C}$ et $]BC]$.

$F(x;y) \in]BC] \iff \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y-6 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -6(x-3) - 3(y-6) = 0$$

$$\iff -6x - 3y + 36 = 0 \quad \iff y = 12 - 2x$$

De plus, $F \in \mathcal{C}$ donc :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}y + \frac{297}{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (12 - 2x)^2 - \frac{54}{13}x - \frac{120}{13}(12 - 2x) + \frac{297}{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow 65x^2 - 438x + 729 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ou} \quad x = \frac{243}{65} \end{aligned}$$

Or, $F \neq B$ donc $x = \frac{243}{65}$, et donc $y = 12 - 2 \times \frac{243}{65} = \frac{294}{65}$.

Ainsi, $F\left(\frac{243}{65}; \frac{294}{65}\right)$.

- Regardons alors si (HE) et (HF) sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HF} &= \left(\frac{75}{169} - \frac{15}{13}\right) \cdot \left(\frac{243}{65} - \frac{15}{13}\right) \\ &= \left(-\frac{120}{169}\right) \cdot \left(\frac{168}{65}\right) \\ &= -\frac{120}{169} \times \frac{168}{65} + \frac{180}{169} \times \frac{84}{65} \\ &= -\frac{1008}{2197} \\ \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HF} &\neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le triangle EHF n'est pas rectangle en F.

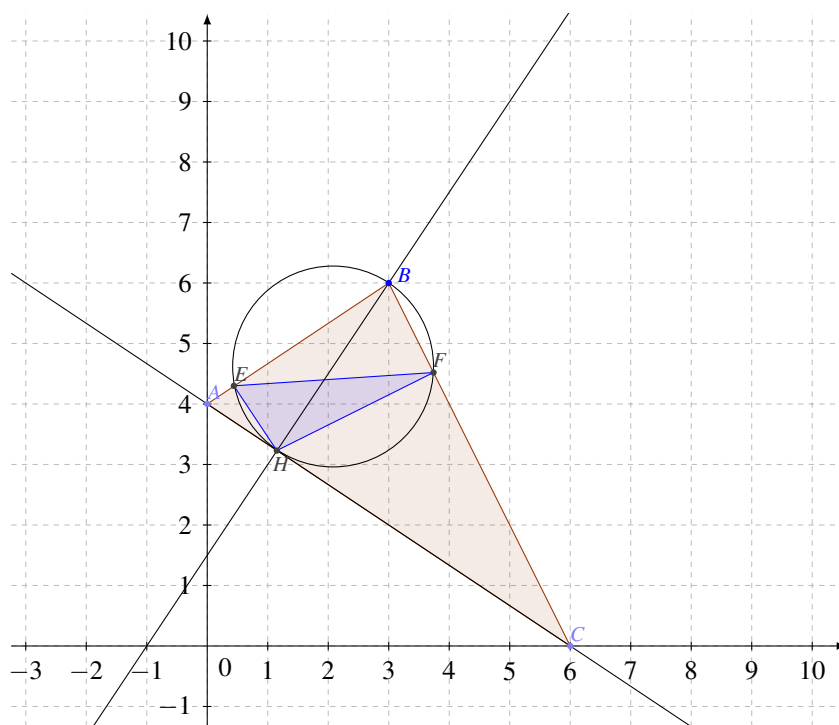
- $\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HF} = \|\overrightarrow{HE}\| \times \|\overrightarrow{HF}\| \times \cos(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF})$

$$-\frac{1008}{2197} = \sqrt{\left(-\frac{120}{169}\right)^2 + \left(\frac{180}{169}\right)^2} \times \sqrt{\left(\frac{168}{65}\right)^2 + \left(\frac{84}{65}\right)^2} \times \cos(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF})$$

$$\cos(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF}) = \frac{-\frac{1008}{2197}}{\sqrt{\left(-\frac{120}{169}\right)^2 + \left(\frac{180}{169}\right)^2} \times \sqrt{\left(\frac{168}{65}\right)^2 + \left(\frac{84}{65}\right)^2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF}) \approx 0,124$$

$(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF}) \approx 97^\circ$



■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad \vec{AE} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CD}) \\
 &= \vec{AD} \cdot \vec{BC} + \vec{AD} \cdot \vec{CD} + \vec{DE} \cdot \vec{BC} + \vec{DE} \cdot \vec{CD} \\
 &= \vec{AD} \cdot \vec{AD} + 0 + 0 + \vec{DE} \cdot \vec{CD} \\
 &= \|\vec{AD}\|^2 + \|\vec{DE}\| \times \|\vec{CD}\| \times \cos \pi \\
 &= 4 - 1 \times 4
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{AE} \cdot \vec{BD} = 0}$$

On en déduit alors que (AE) et (BD) sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned}
 2 \quad \vec{BA} \cdot \vec{BD} &= BH \times BD \\
 &= BH \times \sqrt{4^2 + 2^2} \quad (\text{Théorème de Pythagore dans BAD rectangle en A}) \\
 &= BH \times 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

De plus, on a aussi :

$$\begin{aligned}
 \vec{BA} \cdot \vec{BD} &= BA \times BD \times \cos \widehat{ABD} \\
 &= BA \times BD \times \frac{AB}{BD} \quad (\text{en se plaçant dans le triangle rectangle ABD}) \\
 &= AB^2 \\
 &= 16.
 \end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$2\sqrt{5}BH = 16$$

soit

$$\boxed{BH = \frac{8\sqrt{5}}{5}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{3} \quad \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} &= (\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{NA}) + (\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{NB}) \\
 &= 2\overrightarrow{HN} + (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}) \\
 &= 2\overrightarrow{HN} + \vec{0} \quad (\text{car N est le milieu de [AB]})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{HN}}$$

$$\text{4} \quad HA^2 = AB^2 - HB^2 \quad (\text{théorème de Pythagore dans le triangle AHB rectangle en H})$$

$$HA^2 = 16 - \frac{64}{5}$$

$$HA^2 = \frac{16}{5}$$

$$HA = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{HA = \frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AN}) \cdot \overrightarrow{HA} \\
 &= \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{HA} \\
 &= \frac{16}{5} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AH} \\
 &= \frac{16}{5} - 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \cos \widehat{HAN} \\
 &= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{AH}{AB} \quad (\text{dans le triangle HAB rectangle en H}) \\
 &= \frac{16}{5} - \frac{8\sqrt{5}}{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{16}{5} - \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} = \frac{8}{5}}$$

- 5 Dans le triangle BAH rectangle en H, [HN] est la médiane issue du sommet de l'angle droit, donc :

$$HN = \frac{1}{2}AB \quad \text{soit} \quad \boxed{HN = 2}$$

6 $\overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} = HN \times HA \times \cos \widehat{AHN}$

$$\frac{8}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \cos \widehat{AHN} \quad (\text{d'après la question 4})$$

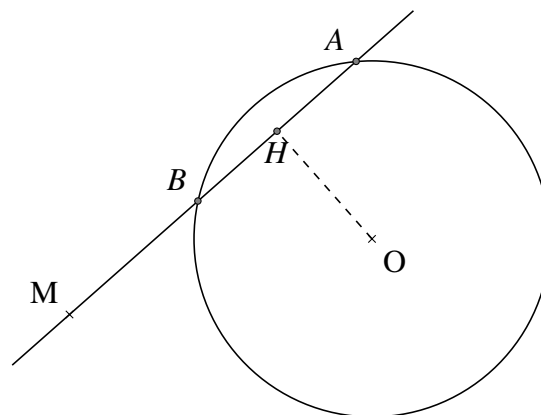
$$\cos \widehat{AHN} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{\widehat{AHN} \approx 63^\circ}$$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 On considère le point H, projeté orthogonal de O sur (AB).



Ainsi, H est le milieu de [AB] (car AOB est isocèle en O et dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principale est la médiatrice du côté opposé). Donc :

$$\overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA}$$

Nous allons calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) \\ &= MH^2 - HA^2\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$MH^2 = OM^2 - OH^2 \quad \text{et} \quad HA^2 = OA^2 - OH^2 = r^2 - OH^2$$

donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= MH^2 - HA^2 \\ &= OM^2 - OH^2 - r^2 + OH^2 \\ &= OM^2 - r^2 \\ &= \mathcal{P}(M)\end{aligned}$$

Ainsi,

- si M est à l'extérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \times MB = \mathcal{P}(M)$$

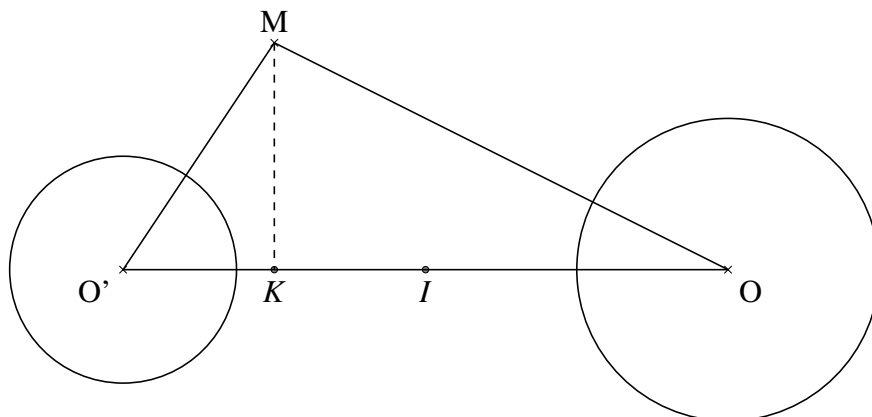
car A et B sont du même côté par rapport à M.

- Si M est à l'intérieur du cercle,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \times MB = \mathcal{P}(M)$$

car A et B sont de part et d'autre de M.

2 Avant tout, faisons un schéma :



a. M est tel que $\mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M)$ donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\Gamma(M) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(M) &\iff OM^2 - r^2 = O'M^2 - r'^2 \\ &\iff OM^2 - O'M^2 = r^2 - r'^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi, } r - r'^2 &= MO^2 - MO'^2 \\
&= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{MO'}^2 \\
&= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MO'}) \\
&= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{O'O} \\
&= 2\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{O'O} \text{ car K est le projeté orthogonal de M sur (OO')}
\end{aligned}$$

$$\boxed{r - r' = 2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IK}}$$

b. Il existe un unique point K tel que :

$$2\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{IK} = r^2 - r'^2$$

D'après la question précédente, l'ensemble des points M ayant les mêmes puissances par rapport aux deux cercles est la droite perpendiculaire à (OO') passant par K.

c. Notons :

- d_1 l'axe radical de Γ et Γ' ;
- d_2 l'axe radical de Γ et Γ'' ;
- d_3 l'axe radical de Γ' et Γ'' .

$O'' \notin (OO')$ donc d_1 et d_2 sont sécantes. Appelons J leur intersection. Par définition des deux droites,

$$\mathcal{P}_{\Gamma}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma'}(J) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\Gamma}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(J)$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{\Gamma'}(J) = \mathcal{P}_{\Gamma''}(J)$, et donc $J \in d_3$.

J est donc le point de concours de d_1 , d_2 et d_3 .

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
\boxed{1} \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 &\iff (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y) = 0 \\
&\iff (x - 3)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0 \\
&\iff (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}$ a pour rayon $r = 2$ et pour centre $A(3;2)$.

2 En faisant une figure, on voit que $C(9;2)$, donc une équation de $\mathcal{C}'$ est :

$$(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 4^2.$$

Une équation de $\mathcal{C}'$ est alors $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = 0$.

3 $\mathcal{C}_1$ est tangent à $\mathcal{C}$; notons T_1 leur point d'intersection.

Alors, $AD = AT_1 + DT_1 = 2 + 3 \times 2 = 8$.

De même, $CD = 4 + 6 = 10$.

4 Notons $D(x;y)$.

- $AD^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$ et $AD^2 = 8^2 = 64$ donc $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 64$, soit $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 51$ (1).
- $CD^2 = (x - 9)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 18x - 4y + 85$ et $CD^2 = 10^2 = 100$ donc $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 85 = 100$, soit $x^2 + y^2 - 18x - 4y = 15$ (2).

Ainsi, $(1) - (2) \iff 12x = 36 \iff x = 3$.

Or, $AD = 8$ donc $y = 8 + y_A = 8 + 2 = 10$.

Ainsi, $D(3;10)$.

$$\begin{aligned}
5 \quad M \in \mathcal{C}_1 &\iff (x-3)^2 + (y-10)^2 = 6^2 \\
&\iff x^2 + y^2 - 6x - 20y + 109 = 36 \\
&\iff x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}_1$ est alors $x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0$.

$$\begin{aligned}
6 \quad \bullet \mathcal{C}' &: x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = 0 \\
\bullet \mathcal{C}_1 &: x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(x; y) \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' &\iff x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0 \\
&\iff 12x - 16y + 4 = 0 \\
&\iff 3x - 4y + 1 = 0 \\
&\iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

En remplaçant y dans l'équation de $\mathcal{C}'$ (par exemple), on obtient :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 18x - 4y + 69 = 0 &\iff x^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right)^2 - 18x - 4\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right) + 69 = 0 \\
&\iff x^2 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{16} - 18x - 3x - 1 + 69 = 0 \\
&\iff \frac{25}{16}x^2 - \frac{165}{8}x + 68 = 0 \\
&\iff 25x^2 - 330x + 1089 = 0
\end{aligned}$$

$$\Delta = (-330)^2 - 4 \times 25 \times 1089 = 0.$$

donc l'équation admet une unique solution :

$$x = \frac{330}{50} = \frac{33}{5}.$$

$$\text{Ainsi, } y = \frac{3}{4} \times \frac{33}{5} + \frac{1}{4} = \frac{26}{5}.$$

$$\text{On a alors } E\left(\frac{33}{5}; \frac{26}{5}\right).$$

$$\begin{aligned}
\bullet \mathcal{C} &: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \quad (E_1) \\
\bullet \mathcal{C}_1 &: x^2 + y^2 - 6x - 20y + 73 = 0 \quad (E_2)
\end{aligned}$$

En faisant $(E_1) - (E_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
F(x; y) \in \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' &\iff 16y = 64 \\
&\iff y = 4.
\end{aligned}$$

On obtient alors $F(2; 4)$.

$$\overrightarrow{AE}\left(\frac{33}{5} - 3, \frac{26}{5} - 2\right), \text{ soit } \overrightarrow{AE}\left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}\right). \text{ Donc une équation de (AF) est de la forme :}$$

$$\frac{16}{5}x - \frac{18}{5}y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
A \in (AE) &\iff 16x_A - 18y_A + c' = 0 \\
&\iff 48 - 36 + c' = 0 \\
&\iff c' = -12.
\end{aligned}$$

Une équation de (AE) est alors $8x - 9y - 6 = 0$.

$\overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc une équation de (CF) est de la forme :

$$2x + 6y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$C \in (CF)$ donc $2 \times 9 + 6 \times 2 + c = 0$, soit $c = -30$.

Une équation de (CF) est alors $x + 3y - 15 = 0$.

$\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ donc une équation de (DB) est de la forme :

$$-8x - 2y + c = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$B \in (DB)$ donc $-8 \times 5 - 2 \times 2 + c = 0$, soit $c = 44$.

Une équation de (DB) est alors $4x + y - 22 = 0$.

Le point d'intersection $\Omega(x; y)$ de (AE) et (CF) est tel que :

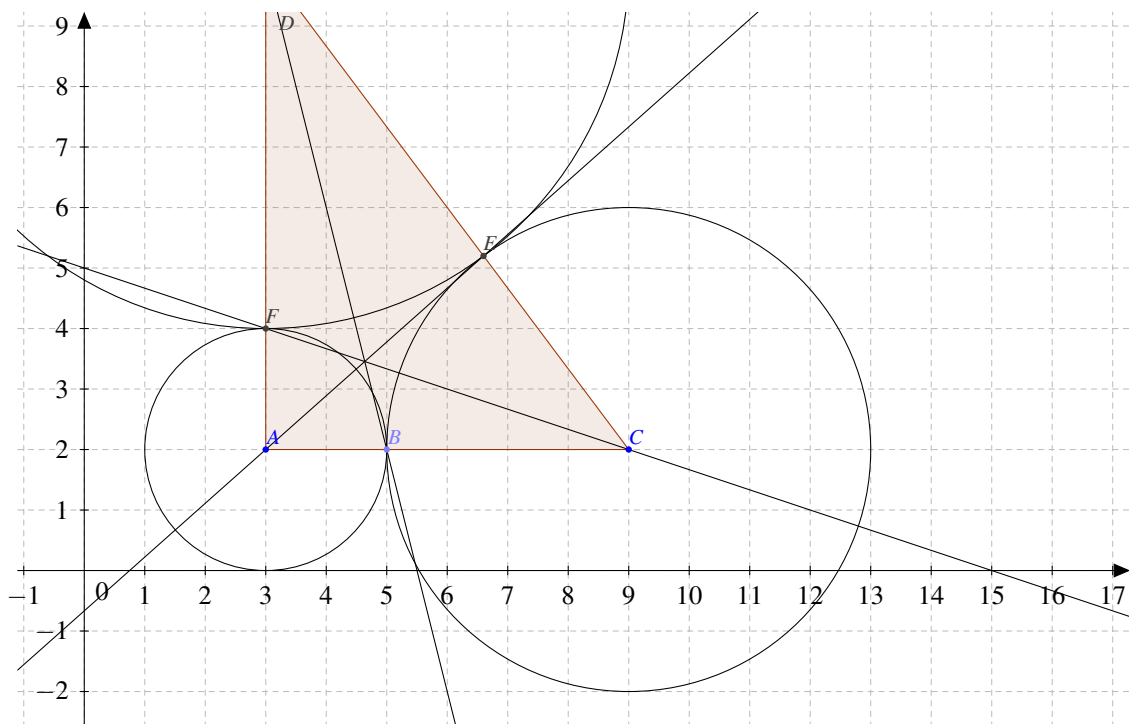
$$\begin{cases} 8x - 9y - 6 = 0 \quad (L_1) \\ x + 3y - 15 = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

En faisant $8(L_2) - (L_1)$, on obtient $33y - 116 = 0$, soit $y = \frac{116}{33}$, et donc $x = 15 - 3y = -\frac{49}{11}$.

On remplace ces valeurs dans l'équation de (DB) :

$$4x + y - 22 = 4 \times \frac{49}{11} + \frac{116}{33} - 22 = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

Donc (AE), (CF) et (DB) ne sont pas concourantes (malgré ce que l'on aurait pu penser à la vue de la figure).



■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 • Dans le cas 1, BOC est isocèle en O. considérons alors H le pied de la hauteur issue de O ; H est le milieu de [BC] et HOC est un triangle rectangle en H donc :

$$\sin \widehat{HOC} = \frac{HC}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{a}{2r}.$$

Or, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc de cercle $\widehat{BC}$ donc $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$, donc $\widehat{HOC} = \widehat{A}$.
Ainsi,

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{2r} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{a}{2} = r \sin \widehat{A}}.$$

- Dans le cas 2, $\widehat{BAC} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{BOC}$, donc $\frac{1}{2}\widehat{BOC} = \pi - \widehat{BAC}$.
Donc, dans le triangle HOC rectangle en H,

$$\sin(\pi - \widehat{BAC}) = \boxed{\frac{a}{2r} = \sin \widehat{A}}.$$

- 2 De l'égalité précédente, on déduit :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2r.$$

Un raisonnement analogue à celui tenu dans la question 1 nous permettrait de démontrer que :

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = 2r \quad \text{et} \quad \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r$$

d'où :

$$\boxed{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2r}.$$

- 3 L'aire du triangle ABC est (voir exercice intitulé « La formule de Héron ») :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$$

soit, d'après la relation trouvée dans la question 1,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \times \frac{a}{2r} \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{abc}{4r}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 14.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Dans le triangle AHB, rectangle en H, on a : $\sin \widehat{A} = \frac{h}{c}$, donc $h = c \times \sin \widehat{A}$.

L'aire de ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times h \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}}.$$

- 2 La formule d'Al-Kashi est :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

ce qui donne :

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \widehat{A}$$

ou encore :

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\cos^2 \hat{A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}.$$

Or, $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$, donc $\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A}$, ce qui donne :

$$1 - \sin^2 \hat{A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

soit :

$$\boxed{\sin^2 \hat{A} = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}}.$$

3 Développons :

$$\begin{aligned} & \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2} \\ &= \frac{4 \frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right)}{b^2c^2} \\ &= \frac{2(a+b+c) \left(\frac{b+c-a}{2} \right) \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b-c}{2} \right)}{b^2c^2} \\ &= \frac{(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab+bc+c^2-ac)(a^2+ab-ac-ab-b^2+bc+ac+bc-c^2)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)}{4b^2c^2} \\ &= \frac{[2bc+(b^2+c^2-a^2)][2bc-(b^2+c^2-a^2)]}{4b^2c^2} \\ &= \frac{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} \\ &= \sin^2 \hat{A}. \end{aligned}$$

4 De la question **1**, on déduit que :

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 \hat{A}.$$

En remplaçant alors $\sin^2 \hat{A}$ par l'expression trouvée à la question **3**, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2 \times \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2} \\ &= p(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ étant un nombre positif, en prenant la racine carrée des deux membres de cette dernière égalité, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

5 $p = \frac{7+9+12}{2} = 14$ donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} \\ &= \sqrt{14 \times 7 \times 5 \times 2} \\ &= \sqrt{980}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 14\sqrt{5} \text{ cm}^2}$$

Statistiques descriptives

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

■ Exercice 1. Notes de deux classes

★★★★★ **A**

Corrigé page 167

Un professeur a en charge deux classes de 1^{re} S. Il souhaite comparer les résultats de ces deux classes sur le dernier contrôle à l'aide des tableaux suivants :

NOTES DE LA 1^{RE} S1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1

NOTES DE LA 1^{RE} S2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1

- 1 Calculer la moyenne des deux classes.
- 2 Calculer la variance, puis l'écart-type, des deux classes.
- 3 Déterminer la médiane ainsi que l'écart inter-quartile.
- 4 Comparer alors les résultats de ces deux classes.

■ Exercice 2. Salaires dans deux entreprises

★★★★★ **A**

Corrigé page 168

Nous avons observé les salaires nets dans deux entreprises concurrentes, et nous les avons réunis dans les tableaux suivants :

ENTREPRISE A

Classes	[1 150; 1 250[	[1 250; 1 350[	[1 350; 1 450[	[1 450; 1 550[
Effectifs	18	27	52	48

Classes	[1 550; 1 650[	[1 650; 1 750[	[1 750; 1 850[	[1 850; 2 000]
Effectifs	36	25	20	8

ENTREPRISE B

Classes	[900; 1 000[	[1 000; 1 100[	[1 100; 1 200[	[1 200; 1 300[
Effectifs	10	15	22	34

Classes	[1 300; 1 400[	[1 400; 1 500[	[1 500; 1 600[	[1 600; 1 700[
Effectifs	38	42	58	30

Classes	[1 700; 1 800[	[1 800; 1 900[	[1 900; 2 000[	[2 000; 2 100]
Effectifs	22	14	10	4

- 1 Déterminer le couple $(\bar{x}; \sigma)$ pour chacune des deux entreprises.
Interpréter ces résultats.
- 2 Déterminer le couple $(m_e; I_Q)$ (médiane - écart inter-quartile) pour chacune des deux entreprises.
(On devra ici trouver une valeur approchée des médianes et des quartiles)
Interpréter ces résultats.

■ Exercice 3. Influence d'un ajout dans une série statistique

★★★★☆ 

Corrigé page 170

On considère une série statistique de n données $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On note $\bar{x}$ sa moyenne et V sa variance.

On ajoute une donnée x à cette série, et on note $m(x)$ la nouvelle moyenne et $v(x)$ la nouvelle variance.

- 1 Montrer que :

$$m(x) = \frac{x + n\bar{x}}{n + 1}.$$

- 2 Quelle valeur de x faut-il prendre pour que $m(x) = \bar{x}$?
- 3 En utilisant le théorème de König-Huygens, montrer que :

$$v(x) = \frac{1}{(n + 1)^2} (nx^2 - 2n\bar{x}x + n(n + 1)V + n\bar{x}).$$

- 4 En déduire la valeur de x pour laquelle $v(x)$ est minimale.

■ Exercice 4. Un algorithme

★★★★☆ 

Corrigé page 171

Voici un algorithme :

Algorithme 5: Un algorithme dont la mission est inconnue

Entrées

L est une liste de nombres
N est un nombre entier
i est un nombre entier
j est un nombre entier
a est un nombre
m est un nombre
indice est un nombre entier

Initialisation

Entrer L

Traitement

N prend la valeur Longueur(L)

Pour i allant de 1 à N

 m prend la valeur L[i]

 indice prend la valeur i

 Pour j allant de i+1 à N

 Si $L[j] < m$ alors

 m prend la valeur L[j]

 indice prend la valeur j

 Fin du Si

 Fin du Pour

 a prend la valeur L[i]

 L[i] prend la valeur L[indice]

 L[indice] prend la valeur a

Fin du Pour

Sortie

Afficher L

- 1 Qu'affiche l'algorithme 5 lorsque l'on rentre la liste :

$L = [3, 5, 1]$

Quelle est la mission de cet algorithme ?

- 2 Modifier l'algorithme 5 afin de déterminer et d'afficher la médiane de la série statistique entrée dans L.

■ Exercice 5. De l'algèbre dans les statistiques

★★★★★ R

Corrigé page 172

- 1 Hugo a obtenu au 2^e trimestre une moyenne de 8/20 aux 3 premiers contrôles (dont les coefficients respectifs sont 0,5, 2 et 1). Il ne reste qu'un contrôle avant l'arrêt des notes (dont le coefficient sera égal à 2).

Combien faut-il qu'il obtienne au minimum pour obtenir 10/20 de moyenne au 2^e trimestre ?

- 2 M. Zébulon enseigne les mathématiques aux classes 1^{re}S1 (30 élèves) et 1^{re}S2 (26 élèves). Il propose systématiquement les mêmes sujets de devoirs. Sur celui portant sur les statistiques, la 1^{re}S1 a obtenu une moyenne de 14,5/20.

a. Quelle doit être la moyenne de la 1^{re} S2 pour que la moyenne de ce contrôle (sur les deux classes) soit supérieure à 12/20 ?

b. Lors des précédents devoirs, la moyenne de la 1^{re}S2 était inférieure à celle de la 1^{re}S1 de 20 %.

Peut-il espérer atteindre 12/20 de moyenne à ce contrôle sur les deux classes ?

- 3 Mme Zébulon enseigne aussi les mathématiques dans le même lycée que son mari. Elle a la 1^{re} S3 dans laquelle se trouve Kevin Zépadbol à qui elle propose, avec un sourire narquois, l'énigme suivante :

« Tu as eu 5/20 (coefficient 2) et 8/20 (coefficient 1) aux deux premiers devoirs, et tu attends ta note pour le dernier devoir coefficient 2. Sur ces trois devoirs, l'écart-type de tes notes est à peu près égal à 1,643. Si tu arrives à trouver la note que tu as obtenue au dernier contrôle, je la triple. »
Saurez-vous trouver la note de Kevin ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 • **Moyenne de la 1^{re} S1 :**
- $$\bar{x}_1 = \frac{2 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 2 + \dots + 15 \times 1 + 18 \times 1}{1 + 1 + 2 + \dots + 1 + 1}$$
- $$= \frac{312}{32}$$
- $$\boxed{\bar{x}_1 \approx 9,75}$$
- **Moyenne de la 1^{re} S2 :**
- $$\bar{x}_2 = \frac{1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + \dots + 15 \times 1 + 16 \times 1}{1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1}$$
- $$= \frac{286}{35}$$
- $$\boxed{\bar{x}_2 \approx 8,17}$$

- 2 Pour la 1^{re} S1, la variance est : $V_1 = \frac{173}{16} \approx 10,81$.

Ainsi, son écart-type est : $\sigma_1 = \sqrt{V_1} = \frac{\sqrt{173}}{4} \approx 3,29$.

Pour la 1^{re} S2, la variance est : $V_2 = \frac{15014}{1225} \approx 12,26$.

Ainsi, son écart-type est : $\sigma_2 = \sqrt{V_2} = \frac{\sqrt{15014}}{35} \approx 3,5$.

- 3 Complétons les deux tableaux avec la ligne des effectifs cumulés croissants :

NOTES DE LA 1^{RE} S1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1
E.c.c.	1	2	4	9	12	18	23	29	30	31	32

NOTES DE LA 1^{RE} S2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1
E.c.c.	1	2	3	6	8	11	15	18	23	27	30	31	31	33	34	35

On voit alors que la médiane de la 1^{re} S1 est 9 (car c'est la première note pour laquelle les e.c.c. sont supérieurs ou égaux à la moitié de l'effectif total, soit $32 \div 2 = 16$).

Donc $m_1 = 9$.

De plus, $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 13$ donc l'écart inter-quartile est $e_1 = 13 - 7 = 6$.

On voit aussi que la médiane de la 1^{re} S2 est $m_2 = 8$.

De plus, $Q_1 = 6$ et $Q_3 = 10$, donc l'écart inter-quartile est $e_2 = 10 - 6 = 4$.

- 4 Le couples $(m_1; e_1) = (9; 6)$ et $(m_2; e_2) = (8; 4)$ nous permettent de dire que la dispersion des notes autour des médianes est plus étroite dans la 1^{re} S2 que dans la 1^{re} S1, en ayant à peu près la même médiane (à 1 point près).

Les couples $(\bar{x}_1; \sigma_1) = (9,75; 3,29)$ et $(\bar{x}_2; \sigma_2) = (8,17; 3,5)$ nous permet de dire que la concentration des notes autour des moyennes est quasiment identique, en ayant une moyenne plus forte dans la 1^{re} S1 que dans la 1^{re} S2.

On peut donc voir que la 1^{re} S1 est légèrement plus performante que la 1^{re} S2.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 • Pour l'entreprise A :

$$\begin{aligned}\bar{x}_A &= \frac{1\,200 \times 18 + 1\,300 \times 27 + \dots + 1\,925 \times 8}{18 + 27 + 52 + \dots + 20 + 8} \\ &= \frac{353\,000}{234} \\ \boxed{\bar{x}_A \approx 1\,509}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_A &= \frac{18(1\,509 - 1\,200)^2 + 27(1\,509 - 1\,300)^2 + \dots + 8(1\,509 - 1\,925)^2}{234} \\ \boxed{V_A \approx 33\,367}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sqrt{V_A} \\ \boxed{\sigma_A \approx 183}\end{aligned}$$

- Pour l'entreprise B :

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \frac{950 \times 10 + 1\,050 \times 15 + \dots + 2\,050 \times 4}{10 + 15 + \dots + 10 + 4} \\ &= \frac{436\,750}{299} \\ \boxed{\bar{x}_B \approx 1\,461}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_B &= \frac{10(950 - 1\,461)^2 + 15(1\,050 - 1\,461)^2 + \dots + 4(2\,050 - 1\,461)^2}{299} \\ \boxed{V_B \approx 61\,959}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{V_B} \\ \boxed{\sigma_B \approx 249}\end{aligned}$$

Ainsi, des couples $(\bar{x}_A; \sigma_A) = (1\,509; 183)$ et $(\bar{x}_B; \sigma_B) = (1\,461; 249)$, on peut déduire qu'en moyenne, on gagne plus dans l'entreprise A que dans la B, mais que l'écart à ce salaire moyen est plus important dans l'entreprise B quand dans la A.

2

- Pour l'entreprise A, l'effectif total est 234, et la moitié de cet effectif (à savoir 117) est atteint pour la classe $[1\,450; 1\,550[$. Pour déterminer la médiane m_A (qui appartient à ce dernier intervalle), considérons les points $A(1\,450; 97)$ (« 97 » étant l'effectif cumulé croissant correspondant à la classe avant la classe médiane, $18 + 27 + 52 = 97$), et $B(1\,550; 145)$ (« 145 » étant égal à $97 + 48$).

Le coefficient de la droite (AB) est :

$$\frac{145 - 97}{1\,550 - 1\,450} = 0,48.$$

L'équation de (AB) est de la forme $y = 0,48x + p$. Ainsi, $y_A = 0,48x_A + p$, soit $p = 97 - 0,48 \times 1\,450 = -599$.

Ainsi, (AB) a pour équation réduite : $y = 0,48x - 599$. La médiane m_A est la valeur de x pour laquelle $y = 117$ (la moitié de l'effectif total), donc :

$$117 = 0,48 \times m_A - 599 \quad \text{soit} \quad \boxed{m_A \approx 1\,492}$$

Le 1^{er} quartile est dans l'intervalle $[1\,350; 1\,450[$ car le quart de l'effectif total (58,5) est atteint dans cet intervalle. Posons $A(1\,350; 45)$ et $B(1\,450; 52)$. Le coefficient directeur de (AB) est 0,52 donc la droite (AB) a pour équation réduite $y = 0,52x + p$, avec $y_B = 0,52x_B + p$, soit $p = 52 - 0,52 \times 1\,450 = -702$.

Ainsi, (AB) : $y = 0,52x - 702$. Q_1 est la valeur de x pour laquelle $y = 58,5$ donc :

$$Q_1 = \frac{58,5 + 702}{0,52} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_1 = 1\,462,5}$$

Le 3^e quartile est atteint dans $[1\,550; 1\,650[$ (car les trois quarts de l'effectif total, à savoir 175,5, est atteint dans cet intervalle).

Posons $A(1\,550; 145)$ et $B(1\,650; 181)$. Le coefficient directeur de (AB) est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{181 - 145}{100} = 0,36.$$

Donc, l'équation réduite de (AB) est : $y = 0,36x + p$.

Comme $A \in (AB)$, $y_A = 0,36x_A + p$, donc $p = 145 - 0,36 \times 1\,550 = -413$.

Ainsi, (AB) : $y = 0,36x - 413$.

Q_3 est la valeur de x pour laquelle $y = 175,5$ donc :

$$Q_3 = \frac{175,5 + 413}{0,36} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_3 \approx 1\,635}$$

On a alors :

$$I_Q \approx 1\,635 - 1\,462,5 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_Q \approx 172}$$

- Pour l'entreprise B, l'effectif total est 299 donc la médiane est atteinte dans l'intervalle pour lequel l'e.c.c. est 150, donc $[1\,400; 1\,500[$.

Sur cet intervalle, le segment a pour équation $y = 0,42x + p$, avec $p = 119 - 0,42 \times 1\,400 = -469$. Donc $y = 0,42x - 469$. La médiane m_B est la valeur de x pour laquelle $y = 149,5$ (la moitié de l'effectif total), donc :

$$m_B = \frac{149,5 + 469}{0,42} \quad \text{soit} \quad \boxed{m_B \approx 1\,473}$$

Le 1^{er} quartile est atteint dans $[1\,200; 1\,300[$. L'équation du segment sur cet intervalle est $y = 0,34x + p$ avec $p = 47 - 0,34 \times 1\,200 = -361$.

Donc, $y = 0,34x - 361$. Q'_1 est la valeur de x pour laquelle $y = 74,75$ (le quart de l'effectif total) donc :

$$Q'_1 = \frac{74,75 + 361}{0,34} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q'_1 \approx 1\,282}$$

Le 3^e quartile est atteint dans $[160; 1\,700]$. L'équation du segment sur cet intervalle est $y = 0,30x + p$ avec $p = 219 - 0,3 \times 1\,600 = -261$.

Donc $y = 0,3x - 261$. Q'_3 est la valeur de x pour laquelle $y = 224,25$ (les trois quarts de l'effectif total) donc :

$$Q'_3 = \frac{224,25 + 261}{0,3} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q'_3 = 1\,617,5}$$

Ainsi, l'intervalle inter-quartile est :

$$I'_Q = 1\,617,5 - 1\,282 \quad \text{soit} \quad \boxed{I'_Q \approx 335,5}$$

Des couples $(m_A; I_Q) = (1\,492; 172)$ et $(m_B; I'_Q) = (1\,473; 335,5)$, on peut observer que les médianes sont presque égales tout en ayant un écart inter-quartile plus grand dans l'entreprise B que dans l'entreprise A. La répartition des salaires autour de la médiane est plus vaste dans l'entreprise B que dans la A, ce qui signifie que dans l'entreprise A, 50 % des salaires sont assez concentrés autour de la médiane (avec un écart de plus ou moins 172 €) alors que dans l'entreprise B, 50 % des salaires se trouvent certes autour de la médiane, mais avec plus ou moins 335,5 €.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Posons $x_{n+1} = x$.

1 Par définition, on a :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \quad \text{donc} \quad n\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{i=n+1} x_i \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i + x \right) \\ &= \frac{1}{n+1} (n\bar{x} + x) \\ &\boxed{m(x) = \frac{x + n\bar{x}}{n+1}} \end{aligned}$$

2 $m(x) = \bar{x}$

$$\iff \frac{x + n\bar{x}}{n+1} = \bar{x}$$

$$\iff x + n\bar{x} = (n+1)\bar{x}$$

$$\iff x = \bar{x}.$$

Il faut ainsi choisir d'ajouter à la série une valeur égale à la moyenne de la série pour que la moyenne de la nouvelle série soit la même que la série initiale.

3 Par définition, d'après le théorème de König-Huygens, on a :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \bar{x}^2 \quad \text{donc} \quad nV = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{i=n+1} x_i^2 - [m(x)]^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + x^2 \right) - \left(\frac{x + n\bar{x}}{n+1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n+1} (nV + n\bar{x}^2 + x^2) - \frac{x^2 + 2n\bar{x}x + n^2\bar{x}^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(nV + n\bar{x}^2 + x^2 - \frac{x^2 + 2n\bar{x}x + n^2\bar{x}^2}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{n(n+1)V + n(n+1)\bar{x}^2 + (n+1)x^2 - x^2 - 2n\bar{x}x - n^2\bar{x}^2}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} (nx^2 - 2n\bar{x}x + n(n+1)V + n\bar{x}) \end{aligned}$$

4 $v(x)$ est un polynôme du second degré donc le coefficient de x^2 est positif. Par conséquent, l'extremum est un minimum, et il est atteint pour :

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2n\bar{x}}{2n} = \bar{x}.$$

La nouvelle variance est donc minimale si on ajoute à la série une valeur égale à sa moyenne.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'algorithme 5 affiche la liste :

[1,3,5]

Il semble donc trier dans l'ordre croissant les données de la liste entrée.

2 Un algorithme possible est :

Algorithme 6: L'algorithme complété

Entrées

L est une liste de nombres
N est un nombre entier
i et j sont des nombres entiers
a, m, P, M sont des nombres
indice est un nombre entier

Initialisation

Entrer L

Traitement

N prend la valeur Longueur(L)

Pour i allant de 1 à N

 m prend la valeur L[i]

 indice prend la valeur i

 Pour j allant de i+1 à N

 Si L[j]<m alors

 m prend la valeur L[j]

 indice prend la valeur j

 Fin du Si

 Fin du Pour

 a prend la valeur L[i]

 L[i] prend la valeur L[indice]

 L[indice] prend la valeur a

Fin du Pour

P prend la valeur N

Tant que P>=2

 P prend la valeur P-2

Fin du Tant que

Si P=1 alors

 M prend la valeur L[(n+1)/2]

sinon

 M prend la valeur (L[N/2]+L[N/2+1])/2

Fin du Si

Sortie

Afficher L et M

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Notons x la note au devoir coefficient 2. Il faut :

$$\frac{(0,5 + 2 + 1) \times 8 + 2x}{0,5 + 2 + 1 + 2} \geq 10$$

soit :

$$28 + 2x \geq 10 \times 5,5.$$

On a alors :

$$x \geq \frac{55 - 28}{2}$$

ou encore :

$$x \geq 13,5.$$

Il faut donc que Hugo obtienne une note supérieure ou égale à 13,5/20 lors du prochain contrôle.

- 2** a. Notons $\bar{x}_1 = 14,5$ la moyenne de la 1^{re}S1 et $\bar{x}_2$ celle de la 1^{re}S2. Il faut :

$$\begin{aligned} \frac{30 \times 14,5 + 26 \times \bar{x}_2}{30 + 26} &\geq 12 \iff 435 + 26\bar{x}_2 \geq 12 \times 56 \\ &\iff \bar{x}_2 \geq \frac{12 \times 56 - 435}{26} \\ &\iff \bar{x}_2 \geq 9,12. \end{aligned}$$

Il faut donc que la moyenne de la 1^{re}S2 soit supérieure ou égale à 9,12.

- b. Lors des précédents devoirs, $\bar{x}_2 = 0,8\bar{x}_1$. Ici, $0,8\bar{x}_1 = 0,8 \times 14,5 = 11,6$.

M. Zébulon peut donc se rassurer : il est fort probable que la moyenne de ses deux classes soit supérieure à 12/20.

- 3** La variance des notes de Kevin est : $1,643^2 \approx 2,7$.

Notons n sa note au dernier devoir, $\bar{x}$ sa moyenne sur ses trois contrôles et V la variance. Alors :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{5 \times 2 + 8 \times 1 + 2n}{5} \\ V = \frac{2(5 - \bar{x})^2 + (8 - \bar{x})^2 + 2(n - \bar{x})^2}{5} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{18}{5} + \frac{2}{5}n \\ V = \frac{1}{5}[5\bar{x}^2 - (36 + 4n)\bar{x} + 114 + 2n^2] \end{cases}$$

En remplaçant dans la deuxième égalité $\bar{x}$ par son expression en fonction de n , on a :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{25}(18 + 2n)^2 - \frac{1}{25} \underbrace{(36 + 4n)(18 + 2n)}_{=2(18+2n)} + \frac{1}{5}(114 + 2n^2) \\ &= -\frac{1}{25}(18 + 2n)^2 + \frac{1}{25}(570 + 10n^2) \\ &= \frac{1}{25}(10n^2 + 570 - 18^2 - 72n - 4n^2) \\ &= \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$V = 2,7 \iff \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123) = \frac{27}{10}$$

$$\iff 3n^2 - 36n + 123 = \frac{27}{10} \times \frac{25}{2}$$

$$\iff 3n^2 - 36n + 123 = \frac{135}{4}$$

$$\iff 3n^2 - 36n + 123 - \frac{135}{4} = 0$$

$$\iff 12n^2 - 144n + 357 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $12n^2 - 144n - 233$ est :

$$\Delta = (-144)^2 - 4 \times 12 \times 357 = 3\,600 = 60^2.$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions :

$$n_1 = \frac{144 - 60}{24} = 3,5 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{144 + 60}{24} = 8,5.$$

Il y a donc deux notes possibles : 3,5 ou 8,5.

Mais le fait que l'enseignante puisse tripler la note suggère que cette note ne peut pas être 8,5 (sans quoi la note triplée serait supérieure à 20).

Kevin a donc eu 3,5/20.

Probabilités

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

13 octobre 2018

■ Exercice 1. Différents ordinateurs

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 181

Un couple décide d'équiper leur foyer avec un nouvel outil informatique. Il vont alors sur un site Internet qui propose des appareils informatiques selon leur type, leur marque et leur puissance.

Le couple hésite entre :

- pour le type : un ordinateur de bureau (B), un ordinateur portable (P) et une tablette (T) ;
- pour la marque : la marque M_1 et la marque M_2 ;
- la puissance : W_1 et W_2 .

- 1 Combien de configurations sont possibles ? (vous pouvez vous aider d'un arbre)
- 2 Si le couple choisit au hasard une configuration, quelle est la probabilité pour que l'outil informatique choisi soit :
 - a. une tablette ?
 - b. un ordinateur portable d'une puissance W_1 ?
 - c. un ordinateur de bureau de marque M_2 ?

■ Exercice 2. 49 boules dans un urne

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 181

Une urne contient 49 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 49.
On tire au hasard une boule de cette urne.

On note :

- A l'événement : « le numéro de la boule choisie est un nombre pair » ;
- B l'événement : « le numéro de la boule choisie est un multiple de 5 ».

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

■ Exercice 3. Avec deux dés

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 182

On dispose d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). Ces dés sont parfaitement équilibrés.

On lance ces deux dés et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus.

Soit X la variable aléatoire représentant l'ensemble des sommes possibles.

- 1 Donner la loi de probabilité de X .
- 2 Calculer l'espérance mathématique de X .
- 3 Calculer l'écart-type de X .

■ Exercice 4. Avec une pièce de monnaie

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 182

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie.

- 1 Si on obtient trois fois « pile » ou trois fois « face », on gagne 100 €. Sinon, on perd 10 € (ce qui correspond à un gain de -10 €).
Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.
- 2 On ajoute 5 € aux gains. Quelle est alors l'espérance et quel est l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu ?
- 3 On multiplie par 2 les gains du jeu initial. Calculer alors l'espérance et l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu.

■ Exercice 5. Deux urnes

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 183

On considère un jeu où deux urnes U_1 et U_2 sont remplies de 12 boules.

Dans U_1 , il y a 8 boules rouges, 3 boules blanches et 1 boule noire.

Dans U_2 , il y a 1 boule rouge, 8 boules blanches et 3 boules noires.

Le joueur tire au hasard une boule dans U_1 , puis une autre dans U_2 .

On note :

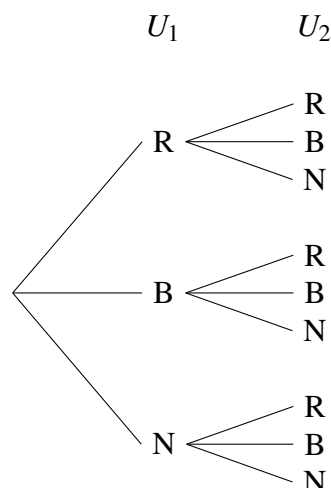
- R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
- B l'événement : « la boule tirée est blanche » ;
- N l'événement : « la boule tirée est noire ».

Si les deux boules tirées sont de la même couleur, le joueur gagne 10 € ; sinon, il ne gagne rien.

Pour jouer, on doit s'acquitter d'une somme de 5 €.

On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1 Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2 Déterminer la loi de probabilités de X .

3 Calculer l'espérance mathématique de X , puis interpréter ce résultat.

4 Calculer la variance puis l'écart-type de X .

■ Exercice 6. Lancer de 3 pièces

★★★★☆

A

Corrigé page 184

On lance 3 pièces bien équilibrées valant respectivement 1 €, 2 € et 2 €.

On veut étudier la variable aléatoire X qui totalise le montant en euros des pièces tombées sur « Pile ».

1 Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

2 Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ?

Donner la loi de probabilité de X .

3 Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 €?

■ Exercice 7. Nombre variable de boules

★★★★☆

R

Corrigé page 184

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

Dans U_1 , il y a n boules noires et 10 boules blanches.

Dans U_2 , il y a 10 boules noires et $n + 1$ boules blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne.

1 Exprimer en fonction de n la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

2 Pour quelle valeur de n cette probabilité est maximale?

■ Exercice 8. Recherche d'une mise de départ

★★★★☆ R

Corrigé page 186

On dispose d'une urne contenant 1 boule noire, 1 boule rouge, 2 boules jaunes et 3 boules bleues. Un jeu consiste à effectuer deux tirages successifs sans remise dans cette urne.

- quand on tire une boule noire au 1^{er} ou 2nd tirage, on ne gagne rien ;
- quand on tire une boule bleue au 2nd tirage, on gagne 1 € ;
- quand on tire une boule jaune au 2nd tirage, on gagne 5 € ;
- quand on tire une boule rouge au 2nd tirage, on gagne 10 €.

Pour avoir le droit de participer, un joueur doit miser 3 €.

On appelle X la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.

- 1 Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- 2 Donner la loi de probabilité de X .
- 3 Calculer l'espérance mathématique de X . Quelle conclusion peut-on alors faire ?
- 4 À la vue de la dernière conclusion, déterminer la mise de départ afin que le jeu soit équitable.
- 5 La mise de départ trouvée à la question précédente ne satisfaisant pas à l'organisateur du jeu, celui-ci souhaite modifier les règles du jeu. Il se demande s'il peut trouver une mise de départ pour laquelle le jeu serait équitable s'il multiplie tous les gains absolus (donc sans tenir compte de la mise de départ) par un entier a non nul.

On pose Y la variable aléatoire représentant les gains algébriques de ce jeu avec les nouvelles règles. On note m la mise de départ.

- a. Expliquer pourquoi $Y = aX + 3a - m$.
- b. Donner alors une réponse à la question de l'organisateur.

Loi binomiale

■ Exercice 9. Avec une urne

★★★★☆ A

Corrigé page 187

Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes. On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées à la fin de cette expérience.

- 1 Décrire X (donner les valeurs possibles de X).
- 2 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 3 Calculer alors :

a. $P(X = 0)$

b. $P(X = 3)$

c. $P(X \geq 1)$

■ Exercice 10. Dans une usine de composants électroniques

★★★★☆ A

Corrigé page 188

Le responsable de fabrication de l'usine ELECTOP est chargé de contrôler une chaîne de production fabriquant un composant électronique. Sur 10 000 composants pris au hasard, il constate que 7 sont défectueux. Il suppose donc que la probabilité d'avoir un composant défectueux fabriqué par cette chaîne de production est égale à 0,000 7.

Le mois suivant, il choisit au hasard sur cette chaîne de production 20 composants.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de composants défectueux.

- 1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2 Calculer $P(X \geq 2)$.

■ Exercice 11. Au tennis

★★★★☆ A

Corrigé page 188

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6. Ils décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.

Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matches gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.

- 1 Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer 0 en fonction de D et en déduire les valeurs possibles de D .
- 2 Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.
- 3 Calculer l'espérance de dépense en fin d'année de Benjamin.

■ Exercice 12. Au lycée à vélo

★★★★☆ A

Corrigé page 188

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.

Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.

Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps (en minute) mis par l'élève pour aller au lycée.

- 1 Déterminer la loi de probabilités de X .
- 2 Exprimer T en fonction de X .
- 3 Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(T)$ de T et interpréter ce résultat.
- 4 L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
Calculer la probabilité que l'élève soit en retard au lycée.

■ Exercice 13. Le jeu des petits chevaux

★★★★★ R

Corrigé page 189

Le jeu des petits chevaux nécessite un dé. Dans ce jeu, un joueur doit faire un « 6 » pour sortir de son enclos et commencer la partie. Tant qu'il n'a pas fait de « 6 », il continue de lancer le dé (à tour de rôle avec les autres joueurs) jusqu'à ce qu'il en obtienne un.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers de dé jusqu'à obtention d'un « 6 ».

1 Déterminer la probabilité pour que le joueur obtienne un « 6 » au premier lancer. En déduire $P(X = 1)$.

2 Déterminer la probabilité pour que le joueur obtienne un « 6 » au second lancer. En déduire $P(X = 2)$.

3 Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel k , $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$.

4 On pose $u_n = P(X = n)$. et $S_n = \sum_{k=1}^n P(X = k)$.

a. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b. En déduire une expression simplifiée de S_n .

c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

5 On admet que l'espérance mathématique de X est $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

On pose alors $f_k(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}^*$, et $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$.

a. Calculer $f'_k(x)$, la dérivée de $f_k(x)$, en fonction de k .

b. En déduire que $F'_n(x) = \frac{1 - x - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ pour tout $x \neq 1$.

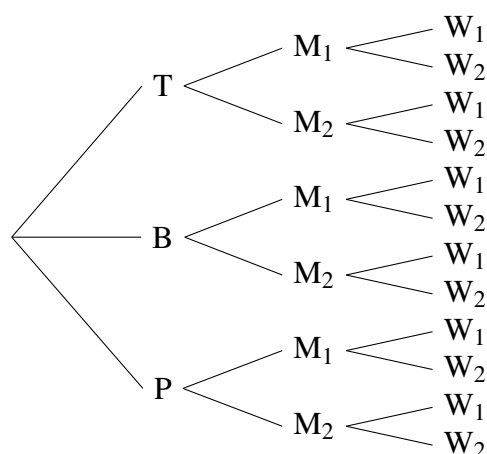
On admettra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

c. En déduire $\mathbb{E}(X)$.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Nous avons l'arbre suivant :



Il y a donc 12 configurations possibles.

2 a. La probabilité de choisir une tablette est $\frac{1}{3}$.b. La probabilité de choisir un portable d'une puissance W_1 est $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.c. La probabilité de choisir un ordinateur de bureau de marque M_2 est $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- $P(A) = \frac{24}{49}$ car il y a 24 nombres pairs entre 1 et 49.
- $P(B) = \frac{9}{49}$ car $B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45\}$.
- $P(A \cap B) = \frac{4}{49}$ car $A \cap B = \{10; 20; 30; 40\}$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24 + 9 - 4}{49} = \frac{29}{49}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 L'ensemble des sommes possibles est donné par le tableau suivant :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

On a alors :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

- 2 $\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{24} + 3 \times \frac{1}{12} + \dots + 10 \times \frac{1}{24}$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 6}$$

- 3 La variance de X est : $\mathbb{V}(X) = \frac{25}{6}$ donc son écart-type est $\sigma(X) = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La loi de probabilité de la v.a. X représentant le gain algébrique du jeu est :

X	-10	100
P(X)	$\frac{3}{4}$	$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$

L'espérance de X est donc :

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \frac{3}{4} + 100 \times \frac{1}{4} = 17,5.$$

Sa variance est :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{3}{4}(-10 - 17,5)^2 + \frac{1}{4}(100 - 17,5)^2 = 2268,75$$

Son écart-type est alors :

$$\sigma(X) = \sqrt{2268,75} \approx 47,63.$$

- 2 On sait que $\mathbb{E}(X+a) = \mathbb{E}(X) + a$ donc ici, $\mathbb{E}(X') = 17,5 + 5 = 22,5$.

De plus, $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X+a) = \sigma(X)$ donc la variance et l'écart-type ne changent pas.

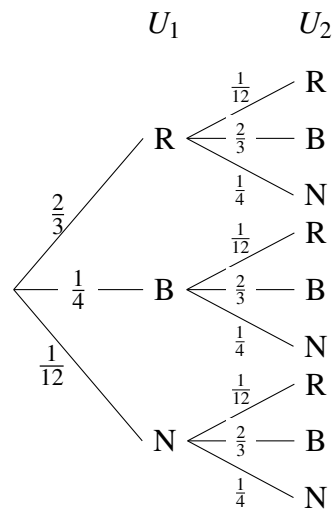
- 3 $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$ donc ici, $\mathbb{E}(X'') = 2 \times 17,5 = 35$.

De plus, $\sigma(aX) = a\sigma(X)$ donc $\sigma(X'') = 2 \times 47,63 = 95,26$.

■ **Corrigé de l'exercice 5.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'arbre de probabilités complété est le suivant :



2 La probabilité d'avoir deux boules rouges est : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$.

La probabilité d'avoir deux boules blanches est : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'avoir deux boules noires est : $\frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$.

Ainsi, la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est :

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{35}{144}.$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes est :

$$1 - \frac{35}{144} = \frac{109}{144}.$$

Le gain algébrique du joueur peut être -5 € (s'il paie 5 € pour jouer et s'il ne gagne pas) ou 5 € (s'il paie 5 € et qu'il gagne 10 €). On a alors :

X	-5	5
P(X)	$\frac{109}{144}$	$\frac{35}{144}$

3 L'espérance mathématique de X est : $\mathbb{E}(X) = -5 \times \frac{109}{144} + 5 \times \frac{35}{144}$

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{185}{72} \approx -2,57$$

Cela signifie que si l'on participe un grand nombre de fois à ce jeu, on peut « espérer » perdre en moyenne 2,57 €.

4 La variance de X est : $\mathbb{V}(X) = \left[-5 - \left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2 \times \frac{109}{144} + \left[5 - \left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2 \times \frac{35}{144}$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{410970875}{8211456} \approx 50,05$$

Ainsi, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
 $\approx \sqrt{50,05}$

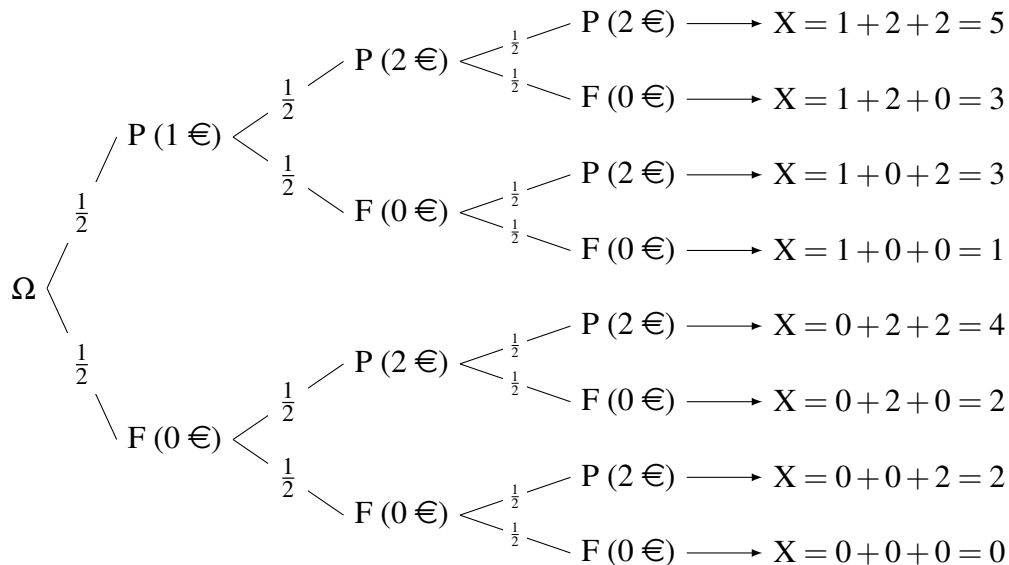
$$\sigma(X) \approx 7,07$$

L'écart-type représentant l'écart moyen à l'espérance, le joueur peut espérer avoir un gain algébrique entre $\mathbb{E}(X) - \sigma(X) \approx -9,64 \text{ €}$ et $\mathbb{E}(X) + \sigma(X) \approx 4,5 \text{ €}$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'arbre est le suivant :



2 On a : $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ d'après l'arbre précédent, d'où la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3 $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 La probabilité de tirer deux boules noires est :

$$\frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+11} = \frac{10n}{(n+10)(n+11)}.$$

La probabilité de tirer deux boules blanches est :

$$\frac{10}{n+10} \times \frac{n+1}{n+11} = \frac{10(n+1)}{(n+10)(n+11)}.$$

La probabilité de tirer deux boules de même couleur est la somme de ces deux probabilités donc :

$$\frac{10(2n+1)}{(n+10)(n+11)}$$

2 Posons $f(x) = \frac{10(2x+1)}{(x+10)(x+11)} = \frac{20x+10}{x^2+21x+110}$.

Alors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{20(x^2+21x+110) - (20x+10)(2x+21)}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{20x^2+420x+2200-40x^2-420x-20x-210}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{-20x^2-20x+1990}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{10(-2x^2-2x+199)}{(x^2+21x+110)^2} \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $-2x^2-2x+199$ est :

$$\Delta = 4 + 8 \times 199 = 1596.$$

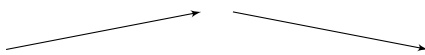
Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{1596}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{399}}{2} > 0$$

et

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{1596}}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{399}}{2} < 0.$$

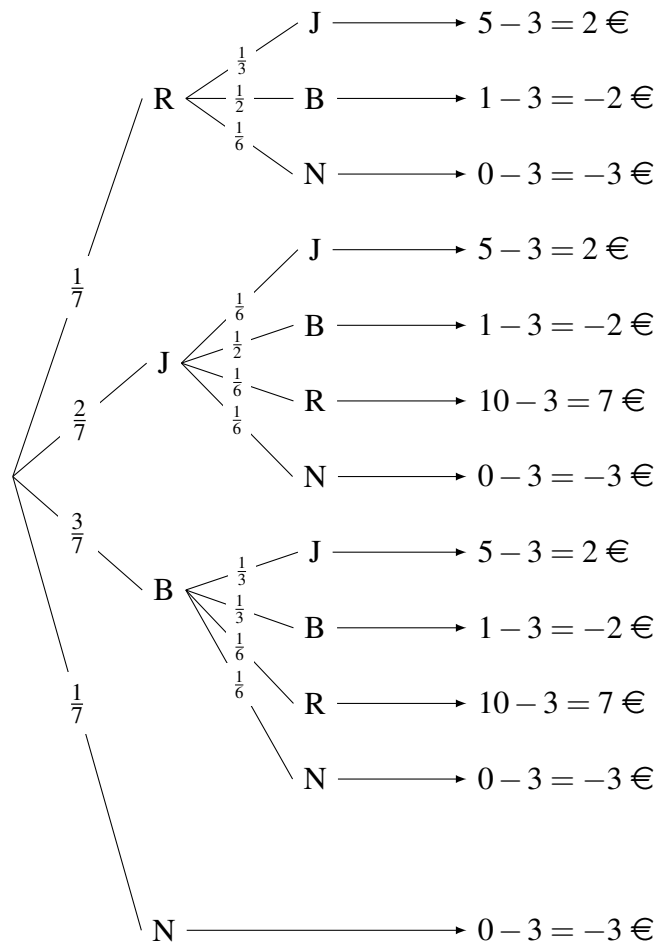
On a alors le tableau suivant :

x	0	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

On voit alors que $f(x)$ atteint son maximum pour $x = \frac{-1 + \sqrt{399}}{2} \approx 9$.

Ainsi, pour $n = 9$, la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est maximale.

1 L'arbre est le suivant :



2 D'après l'arbre précédent,

- $P(X = -3) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$
- $P(X = -2) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{14}$
- $P(X = 2) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$
- $P(X = 7) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{42}$

La loi de probabilité de X est alors :

x_i	-3	-2	2	7
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{42}$

3 $\mathbb{E}(X) = (-3) \times \frac{2}{7} + (-2) \times \frac{5}{14} + 2 \times \frac{5}{21} + 7 \times \frac{5}{42} = -\frac{11}{42}$.

Ainsi, le jeu est plutôt défavorable au joueur.

4 $\mathbb{E}(X) = -\frac{11}{42}$ donc il faut ajouter à la mise de départ $\frac{11}{42}$ €, soit à peu près 0,26 €.

La mise de départ doit donc être égale à $3 - 0,26 = 2,74$ €.

- 5 a. Les gains absolus du jeu initial sont donnés par $X + 3$ (on ne considère pas ici la mise de départ de 3 €). Si on multiplie tous les gains absolus par a , les nouveaux gains sont donnés par la variable aléatoire $a(X + 3) = aX + 3a$. En tenant compte de la mise souhaitée m , on arrive à la variable aléatoire $Y = aX + 3a - m$.

b. $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + 3a - m) = a\mathbb{E}(X) + 3a - m$ par linéarité de l'espérance.

Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = -\frac{11a}{42} + 3a - m$.

Si le jeu est équitable, il faut que :

$$\mathbb{E}(Y) = 0,$$

donc

$$-\frac{11a}{42} + 3a - m = 0$$

soit :

$$m = -\frac{11a}{42} + 3a$$

ou encore :

$$m = \left(-\frac{11}{42} + \frac{3 \times 42}{42}\right)a = \frac{115}{42}.$$

Par conséquent, l'organisateur doit fixer la mise de départ à $\frac{115}{42}$ € (soit à peu près 2,74 €) pour que le jeu soit équitable avec ces nouvelles règles.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. En effet, sur 5 tirages successifs avec remise de la boule tirée, on peut n'avoir aucune boule bleue comme en avoir 1, 2, 3, 4 ou 5.

- 2 L'expérience consistant à choisir au hasard une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « avoir une boule bleue », dont la probabilité est $p = \frac{3}{10} = 0,3$.

Ainsi, si l'on répète de façon indépendante 5 fois cette expérience, cela constitue un schéma de Bernoulli; ainsi, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus à l'issue de ce schéma suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,3)$.

- 3 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,3)$ donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $p = 0,3$. Ainsi :

a. $P(X = 0) = \binom{5}{0} \times 0,3^0 \times (1 - 0,3)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0,7^5 = 0,16807$.

b. $P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^2 = 0,1323$.

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,16807 = 0,83193$.

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 L'expérience consistant à choisir au hasard un composant électronique est une épreuve de Bernoulli dont le succès est : « le composant est défectueux » et donc la probabilité est $p = 0,0007$. Ainsi, répéter 20 fois de façon indépendante cette expérience constitue un schéma de Bernoulli et le nombre de succès obtenus est représenté par une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,0007)$.
- 2
$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \times 0,0007^0 \times (1 - 0,0007)^{20} + \binom{20}{1} \times 0,0007^1 \times (1 - 0,0007)^{19} \right] \\ &\approx 1 - (0,986092710141 + 0,0138149684199) \\ &\approx 0,00009. \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $X = \{0; 1; 2; 3\}$.
 $D = 20(3 - X)$ donc $D = \{0; 20; 40; 60\}$.
- 2
$$\begin{aligned} P(D = 40) &= P(60 - 20X = 40) \\ &= P(-20X = -20) \\ &= P(X = 1) \\ &= \binom{3}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^2 \\ &= 0,432. \end{aligned}$$
- 3
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D) &= \mathbb{E}(60 - 20X) \\ &= 60 - 20\mathbb{E}(X) \\ &= 60 - 20 \times (3 \times 0,4) \\ &= 36. \end{aligned}$$

Benjamin peut donc s'attendre à dépenser en moyenne 36 € par an.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6; \frac{2}{3}\right)$. En effet, l'expérience consistant à arriver à un feu tricolore et à regarder sa couleur est une épreuve de Bernoulli dont le succès est ici S : « le feu est vert » et dont la probabilité est égale à $\frac{2}{3}$ d'après l'énoncé.
- 2 Sans feu tricolore, le temps nécessaire pour parcourir 3 km avec une vitesse de 15 km/h est $60 \div 5 = 12$ minutes (en effet, si on fait 15 km en 60 minutes, 3 km seront faits en $\frac{1}{5}$ de 60 minutes).
À ces 12 minutes, il faut ajouter 1,5 minute par feu rouge ou orange. La variable aléatoire représentant le nombre de feux rouges ou oranges est $(6 - X)$ donc :

$$T = 12 + 1,5(6 - X) \quad \text{soit :} \quad T = 21 - 1,5X.$$

- 3 D'après une propriété du cours, $\exp T = \mathbb{E}(21 - 1,5X) = 21 - 1,5\mathbb{E}(X)$.
Or, $\mathbb{E}(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$. Ainsi, $\mathbb{E}(T) = 21 - 1,5 \times 4$, soit $\mathbb{E}(T) = 15$.
L'élève peut donc s'attendre arriver au lycée 15 minutes en moyenne après son départ.

4 On cherche $P(T > 17)$.

$$\begin{aligned}P(T > 17) &= P(21 - 1,5X > 17) \\&= P(-1,5X > 17 - 21) \\&= P(-1,5X > -4) \\&= P\left(X < \frac{4}{1,5}\right) \\&= P\left(X < \frac{8}{3}\right) \\&= P(X \leq 2) \quad \text{car } X \text{ est un nombre entier} \\&= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\&= \frac{73}{729} \approx 0,1.\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 La probabilité d'obtenir un « 6 » au premier lancer est $\frac{1}{6}$ (en supposant que le dé est équilibré).

$$\text{Donc } P(X = 1) = \frac{1}{6}.$$

2 Obtenir un « 6 » au second lancer sous-entend que l'on a obtenu une autre face que « 6 » au premier lancer, de probabilité $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

La probabilité d'obtenir un « 6 » au second lancer est donc égale à $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

$$\text{Ainsi, } P(X = 2) = \frac{5}{36}.$$

3 Obtenir un « 6 » au k -ième lancer signifie avoir obtenu $(k - 1)$ autres faces que « 6 » avant, dont la probabilité est égale à $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$.

$$\text{Ainsi, } P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}.$$

4 a. $u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}} \\&= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{6}$ et de premier terme $u_1 = \frac{1}{6}$.

b. D'après le cours, la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est égale à : 1^{er} terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes dans la somme}}}{1 - \text{raison}}$. S_n représente la somme des n premiers termes

de $(u_n)_{n \geq 1}$ donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

c. $0 < \frac{5}{6} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.
Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

5 a. $f_k(x) = x^k$ donc $f'_k(x) = kx^{k-1}$.

b.
$$\begin{aligned} F_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \\ &= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \\ &= x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \\ &= x \times \frac{1 - x^n}{1 - x} \\ &= \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} \end{aligned}$$

Donc $F'_n(x) = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\right)'$.

$F_n(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $F'_n = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = x - x^{n+1}$ donc $u'(x) = 1 - (n+1)x^n$;

$v(x) = 1 - x$ donc $v'(x) = -1$.

On a alors :

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= \frac{[1 - (n+1)x^n](1 - x) - (-1)(x - x^{n+1})}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n - x + (n+1)x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{F'_n(x) = \frac{1 - x - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}}$$

c.
$$\begin{aligned} F'_n(x) &= f'_1(x) + f'_2(x) + \cdots + f'_n(x) \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 F'_n\left(\frac{5}{6}\right) &= \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{1 - \frac{5}{6} - (n+1) \left(\frac{5}{6}\right)^n + n \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} \text{ (d'après la question précédente)} \\
 &= \frac{\frac{1}{6} - (n+1) \left(\frac{5}{6}\right)^n + n \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{\frac{1}{36}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} F'_n\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = 6.$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

Fluctuation, échantillonnage

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

13 octobre 2018

■ Exercice 1. Pièce défectueuse

★★★★☆ **A**

Corrigé page 194

Dans une usine de fabrication de composants électroniques, une chaîne de montage est destinée à la fabrication d'une carte mère. Des études précédentes, on peut admettre que si l'on choisit au hasard une carte mère fabriquée par cette chaîne de montage, la probabilité qu'elle soit défectueuse est égale à $p = 0,0125$.

Le contremaître vérifie un échantillon de 1 000 cartes mères à la sortie de cette chaîne. Il constate que 18 pièces sont défectueuses.

- 1 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de pièces défectueuses fabriquées par cette chaîne de montage.
- 2 Peut-on considérer que cette chaîne de montage doit être de nouveau réglée ?

■ Exercice 2. Un dé peut-être truqué

★★★★☆ **A**

Corrigé page 194

Mathieu propose à Mathilde de jouer avec un dé qu'il a fabriqué lui-même. Mathilde, suspicieuse, souhaite vérifier si le dé de Mathieu est bien équilibré. Pour cela, elle le lance 150 fois et obtient 13 fois la face « 5 ».

- 1 Quelle est la proportion théorique du nombre de faces « 5 » que l'on doit obtenir si le dé est équilibré ?
- 2 Justifier que la loi binomiale peut être utilisée dans ce cas pour déterminer, au seuil de 95 %, l'intervalle de fluctuation du nombre de lancers. Préciser alors les paramètres de cette loi binomiale.
- 3 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de faces « 5 » obtenues. Peut-on alors considérer que le dé de Mathieu est équilibré ?

■ Exercice 3. Le médecin de campagne

★★★★☆ **A**

Corrigé page 195

Un médecin, habitué à changer de commune rurale régulièrement, estime qu'au mois de janvier de n'importe quelle année, il y a 30 % de la population qui chope cette maudite grippe.

Cette année, en fin du mois de janvier, il constate que 35 % de la commune où il vient de s'installer ont été touchés par la grippe. On peut compter 5 489 habitants dans cette commune.

Est-ce que ce médecin peut s'inquiéter de ce pourcentage ?

■ Exercice 4. Les OVNIS

★★★★☆ A

Corrigé page 196

Aux États-Unis d'Amérique, on admet que la fréquence mensuelle à laquelle on enregistre des déclarations d'habitants ayant vu des OVNIS (Objets Volants Non Identifiés) est égal à $f = 0,00003$ (3 habitants sur 100 000).

Dans la ville d'Albuquerque (Nouveau-Mexique), peuplé de 556 495 habitants (d'après le recensement de 2013), 20 personnes ont déclaré avoir vu des OVNIS.

Est-il raisonnable de penser que ce nombre est trop grand pour l'ignorer ?

■ Exercice 5. Coup de fatigue au centre d'appels

★★★★☆ A

Corrigé page 196

Dans un centre d'appels, on arrive à répondre en moyenne à 8 appels sur 10.

Un jour, le responsable s'aperçoit à la fin de la journée que sur 7 580 appels, seulement 6 005 ont été traités.

Le responsable doit-il envisager des sanctions envers ses subordonnés ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 On peut assimiler le fait de choisir au hasard parmi des 1 000 pièces de notre échantillon l'une d'elles à un tirage avec remise. Ainsi, si X désigne le nombre de pièces défectueuses, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1\,000; 0,0125)$.

On a alors le tableau suivant :

k	$P(X \leq k)$
5994	0.0234434928002
5995	0.0250609731794
5996	0.0267712509645
$\vdots$	$\vdots$
6131	0.974194304356
6132	0.975889063069
6133	0.97748959176

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est alors : $[6; 20]$.

- 2 Il y a eu 18 pièces défectueuses et $18 \in [6; 20]$ donc la machine est conforme aux réglages attendus. Il n'y a donc pas lieu de la réglée à nouveau.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La proportion théorique de « 5 » obtenus est $\frac{1}{6}$ si le dé est équilibré.
- 2 Les 150 lancers du dé constituent 150 répétitions de la même expérience et ce, de façons indépendantes. Ainsi, la loi binomiale peut être utilisée et X (représentant le nombre de « 5 » obtenus) suit la loi $\mathcal{B}(150; \frac{1}{6})$.

3 On a le tableau suivant :

k	$P(X \leq k)$
15	0.0144864717512
16	0.0263751550117
17	0.045121812803
$\vdots$	$\vdots$
33	0.96487990794
34	0.977908627081
35	0.986546879392

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est donc $[16; 34]$.

Mathilde a obtenu 13 fois la face « 5 » ; or, $13 \notin [16; 34]$. On peut donc supposer, au risque de 5 % (de se tromper) que le dé n'est pas équilibré.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Pour répondre à cette question, déterminons l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du pourcentage d'habitants atteints par la grippe.

On peut utiliser la loi binomiale $\mathcal{B}(5489; 0,3)$ (le 0,3 correspond à 30 %, qui est le pourcentage « théorique » de malades de la grippe en janvier).

k	$P(X \leq k)$
1579	0.0235614771327
1580	0.0252617994577
1581	0.0270635234939
$\vdots$	$\vdots$
1712	0.973369570673
1713	0.975120826501
1714	0.976774287579

L'intervalle de fluctuation est donc $\left[\frac{1580}{5489}; \frac{1713}{5489} \right]$, soit approximativement $[28,785; 31,208]$ (termes exprimés en pourcentages).

Le taux de malades de la grippe en janvier étant de 35 % et 35 % n'étant pas compris dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, il peut envisager, au risque d'erreur de 5 %, que la situation n'est pas normale.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Aidons-nous de la loi binomiale $\mathcal{B}(556495; 0,00003)$:

k	$P(X \leq k)$
8	0.0149654387744
9	0.0305602037888
10	0.0565957900676
$\vdots$	$\vdots$
24	0.965842646638
25	0.979129402771
26	0.987660829313

Il n'est donc pas anormal qu'il y ait entre 9 et 25 personnes par mois qui déclarent avoir vu des OVNIS. Ainsi, il n'est pas utile de s'inquiéter dans le cas présent : au risque d'erreur de 5 %, avoir 20 personnes déclarant avoir vu des OVNIS est « normal » ...

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Aidons-nous de la loi binomiale $\mathcal{B}(7580; 0,8)$:

k	$P(X \leq k)$
5994	0.0234434928002
5995	0.0250609731794
5996	0.0267712509645
$\vdots$	$\vdots$
6131	0.974194304356
6132	0.975889063069
6133	0.97748959176

L'intervalle de fluctuation des fréquences d'acceptation des appels est donc $\left[\frac{5995}{7580}; \frac{6132}{7580} \right]$, soit approximativement $[0,791; 0,808]$.

Ici, la fréquence d'acceptation des appels est égale à $\frac{6005}{7580} \approx 0,792 \in [0,791; 0,808]$. Par conséquent, au risque d'erreur de 5 %, on peut considérer que cette fréquence d'acceptations des appels est normal (dans la moyenne basse).

Le responsable n'a donc pas à réprimander ses subordonnés.