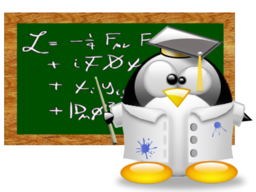
Le second degré

Stéphane PASQUET, 16 septembre 2014

Sommaire



Prérequis

- Factorisation & développement
- Étude des variations d'une fonction (niveau 2^{nde})

Définition *Trinôme du second degré*

On appelle `trinôme du second degré` toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Exemples

- $-x^2 + 2x - 3$ est un trinôme de degré 2, avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = -3$.
- $3x^2 - 4$ est un trinôme de degré 2, avec $a = 3$, $b = 0$ et $c = -4$.
- $x^2 - 8x$ est un trinôme de degré 2, avec $a = 1$, $b = -8$ et $c = 0$.

Définition *Racine d'un trinôme du second degré*

Une `racine` du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est une valeur α telle que :

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Exemples

- « 1 » est une racine de $x^2 + x - 2$ car $1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$.
- « -2 » est une racine de $x^2 - 4$ car $(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.

Définition *Discriminant*

On appelle `discriminant` du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemples

- Le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned} &\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &\Delta = 1 - 4 \\ &\boxed{\Delta = -3} \end{aligned}$$

- Le trinôme $5x^2 - 3x - 7$ a pour discriminant :

$$\begin{aligned} &\Delta = (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-7) \\ &\Delta = 9 + 140 \\ &\boxed{\Delta = 149} \end{aligned}$$

Définition *Forme canonique d'un trinôme de degré 2*

Tout trinôme de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$ admet une forme dite `forme canonique` :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

où Δ est le discriminant du trinôme.

Démonstration

Il suffit de développer la forme canonique :

$$\begin{aligned}
a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= ax^2 + bx + c.
\end{aligned}$$

■

Propriété

Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors il admet deux racines, que l'on peut noter :

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

  Dans ce cas,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

- Si $\Delta = 0$, alors il admet une racine dite « double » :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

  Dans ce cas,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2.$$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine et ne se factorise pas.

Démonstration

Partons de la forme canonique de $ax^2 + bx + c$:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- si $\Delta = 0$, alors elle devient :
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$
Cette expression s'annule uniquement lorsque $x = -\dfrac{b}{2a}$. On voit donc qu'il n'existe qu'une racine.
- Si $\Delta > 0$, alors $\sqrt{\Delta}$ existe et la forme canonique devient :
$$\begin{aligned} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$
On a ici utilisé l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$$\begin{aligned} &= a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$
Le trinôme a donc deux racines : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser la forme canonique, donc le trinôme n'est pas factorisable. ■

Propriété

Somme & produit

Soient α et β les deux racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ lorsque $\Delta > 0$.
Alors, α et β sont aussi les racines du trinôme $x^2 - Sx + P$, où $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$, et réciproquement.

Démonstration

Si $ax^2 + bx + c$ admet pour racines α et β, alors ce trinôme se factorise sous la forme $a(x-\alpha)(x-\beta)$.

...

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} a(x-\alpha)(x-\beta) &= a(x^2-\beta x-\alpha x+\alpha\beta) \\ &= a[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta] \\ &= a(x^2-Sx+P). \end{aligned}$$

On a alors démontré que le trinôme ax^2+bx+c pouvait aussi s'écrire $a(x^2-Sx+P)$ et donc, comme $a \neq 0$, que l'équation $ax^2+bx+c=0$ était équivalente à $x^2-Sx+P=0$. Ceci signifie que les racines de ax^2+bx+c sont aussi celles de x^2-Sx+P. ■

Exemple

Un rectangle a une aire égale à 7 et un périmètre égal à 11. Nous devons trouver ses dimensions.

Posons ℓ et L sa largeur et sa longueur.
On a alors : $2(\ell+L)=11$, soit $S=\ell+L=5,5$, et $P=\ell L=7$. Alors, ℓ et L sont racines du trinôme :

$$x^2-Sx+P=x^2-5,5x+7\ ,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta=(5,5)^2-4\times1\times7=2,25.$$

Les deux racines sont donc :

$$\alpha=\frac{-(-5,5)-\sqrt{2,25}}{2\times1}=2 \qquad ; \qquad \beta=\frac{5,5+\sqrt{2,25}}{2}=3,5.$$

Les dimensions du rectangle sont sont $L=3,5$ et $\ell=2$.

Propriété

Variations

On considère la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$. Alors, le tableau de variation de f est :

Si $a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Si $a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Démonstration

Posons $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ et considérons x_1 et x_2 deux nombres de $\left[-\infty\,;-\dfrac{b}{2a}\right]$ tels que $x_1<x_2$.

Alors,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x_1 + \frac{b}{2a} - x_2 - \frac{b}{2a}\right)\left(x_1 + \frac{b}{2a} + x_2 + \frac{b}{2a}\right) \\ &= a(x_1 - x_2)\left(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Or, $x_1 < -\dfrac{b}{2a}$ et $x_2 < -\dfrac{b}{2a}$ donc $x_1 + x_2 < -\dfrac{b}{a}$, soit $x_1 + x_2 + \dfrac{b}{a} < 0$.

De plus, $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$. Ainsi, $f(x_1) - f(x_2)$ est du signe de a sur $\left[-\infty\,; -\dfrac{b}{2a}\right]$, ce qui signifie que sur cet intervalle,

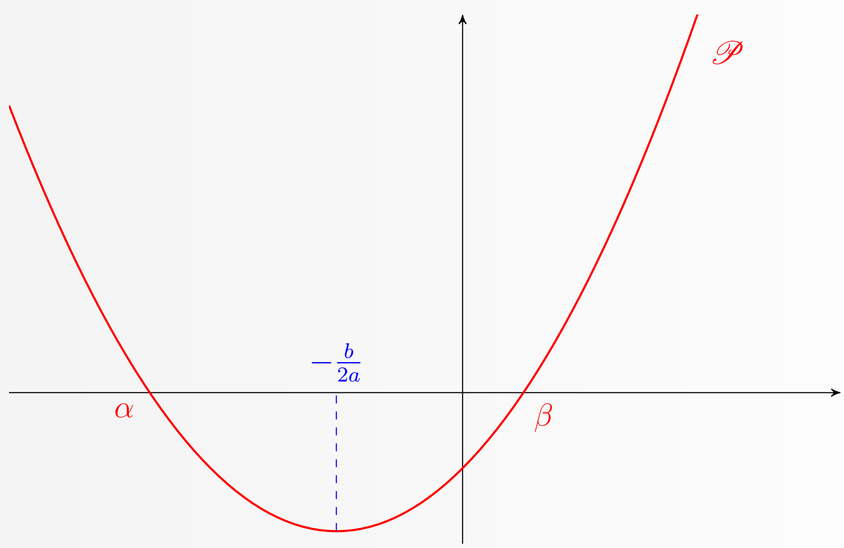
- Si $a > 0$, $f(x_1) > f(x_2)$ et donc f est décroissante ;
- Si $a < 0$, $f(x_1) < f(x_2)$ et donc f est croissante.

Un raisonnement similaire donnerait le contraire sur $\left[-\dfrac{b}{2a}\,; +\infty\right]$, d'où la propriété. ■

Remarque

Interprétation graphique des racines

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet pour racines distinctes α et β, alors sa représentation graphique $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse α et β.



Si le trinôme admet un discriminant nul, alors l'axe des abscisses sera *tangent* à $\mathscr{P}$ en son sommet, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un unique point d'intersection.

Si $\Delta < 0$, il n'y a aucun point d'intersection.

Propriété

Signes d'un trinôme

- Si $\Delta < 0$,

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		signe de a	

- Si $\Delta = 0$,

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + x$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$,

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + x$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Cette dernière propriété est une évidence si l'on regarde la représentation graphique d'un trinôme en fonction du signe de a.