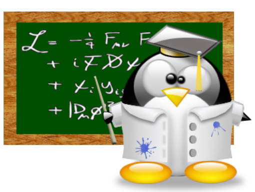
Stéphane PASQUET, 5 novembre 2014

Sommaire



Prérequis

- Sens de variation d'une fonction
- Tableau de variation d'une fonction

Définition

Domaine de définition

On appelle `domaine de définition` d'une fonction f l'ensemble de toutes les valeurs de x telles que $f(x)$ existe.
On le note fréquemment $\mathscr{D}_f$.

Exemples

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble de toutes les valeurs de x telles que l'on puisse calculer l'inverse de x, c'est-à-dire toutes les valeurs réelles sauf 0 :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^* = \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[\,.$$

2. Si $g(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ alors $\mathscr{D}_g$ est l'ensemble des valeurs de x telles que $x^2 - 9 \neq 0$, soient $\mathbb{R}$ privé des valeurs -3 et 3 :

$$\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\} = \left]-\infty\,;-3\right[\cup \left]-3\,;3\right[\cup \left]3\,;+\infty\right[\,.$$

Définition

La fonction racine carrée (fonction de référence)

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$x \longmapsto \sqrt{x}\,.$$

Propriété

Sens de variation de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

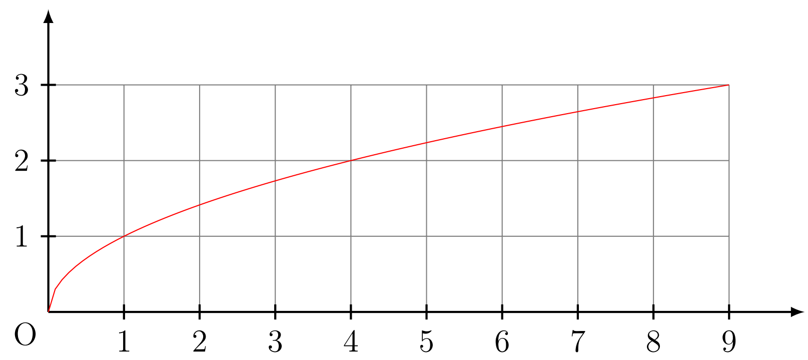
Démonstration

Soient deux nombres réels a et b tels que $0 < a < b$. Posons $f(x) = \sqrt{x}$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(a) - f(b) &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\
&= \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}
\end{aligned}$$

Or, $a < b$ donc $a - b < 0$; de plus, $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{b} > 0$ donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.
Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$, ce qui signifie que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ (puisque a et b sont pris quelconques dans cet intervalle). ■

La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ dans un repère orthonormé est la suivante :

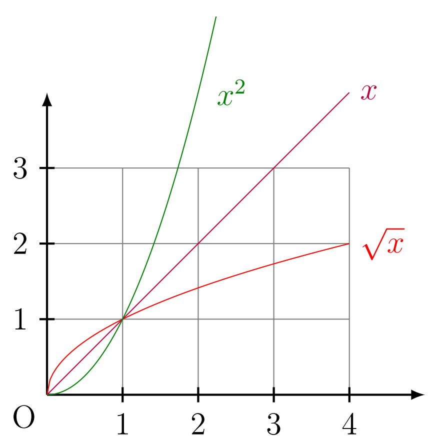


Propriété *Position relative de $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$*

Sur $[0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{array}{ll} x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} & \text{sur } [0\,;1[\\ \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2 & \text{sur } [1\,;+\infty[\end{array}$$

Cette propriété peut-être vue sur le graphique page suivante.



Mais on le démontre de façon algébrique :

Démonstration

Posons $r(x) = \sqrt{x}$, $i(x) = x$ et $c(x) = x^2$.

- $$\begin{aligned} r(x) - i(x) &= \sqrt{x} - x \\ &= \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ &= \sqrt{x}\left(1 - \sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

  Or, sur $[0\,;1[$, $0 \leqslant \sqrt{x} < 1$ donc $-1 < -\sqrt{x} \leqslant 0$; ainsi, $1 - 1 < 1 - \sqrt{x} < 0 + 1$, soit $0 < 1 - \sqrt{x} \leqslant 1$.

  On obtient de même que sur $[1\,;+\infty[$, $1 - \sqrt{x} \leqslant 0$.

  De plus, $\sqrt{x} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration (suite)

Donc, $r(x) - i(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1[$, soit $r(x) \geqslant i(x)$ sur $[0\,;1[$, et $r(x) \leqslant i(x)$ sur $[1\,;+\infty[$. La courbe représentative de r est donc au-dessus de celle de i sur $[0\,;1[$ et au-dessous sur $[0\,;+\infty[$.

- $c(x) - i(x) = x^2 - x$

  $\qquad\qquad\quad = x(x-1).$

  Or, , $0 \leqslant x < 1$ sur $[0\,;1[$, donc $-1 \leqslant x - 1 < 0$ sur $[0\,;1[$, et $x - 1 \geqslant 0$ sur $[1\,;+\infty[$. Ainsi, $x(x-1) \leqslant$ sur $[0\,;1[$ et donc $c(x) < i(x)$ sur $[0\,;1[$, ce qui signifie que la courbe représentative de c est au-dessus de celle de i, et sur $[1\,;+\infty[$, $c(x) \geqslant i(x)$.

Finalement, on obtient que sur $[0\,;1[$, $c(x) \leqslant i(x)$ et $i(x) \leqslant r(x)$, donc $c(x) \leqslant i(x) \leqslant r(x)$, et sur $[1\,;+\infty[$, $r(x) \leqslant i(x) \leqslant c(x)$. ■

Définition *La fonction valeur absolue (fonction de référence)*

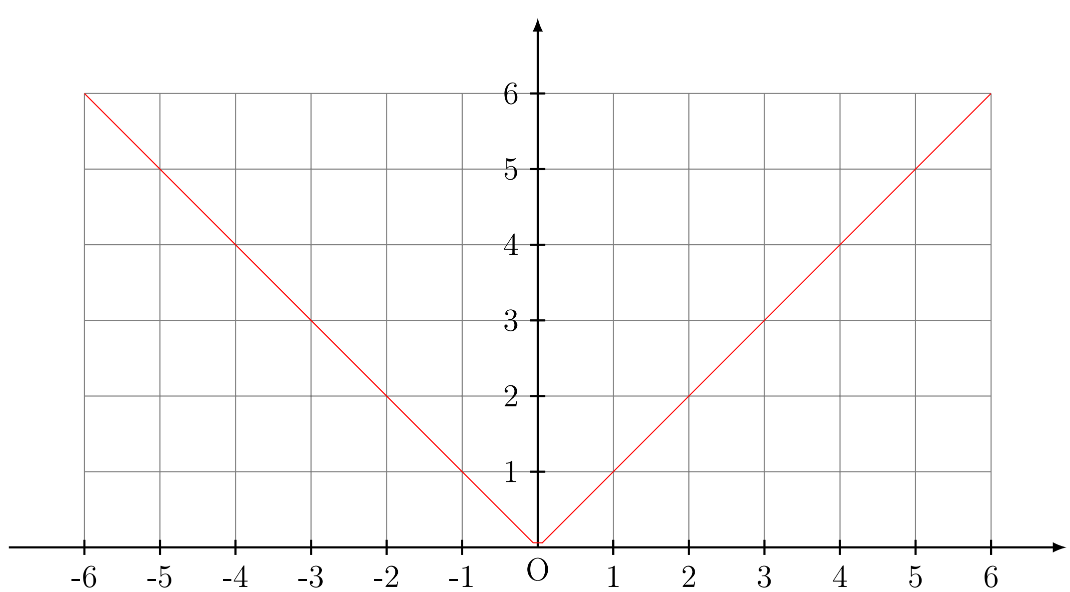
La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Posons $f(x) = |x|$.
Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = x$ donc la représentation graphique de f dans un repère (O ;I ;J) est celle de la fonction affine $x \longmapsto x$ sur $[0\,;+\infty[$, c'est-à-dire la demi-droite d'origine O et faisant un angle de 45° avec la demi-droite [O ;I).

Si $x < 0$, alors $f(x) = -x$ donc la représentation graphique de f dans un repère (O ;I ;J) est celle de la fonction affine $x \longmapsto -x$ sur $[-\infty\,;0[$, c'est-à-dire la demi-droite d'origine O et faisant un angle de 135° avec la demi-droite [O ;I).

On obtient alors :



Propriété

Sens de variation de $u(x) + k$

Soit u une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_u$.
Alors, la fonction définie par $x \longmapsto u(x) + k$ a le même sens de variation que la fonction $x \longmapsto u(x)$.

Démonstration

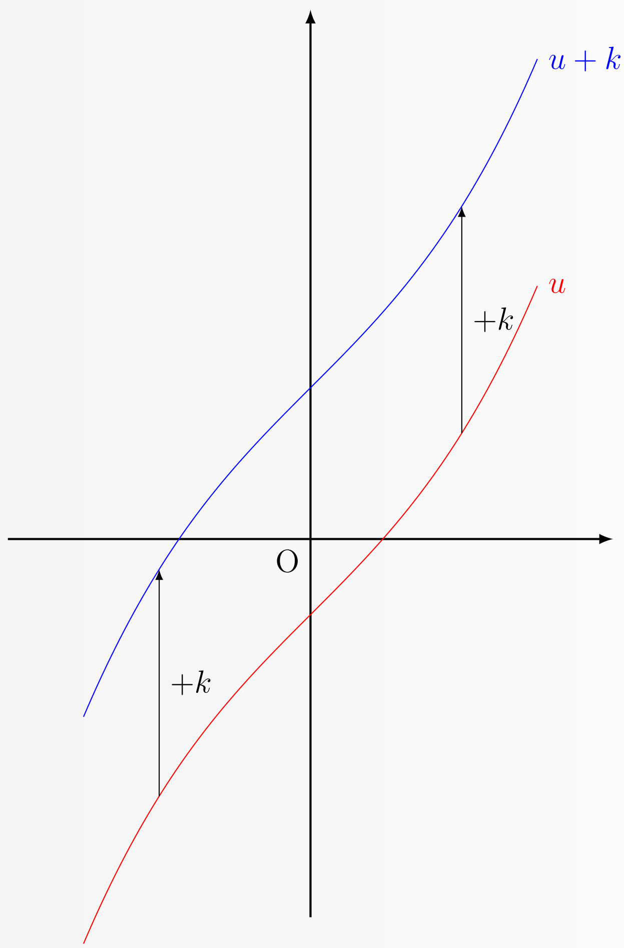
Posons $f(x) = u(x) + k$. Alors, pour a et b dans un intervalle de $\mathscr{D}_u$ tels que $a < b$:

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= u(a) + k - (u(b) + k) \\ &= u(a) + k - u(b) - k \\ &= u(a) - u(b) \end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $f(a) - f(b)$ est le même que celui de $u(a) - u(b)$, ce qui signifie que les variations de f sont les mêmes que celles de u. ■

Remarque

Ajouter une constante k à $u(x)$ revient à décaler verticalement de k unités la courbe représentative de u.



Exemples

1. La fonction $x \longmapsto x^2 - 5$ a le même sens de variation que la fonction carré.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} + 2$ a le même sens de variation que la fonction inverse.
3. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x} - 1$ a le même sens de variation que la fonction racine carrée.

Propriété

Sens de variation de $u(x+k)$

Soit u une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_u$. La fonction définie par $x \longmapsto u(x+k)$ a le même sens de variation que la fonction u sur $\mathscr{D}_u$.

Démonstration

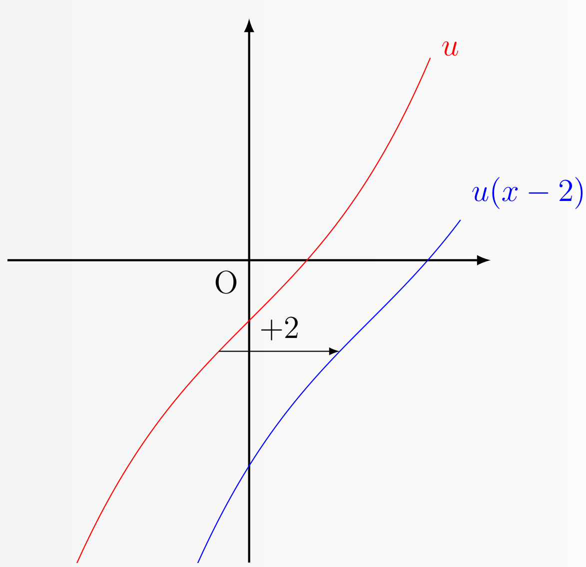
Posons $f(x) = u(x+k)$ et considérons a et b deux nombres d'un intervalle de $\mathscr{D}_u$ tels que $a < b$ et tels que $a+k$ et $b+k$ soient dans le même intervalle. Alors,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= u(a+k) - u(b+k) \\ &= u(A) - u(B) \qquad \text{en posant } A = a+k \text{ et } B = b+k \end{aligned}$$

Or, $A < B$ donc $u(A) - u(B)$ a le même signe que $u(a) - u(b)$.
Par conséquent, $f(a) - f(b)$ et $u(a) - u(b)$ ont le même signe, ce qui signifie que f et u ont le même sens de variation. ■

Remarque

La courbe représentative de $x \longmapsto u(x+k)$ est obtenue à partir de celle de u en la décalant horizontalement de $-k$ unités.



Exemples

1. La fonction $x \longmapsto (x-2)^2$ a le même sens de variation que la fonction carré.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x+3}$ a le même sens de variation que la fonction inverse.
3. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x-7}$ a le même sens de variation que la fonction racine carrée.

Même si $x \mapsto u(x+k)$ a le même sens de variation que u, ce n'est pas sur le même ensemble comme le montre l'exemple suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$		$\nearrow$

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$(x+5)^2$	$\searrow$		$\nearrow$

Propriété

Sens de variation de ku

Soit u une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_u$.
Si $k > 0$, la fonction définie par $x \longmapsto ku(x)$ a le même sens de variation que la fonction u sur $\mathscr{D}_u$.
Si $k < 0$, la fonction définie par $x \longmapsto ku(x)$ a le sens de variation opposé de celui de la fonction u sur $\mathscr{D}_u$.

Démonstration

Posons $f(x) = ku(x)$ et considérons a et b sur un intervalle de $\mathscr{D}_u$ tels que $a < b$. Alors,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= ku(a) - ku(b) \\ &= k\big(u(a) - u(b)\big). \end{aligned}$$

Ainsi, si $k > 0$, $f(a) - f(b)$ et $u(a) - u(b)$ ont le même signe, ce qui signifie que f et u ont le même sens de variation.
Si $k < 0$, alors $f(a) - f(b)$ a le signe opposé de $u(a) - u(b)$ donc f et u ont un sens de variation opposé. ■

Exemples

1. La fonction $x \longmapsto -2x^2$ a un sens de variation opposé de celui de la fonction carré.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{-6}{x}$ a un sens de variation opposé de celui de la fonction inverse.
3. La fonction $x \longmapsto 3\sqrt{x}$ a le même sens de variation que la fonction racine carrée.

Propriété

Sens de variation de $\sqrt{u}$

Soit u une fonction définie positive sur un ensemble $\mathscr{D}_u$. Alors, $\sqrt{u}$ est une fonction dont le sens de variation est le même que u.

Démonstration

Posons $f(x) = \sqrt{u(x)}$ et considérons a et b sur un intervalle de $\mathscr{D}_u$ tels que $a < b$. Alors,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \sqrt{u(a)} - \sqrt{u(b)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{u(a)} - \sqrt{u(b)}\right)\left(\sqrt{u(a)} + \sqrt{u(b)}\right)}{\left(\sqrt{u(a)} + \sqrt{u(b)}\right)} \\ &= \frac{u(a) - u(b)}{\sqrt{u(a)} + \sqrt{u(b)}} \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{u(a)} + \sqrt{u(b)} > 0$ donc $f(a) - f(b)$ est du même signe que $u(a) - u(b)$, ce qui signifie que f et u ont le même sens de variation. ■

Propriété

Sens de variation de $\sqrt{u}$

Soit u une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_u$ telle que $u(x) \neq 0$. Alors, $\frac{1}{u}$ est une fonction dont le sens de variation est le contraire de celui de u.

Démonstration

Posons $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ et considérons a et b sur un intervalle de $\mathscr{D}_u$ tels que $a < b$, avec $u(a)$ et $u(b)$ de même signe (on considère a et b sur un intervalle où la fonction u est soit au-dessus de l'axe des abscisses, soit en-dessous). Alors,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{1}{u(a)} - \frac{1}{u(b)} \\ &= \frac{u(b) - u(a)}{u(a)u(b)} \end{aligned}$$

Or, $u(a)u(b) > 0$ (car $u(a)$ et $u(b)$ sont du même signe) donc $f(a) - f(b)$ est du signe opposé de $u(a) - u(b)$, ce qui signifie que f et u ont un sens de variation contraire. ■

Exemples

1. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x-2}$ est décroissante sur $]2\,;+\infty[$ car la fonction $x \longmapsto x - 2$ est croissante sur $]2\,;+\infty[$.

…

Exemples (suite)

2 La fonction $x \longmapsto \sqrt{x-2}$ est croissante sur $[2\,;+\infty[$ car $x \longmapsto x-2$ est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

Méthode

Quand on a la chance d'avoir uen fonction dont l'expression ne fait intervenir x qu'à un seul endroit, on peut très souvent trouver son sens de variation en la « décomposant » en fonction de référence.
Par exemple, si $f(x) = \dfrac{-2}{x^2+1}$, on pourra écrire :

$$x \overset{u}{\longmapsto} x^2 \overset{v}{\longmapsto} x^2+1 \overset{w}{\longmapsto} \sqrt{x^2+1} \overset{t}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \overset{s}{\longmapsto} \frac{-2}{x^2+1}$$

- u est la fonction carré ; donc elle est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$;
- v est une fonction affine ($v(x) = x+1$) donc de la forme $v = u+k$, donc on ne change pas le sens de variation de u. $x \longmapsto x^2+1$ est alors croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$;
- w est la fonction racine carrée donc de la forme $w = \sqrt{v})$; par conséquent, on ne change pas le sens de variation. $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est alors croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$;
- t est la fonction inverse donc on change le sens de variation. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est alors décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty\,;0]$;
- s est une fonction de la forme $s = kt$, avec $k = -2 < 0$ donc on change le sens de variation. $f \;:\; x \longmapsto \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$ est alors croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

Ce qui suis est hors programme mais souvent traité par les enseignants

Définition *Fonction paire, fonction impaire*

On dit qu'une fonction f est `paire` si :

- son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ est centré en 0 ;
- pour tout x dans $\mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

On dit qu'une fonction f est `impaire` si :

- son domaine de définition $\mathscr{D}_f$ est centré en 0 ;
- pour tout x dans $\mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemples

1. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
De plus, $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$.
Donc f est paire.
2. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$.
Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
De plus, $f(-x)=(-x)\sqrt{(-x)^2+1}=-x\sqrt{x^2+1}=-f(x)$.
Donc f est impaire.

Remarque

Si une fonction est paire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (comme la fonction carré).
Si une fonction est impaire, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère (comme la fonction inverse ou la fonction cube).

Propriété

Symétrie

Soit f une fonction.

- S'il existe un réel a tel que :

$$f(a+h)=f(a-h)$$

pour tout réel h tel que $a+h\in\mathscr{D}_f$ et $a-h\in\mathscr{D}_f$, alors la représentation graphique de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $y=a$.
- S'il existe un couple de réels $(a\,;b)$ tel que :

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$$

pour tout réel h tel que $a+h\in\mathscr{D}_f$ et $a-h\in\mathscr{D}_f$, alors la représentation graphique de f est symétrique par rapport au point $\Omega\,(a\,;b)$.