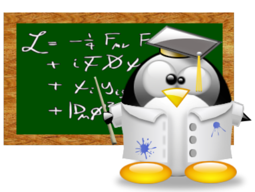
Sommaire



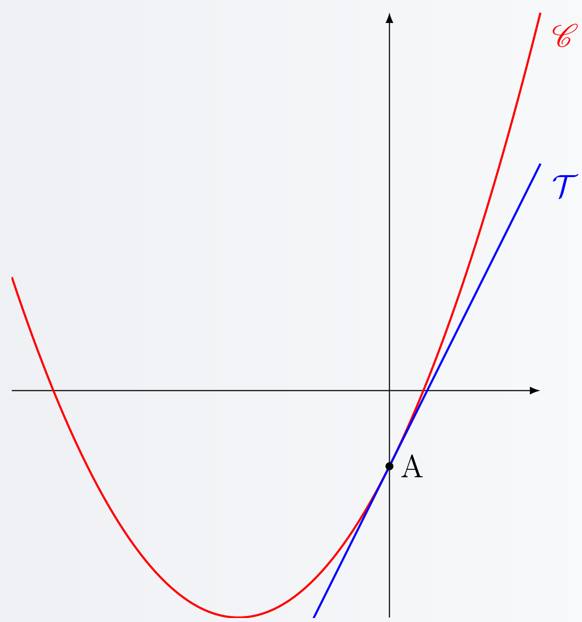
Prérequis

- Calcul du coefficient directeur d'une droite sachant les coordonnées de deux points de cette droite

Définition *Tangente à une courbe en un point*

Soit f une fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}$.
On appelle `tangente` à $\mathscr{C}$ en A la droite $\mathcal{T}$ qui « frôle » $\mathscr{C}$ en A.

Exemple



Ici, $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
On notera fréquemment cette tangente : $\mathcal{T}_A$.

Activité *Découverte du nombre dérivé*

On considère une fonction f telle que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ soit « en un seul morceau » sur un intervalle I.
On considère alors deux points $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ et $\mathrm{M}(a+h\,;f(a+h))$ de $\mathscr{C}$, avec $a \in I$ et $h > 0$ tel que $a+h \in I$.

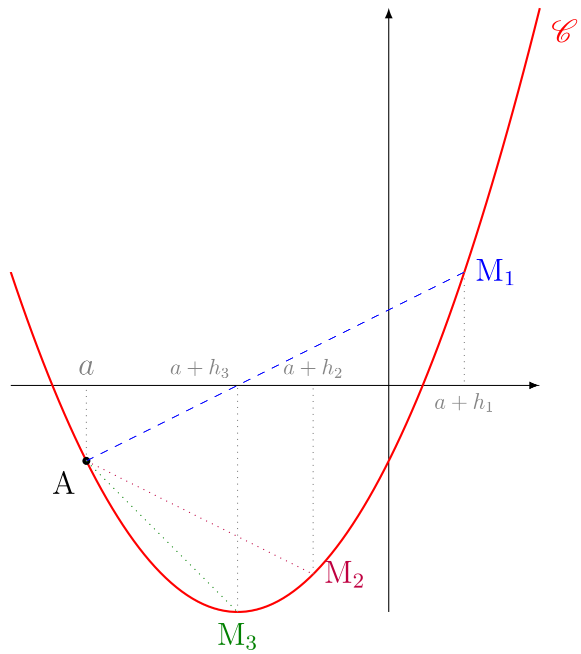
1 Déterminer une expression du coefficient directeur de (AM) en fonction de a et h.
On le notera $\tau(h)$.

2 Que se passe-t-il pour (AM) si h se rapproche de 0 ?
Conclure alors sur le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathscr{C}$.

1 Le coefficient directeur de (AM) est :

$$\tau(h) = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\ .$$

2 Si h se rapproche de 0, alors M se rapproche de A :



Dans ce cas, (AM) se rapproche de la tangente en A à $\mathscr{C}$.
Ainsi, si h se rapproche de 0, $\tau(h)$ se rapproche du coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$.

Notation

Notation d'une limite

On notera :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

le nombre « limite » auquel on arrive lorsque l'on calcule $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour h se rapprochant de plus en plus de 0.

Définition

Nombre dérivé en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a, de courbe représentative $\mathscr{C}$.
On appelle `nombre dérivé de` f `en` a le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, c'est-à-dire, d'après l'activité précédente :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

On notera alors $f'(a)$ ce nombre dérivé de f en a.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ .$$

Remarque

Il est important d'associer $f'(a)$ au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Définition *Fonction dérivable*

On dit qu'une fonction f est `dérivable en` a si $f'(a)$ existe et n'est pas infini.
On dit que f est `dérivable sur un intervalle I` si f est dérivable en tout point de I.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$.
Est-elle dérivable en 2 ? Pour le savoir, regardons si $f'(2)$ existe.
Pour cela, exprimons d'abord $\tau(h)$ (que l'on appelle le taux d'accroissement de f) :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\ &= \frac{(2+h)^2-2^2}{h}\\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h}\\ &= \frac{h(4+h)}{h}\\ &= 4+h \qquad \text{avec } h \neq 0\,.\end{aligned}$$

Ainsi, si h se rapproche de 0, $\tau(h)$ se rapproche de $4+0=4$ et donc :

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4\,.$$

$f'(2)$ existe donc f est dérivable en 2.

Définition *Fonction dérivée*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On appelle `fonction dérivée de` f la fonction notée $f'(x)$ qui à un réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Exemple

Soit $f(x) = x^2$, et soit $a \in \mathbb{R}$. Le taux d'accroissement de f est :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{(a+h-a)(a+h+a)}{h}\\ &= \frac{h(2a+h)}{h}\\ &= 2a+h \qquad \text{avec } h \neq 0\,.\end{aligned}$$

…

Exemple (suite)

Ainsi,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0}(2a + h) = 2a.$$

Par conséquent, la dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = 2x.$$

Propriété

Fonctions dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Remarques
k	0	$k \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$x \neq 0$

Propriété

Dérivée d'une somme de fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors,

$$(u + v)' = u' + v' \; .$$

Propriété

Dérivée d'un produit d'une fonction par une constante

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et k un réel. Alors,

$$(ku)' = ku' \; .$$

Exemple

Soit $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$.

Alors, $f'(x) = 5(x^2)' - 3(x)' + (7)'$

$$= 5 \times 2x - 3 \times 1 + 0$$

$$= 10x - 3.$$

Propriété *Dérivée d'un produit de fonctions*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors,

$$(uv)' = u'v + uv' \ .$$

Démonstration

Calculons le taux d'accroissement de la fonction uv en a :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a) - u(a+h)v(a) + u(a+h)v(a+h)}{h}\end{aligned}$$

(On a ici fait apparaître $u(a+h)v(a)$)

$$\begin{aligned} &= \frac{\big[u(a+h) - u(a)\big]v(a) + u(a+h)\big[v(a+h) - v(a)\big]}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h}v(a) + u(a+h)\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \ .\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} u(a+h) = u(a).$$

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a).$$

Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. ■

Exemple

Soit $f(x) = x\sqrt{x}$. Posons $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \ .}$$

Propriété

Dérivée d'un quotient de fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que $v(x) \neq 0$ pour tout x de I. Alors,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ .$$

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1}$.
Posons $u(x) = 2x^2 - 5x + 1$ et $v(x) = x - 1$.
Alors, $u'(x) = 4x - 5$ et $v'(x) = 1$ d'où :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} \\
&= \frac{(4x-5)(x-1) - (2x^2 - 5x + 1) \times 1}{(x-1)^2} \\
&= \frac{4x^2 - 4x - 5x + 5 - 2x^2 + 5x - 1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2}\ .}$$

Remarque

Dans le cas de la dérivée d'un quotient, il n'est pas nécessaire de développer le carré au dénominateur.

Propriété

Équation de la tangente

Soit f une fonction dérivable en $a \in I$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.
Soit $\mathrm{A}(a\,;f(a))$. La tangente $\mathcal{T}_A$ a pour équation réduite :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple

Reprenons la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1}$ de l'exemple précédent.

Nous avions trouvé : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2}$ donc en $\mathrm{A}(0\,;f(0))$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_A : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \\
\text{soit } &\mathcal{T}_A : y = 4x - 1.
\end{aligned}$$

Propriété

Variations et dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I ;
- Si $f'(x) \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

Nous n'allons pas faire de démonstration de ce résultat mais nous pouvons tout de même voir que si le nombre dérivée de f est positif en a, cela signifie que sa tangente « monte » (nombre dérivé = coefficient directeur de la tangente). Et si la tangente « monte », cela signifie que la courbe aussi (localement) et donc que la fonction est croissante (localement).
En appliquant ce raisonnement à tout réel a de I, on constate la propriété.

Exemple

Reprenons la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x - 1}$ de l'exemple précédent.
Nous avions trouvé : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2}$.
Le discriminant du numérateur est :

$$\Delta = (-4)^4 - 4 \times 2 \times 4 = 16 - 32 = -16 < 0.$$

Donc le numérateur est positif. De plus, le dénominateur est aussi positif donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
f est donc croissante sur chacun de ces deux intervalles.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f		↗	‖	↗	

Définition

Extremum d'une fonction

Un `extremum` est un maximum ou un minimum d'une fonction. Il est obtenu lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe.

Exemple

Soit $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$. Alors, $f'(x) = 6x - 4$ et on a :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Pour $x = \dfrac{2}{3}$, $f'(x)$ s'annule en changeant de signe donc un extremum est atteint pour $x = \frac{2}{3}$ (ici, il s'agit du sommet de la parabole d'équation $y = 3x^2 - 4x + 2$).