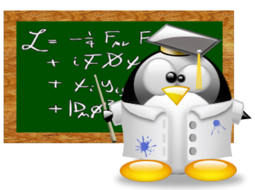
Sommaire



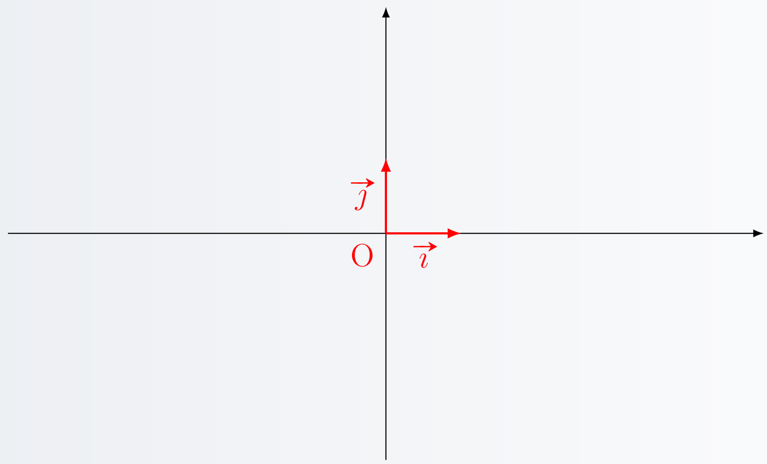
Prérequis

- Fonctions affines
- Équation réduite d'une droite dans un repère
- Vecteurs (notions vues en Seconde)

Définition *Repère orthonormé (rappel)*

Un `repère orthonormé` est la donnée de deux droites perpendiculaires en un point O sur lesquelles se trouvent deux vecteurs de même norme et d'origine O. Ces vecteurs sont appelés `vecteurs unitaires`.

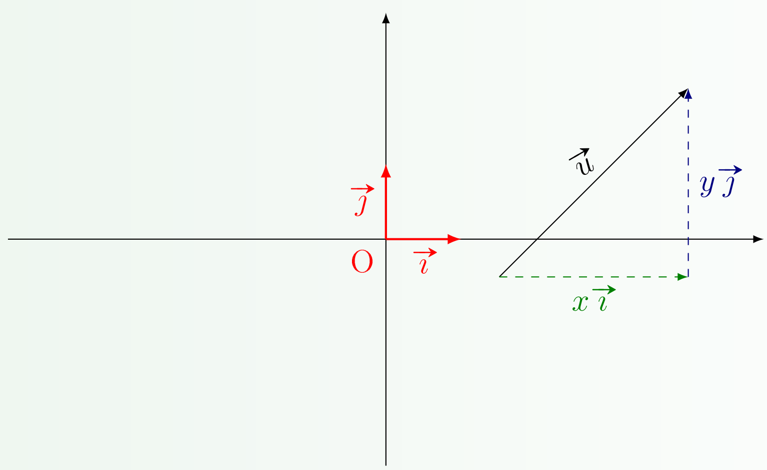
Exemple



Ce repère est nommé $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

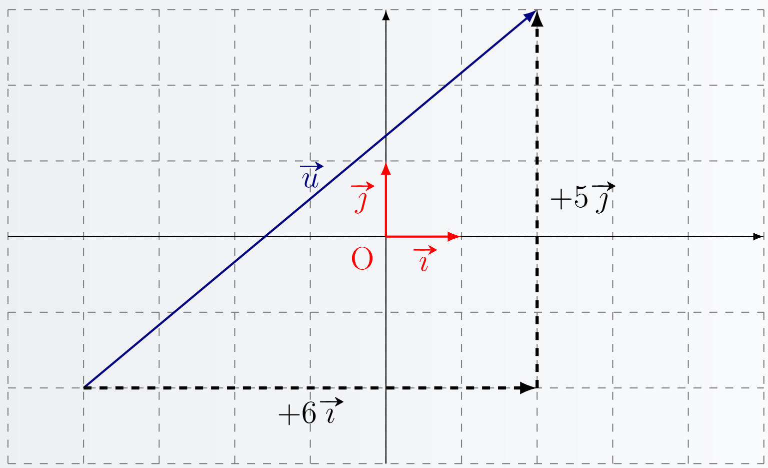
Définition *Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé (rappel)*

Soit $\vec{u}$ un vecteur dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
L'abscisse x et l'ordonnée y de $\vec{u}$ sont les nombres tels que l'on ait :



On note alors $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Exemple



Ici, $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.

Propriété

Colinéarité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff xy'-x'y=0.$$

Démonstration

Supposons que $x'\neq 0$ et $y'\neq 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires} &\iff \exists\ k\in\mathbb{R},\ \ \vec{u}=k\vec{v}\\
&\iff \exists\ k\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x=kx'\\ y=ky'\end{cases}\\
&\iff \exists\ k\in\mathbb{R},\ \begin{cases} \dfrac{x}{x'}=k\\ \dfrac{y}{y'}=k\end{cases}\\
&\iff \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}\\
&\iff xy'=x'y\\
&\iff xy'-x'y=0.
\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

Supposons maintenant que $x' = 0$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires} &\iff \exists\ k \in \mathbb{R},\ \vec{u} = k\vec{v}\\ &\iff \exists\ k \in \mathbb{R},\ x = 0 \text{ et } y = ky'\\ &\iff xy' = 0 = x'y\\ &\iff xy' - x'y = 0.\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue pourrait être envisagé pour $y' = 0$. ■

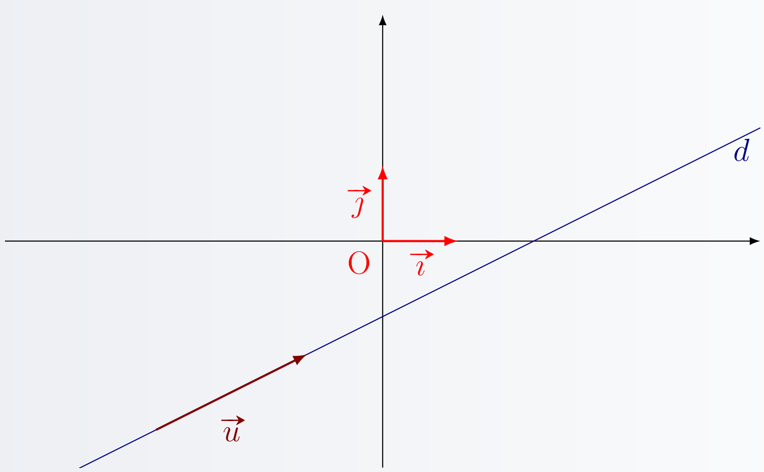
Exemples

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $-1 \times (-8) - 2 \times 4 = 8 - 8 = 0$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $3 \times 7 - (-5) \times 1 = 21 + 5 = 26 \neq 0$.

Définition — *Vecteur directeur d'une droite*

On appelle `vecteur directeur d'une droite` tout vecteur ayant la même direction que la droite.

Exemple



Ici, le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, mais tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d.

Définition *Équation cartésienne d'une droite*

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, une `équation cartésienne d'une droite` est une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0.$$

Méthode *Obtenir une équation cartésienne connaissant deux points*

Soient $\mathrm{A}(-1\,;2)$ et $\mathrm{B}(5\,;-6)$.
Considérons un point $\mathrm{M}(x\,;y)$ quelconque sur la droite (AB). Alors,

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-(-1)\\-6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-1)\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
\iff\ & 6(y-2)-(-8)(x+1)=0\\
\iff\ & 8x+6y-12+8=0\\
\iff\ & 8x+6y-4=0\\
\iff\ & 4x+3y-2=0 \quad \text{(en divisant tout par 2).}
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc :

$$(\mathrm{AB})\ :\ 4x+3y-2=0.$$

Méthode *Obtenir une équation cartésienne connaissant un vecteur directeur et un point*

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ passant par le point $\mathrm{A}(-5\,;4)$.
Considérons un point $\mathrm{M}(x\,;y)$ quelconque sur d. Alors,

$$\begin{aligned}
&\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x+5\\y-4\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
\iff\ & 4(y-4)-(-3)(x+5)=0\\
\iff\ & 3x+4y-16+15=0\\
\iff\ & 3x+4y-1=0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite d est donc :

$$d\ :\ 3x+4y-1=0.$$

Propriété

Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax+by+c=0$ est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Démonstration

$$\begin{aligned} ax+by+c=0 &\iff by=-ax-c \\ &\iff \begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b} & \text{si } b\neq 0 \\ x=-\dfrac{c}{a} & \text{si } b=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que si $b=0$, la droite est verticale, donc a pour vecteur directeur tout vecteur de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{R}$.

Si $b\neq 0$, la droite a pour équation réduite $y=mx+p$, avec $m=-\dfrac{a}{b}$ et $p=-\dfrac{c}{b}$, donc a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$. En effet, par définition du coefficient directeur m, si l'on se trouve sur la droite d et si l'on avance parallèlement à l'axe des abscisses d'une unité, on montera (ou descendra si $m<0$) de m unités parallèlement à l'axe des ordonnées. Donc $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est bien un vecteur directeur de d, soit $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{a}{b}\end{pmatrix}$, aussi bien que tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$, en particulier le vecteur $\vec{u}=-b\vec{v}$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. ■

Ne confondez pas *coefficient directeur* et *vecteur directeur*.
Le premier est un nombre (c'est la « pente » de la droite) et le second est un vecteur ...

Exemple

La droite d'équation cartésienne :

$$3x-4y+7=0$$

a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Propriété

Droites parallèles et coefficients directeurs

Soient d_1 et d_2 deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

$$d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont parallèles} \iff \vec{u_1} \text{ et } \vec{u_2} \text{ sont colinéaires.}$$

Exemple

$d_1 : 2x - 5y + 7 = 0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

$d_2 : -6x + 15x + 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-15\\-6\end{pmatrix} = -3\overrightarrow{u_1}$.
$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont alors colinéaires ; par conséquent, d_1 et d_2 sont parallèles.

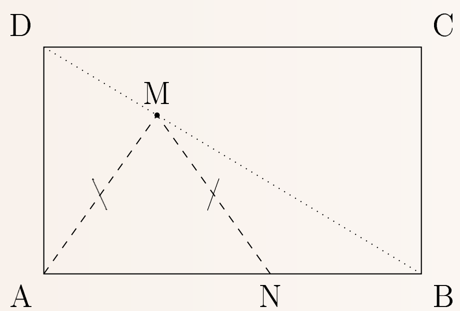
Remarque

Jusqu'à présent, nous nous sommes situés dans un repère orthonormé, mais tout ce qui a été vu précédemment dans ce chapitre est valable dans tous les repères.
Nous allons d'ailleurs nous servir de cette remarque dans certains exercices.

Méthode

Rapporter une figure à un repère

Une figure de géométrie euclidienne où se trouve un triangle, un carré, un rectangle, etc. peut être rapportée à un repère dont les axes sont deux des côtés du triangle, carré, rectangle, ...
Voyons un exemple :



ABCD est un rectangle tel que AD = 3 et AB = 5.
Soit M un point de [BD] ; on construit alors le point N sur [AB] tel que AMN soit isocèle en M.

Existe-t-il une position de M telle que AMN soit équilatéral ?

1 Étape 1 : on rapporte la figure à un repère.

Nous allons, par exemple, considérer le repère $\left(\mathrm{A} ; \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

2 Étape 2 : on donne les coordonnées des points qui nous sont nécessaires.

A(0 ; 0) ; B(5 ; 0) ; D(0 ; 3).

3 Étape 3 : on commence à raisonner.

- On commence par trouver une équation de (BD) pour exprimer les coordonnées de M, puis de N.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y) \in (\mathrm{BD}) &\iff \overrightarrow{\mathrm{DM}}\begin{pmatrix}x\\y-3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{DB}}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff -3x - 5(y-3) = 0\\
&\iff -3x - 5y + 15 = 0\\
&\iff y = -\frac{3}{5}x + 3.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{M}\left(x\,; -\frac{3}{5}x + 3\right)$ pour $x \in [0\,;5]$.

AMN est isocèle en M donc l'abscisse de N est le double de x : N$(2x\,;0)$. Cela sous-entend que $x \in \left[0\,;\dfrac{5}{2}\right]$.

- On met en équation notre problème.
AMN est équilatéral donc AM = AN. On peut alors dire que $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AN}^2$.

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}^2 &= x^2 + \left(3 - \frac{3}{5}x\right)^2 \\ &= x^2 + 9 - \frac{18}{5}x + \frac{9}{25}x^2 \\ &= \frac{34}{25}x^2 - \frac{18}{5}x + 9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AN}^2 &= (2x)^2 \\ &= 4x^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AN}^2 &\iff \frac{34}{25}x^2 - \frac{18}{5}x + 9 = 4x^2 \\ &\iff \frac{66}{25}x^2 + \frac{18}{5}x - 9 = 0 \\ &\iff 66x^2 + 90x - 225 = 0 \quad \text{(en multipliant par 25)} \\ &\iff 22x^2 + 30x - 75 = 0 \quad \text{(en divisant par 3).}\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $22x^2 + 30x - 75$ est :

$$\Delta = 900 - 4 \times 22 \times (-75) = 7\,500.$$

Il a donc deux racines :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-30 - \sqrt{7\,500}}{44} \\ &= \frac{-30 - 50\sqrt{3}}{44} \\ &= \frac{-15 - 25\sqrt{3}}{22} < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{-30 + \sqrt{7\,500}}{44} \\ &= \frac{-30 + 50\sqrt{3}}{44} \\ &= \frac{-15 + 25\sqrt{3}}{22} \approx 1,3\end{aligned}$$

4 Étape 4 : on conclut.

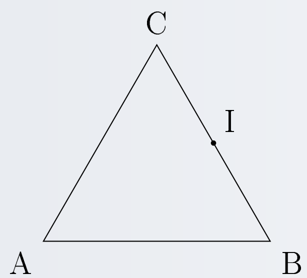
La condition sur x, à savoir $x \in \left[0\,;\dfrac{5}{2}\right]$, n'est pas remplie par α mais l'est par β. Par conséquent, il existe une position de M telle que AMN soit équilatéral. Dans ce cas, $y = -\dfrac{3}{5}\beta + 3 = -\dfrac{3}{5} \times \dfrac{-15 + 25\sqrt{3}}{22} + 3 = \dfrac{9 - 15\sqrt{3}}{22} + 3 = \dfrac{75 - 15\sqrt{3}}{22}$.

Ainsi, $\mathrm{M}\left(\dfrac{-15 + 25\sqrt{3}}{22}\,;\dfrac{75 - 15\sqrt{3}}{22}\right)$.

Remarque

Dans la méthode précédente, nous nous sommes rapportés à un repère orthonormé car il était question de distances (et dans ce cas, les formules de Seconde que nous connaissons sont valables uniquement dans un tel repère).
Mais s'il est question d'alignement (par exemple), ou d'autre chose qui ne fait pas intervenir de distances, le fait de se placer dans un repère quelconque suffit.

Exemple



ABC est un triangle équilatéral. I est le milieu de [BC].
Dans le repère $\left(A\ ;\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}\right)$, on a :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Donc $I\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.