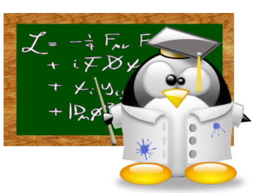
Sommaire



Prérequis

- Notion de vecteurs
- Équation cartésienne de droites
- Trigonométrie

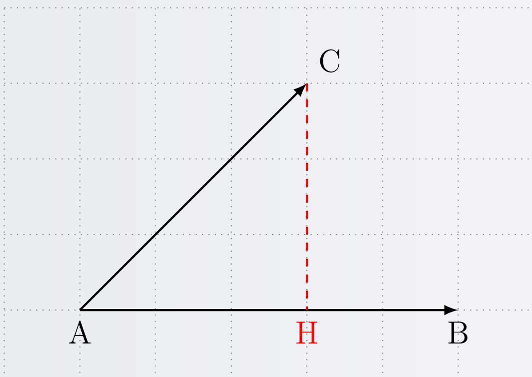
Définition

Produit scalaire

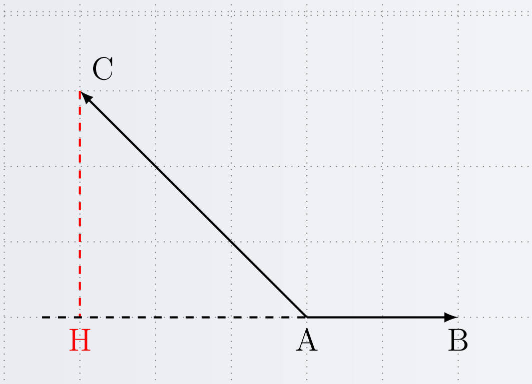
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans le plan. On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur (CD). Le `produit scalaire` de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le nombre noté $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ défini par :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{cases} \text{A'B'} \times \text{CD} & \text{si } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right] \\ -\text{A'B'} \times \text{CD} & \text{si } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \in \left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Exemples



1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \text{AB}\times\text{AH}$
$= 5\times 3$
$= 15.$



2 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\text{AB}\times\text{AH}$
$= -2\times 3$
$= -6.$

N'essayez pas d'interpréter le produit scalaire de façon géométrique ... car dans un cas général, le produit scalaire n'a aucune signification géométrique particulière.

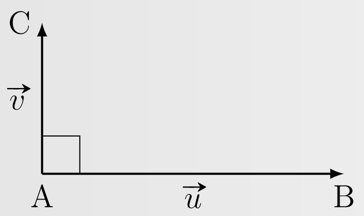
Propriété

Produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 .$$

Démonstration



Par définition, si on note H le projeté orthogonal de C sur (AB), on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AH}\\ &= \mathrm{AB}\times 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

■

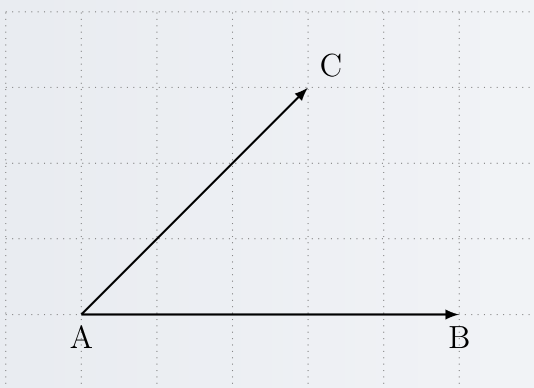
Propriété

Calcul du produit scalaire avec les normes

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).$$

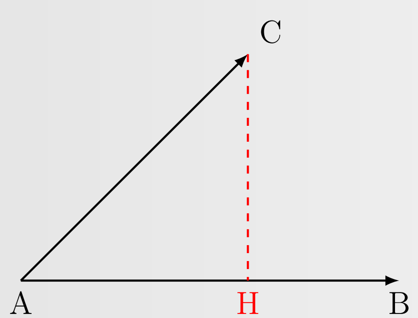
Exemple



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &= 5\times 3\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{4}\\ &= 15\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= 15.\end{aligned}$$

Démonstration

On place les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sorte qu'ils aient la même origine. On note alors $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.



- **1^er^ cas.**

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AH}\\ &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).\end{aligned}$$

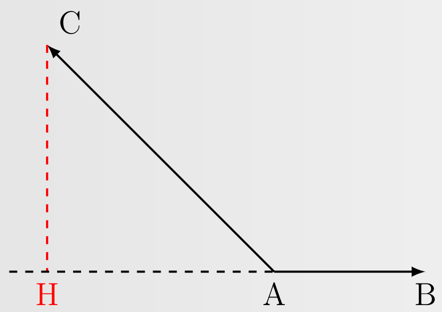
car dans le triangle AHC rectangle en H,

$$\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}},$$

donc :

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right).$$

Démonstration (suite)



- **2^e^ cas.**

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= -AB\times AH\\ &= -AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}\right)\\ &= -AB\times AC\times\left(-\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right)\\ &= AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).\end{aligned}$$ ■

Propriété

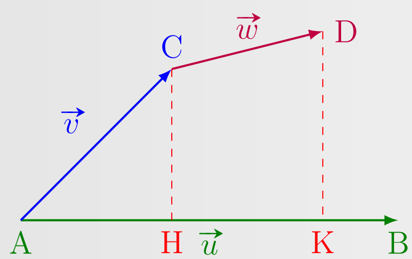
Distributivité du produit scalaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Alors,

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$

Démonstration

Considérons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme sur le schéma suivant :



D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= AB\times AK\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= AB\times AH\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\ &= AB\times HK\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} &= AB\times AH+AB\times HK\\ &= AB\times\left(AH+HK\right)\\ &= AB\times AK\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire :

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$ ■

Propriété

Commutativité

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\ .$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left[-\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right]\\ &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{v},\vec{u}\right) \qquad \text{car } \cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ &= \vec{v}\cdot\vec{u}\ .\end{aligned}$$

■

Des deux propriétés précédentes, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 &= \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\ ,\\ \left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 &= \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\ ,\\ \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) &= \vec{u}^2-\vec{v}^2\ .\end{aligned}$$

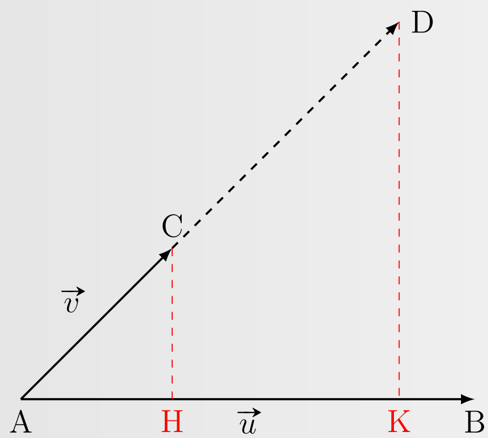
Propriété

Pseudo-associativité « multiplicative »

Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\ .$$

Démonstration



Notons $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\lambda\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.
D'après le théorème de Thalès,

$$\mathrm{AD}=\lambda\mathrm{AC}\Longrightarrow\mathrm{AK}=\lambda\mathrm{AH}\ .$$

Donc :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right) &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AK}\\ &= \mathrm{AB}\times\lambda\mathrm{AH}\\ &= \lambda\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}\end{aligned}$$

et

$$\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\lambda\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}\ .$$

Donc, $\vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.

Un raisonnement analogue montrerait que $\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$. ■

Propriétés

Avec les normes

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).\end{aligned}$$

Démonstration

- Nous avons vu précédemment que :

  $$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2,$$

  que l'on peut aussi écrire :

  $$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2.$$

  En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$, on arrive à :

  $$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)}.$$

- En exploitant l'égalité :

  $$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2,$$

  que l'on peut aussi écrire :

  $$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2,$$

  on arrive à :

  $$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}.$$

- En ajoutant les deux précédentes égalités, on a :

  $$\begin{aligned}2\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).\end{aligned}$$

  D'où :

  $$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}.$$

■

Propriété

Dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'\ .$$

Exemple

On pose $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. Alors,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 5\times 1 + (-2)\times 7\\ &= 5-14\\ &= -9.\end{aligned}$$

Démonstration

Nous allons nous servir de l'une des égalités de la propriété précédente :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

On sait que $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2+y'^2$ car on est dans un repère orthonormé.
De plus, $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \left(x'-x\right)^2 + \left(y'-y\right)^2\\ &= x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+x'^2+y'^2-x'^2+2xx'-x^2-y'^2+2yy'-y^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right)\\ &= xx'+yy'\ .\end{aligned}$$

■

Méthode *Détermination de la mesure d'un angle formé par deux vecteurs*

Reprenons les vecteurs de l'exemple précédent : $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$.

Nous avons vu que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -9.$$

Or,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{5^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+7^2}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \sqrt{29}\times\sqrt{50}\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9 = 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\ ,$$

soit :

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -\frac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0,236351579148\ .$$

On en déduit alors :

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right)\approx 104^\circ.$$

Définition *Vecteur normal d'une droite*

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.
On appelle `vecteur normal` à $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{n}$ tel que, pour tout vecteur directeur $\vec{d}$ de $\mathscr{D}$,

$$\vec{n}\cdot\vec{d} = 0.$$

Méthode *Équation cartésienne d'une droite connaissant un vecteur normal et un point*

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $\mathrm{A}(-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\,(x\,;y)\in\mathscr{D} &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n} = 0\\ &\iff \begin{pmatrix}x-(-2)\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = 0\\ &\iff \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = 0\\ &\iff 3(x+2)+(-1)(y-3) = 0\\ &\iff 3x-y+9 = 0\ .\end{aligned}$$

une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est donc :

$$\mathscr{D} \qquad : \qquad 3x-y+9=0\ .$$

Méthode *Trouver un vecteur normal connaissant une équation cartésienne*

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation :

$$3x + 4y - 7 = 0.$$

Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Posons $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$. Alors,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 &\Longleftrightarrow -4a + 3b = 0 \\ &\Longleftrightarrow b = \frac{4}{3}a. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant par exemple $a = 3$, on a $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Propriété

Si $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0 , \qquad a \neq 0,\ b \neq 0 ,$$

alors un vecteur normal à $\mathscr{D}$ est :

$$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Démonstration

$\mathscr{D}\ :\ ax + by + c = 0$. Posons $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ un de ses vecteurs directeurs et $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un de ses vecteurs normaux.
Alors,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 &\Longleftrightarrow -b\alpha + a\beta = 0 \\ &= \beta = \frac{b}{a}\alpha. \end{aligned}$$

En prenant $\alpha = a$, on obtient $\beta = b$. Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. ■

Applications du produit scalaire

Propriété

Équation cartésienne d'un cercle

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, soit $\Omega\,(a\,;b)$.
Le cercle de centre Ω et de rayon r a pour équation :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ .$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\,(x\,;y)\in\mathscr{C}(\Omega,r) &\iff \Omega\mathrm{M}=r\\ &\iff \Omega\mathrm{M}^2=r^2\\ &\iff (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ .\end{aligned}$$

■

Exemple

On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ d'équation :

$$x^2+y^2+4x-8y+4=0\ .$$

$$\begin{aligned}x^2+y^2+4x-8y+4=0 &\iff \left[(x^2+4x+4)-4\right]+\left[(y^2-8y+16)-16\right]+4=0\\ &\iff (x+2)^2-4+(y-4)^2-16+4=0\\ &\iff \big(x-(-2)\big)^2+(y-4)^2=4^2\ .\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $\Omega\,(-2\,;4)$ et de rayon $r=4$.

Propriété

Soient A et B deux points du plan.
L'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$$

est le cercle de diamètre [AB].

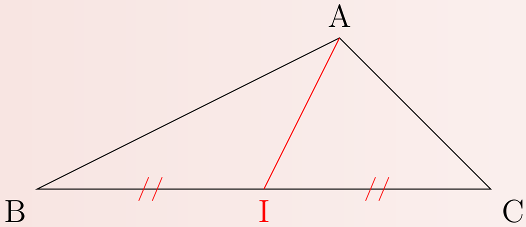
Démonstration

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0 &\iff (\mathrm{MA})\perp(\mathrm{MB})\\ &\iff \text{le triangle AMB est rectangle en M}\\ &\iff \text{M est sur le cercle de diamètre [AB].}\end{aligned}$$

■

Théorème *Théorème de la médiane*

On considère un triangle ABC quelconque. Soit I le milieu de [BC]. Alors,



Alors,

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{BC}^2 + 2\mathrm{AI}^2 .$$

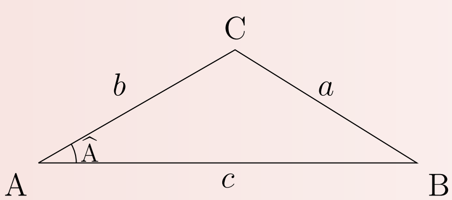
Démonstration

Nous allons utiliser la relation de Chasles en « injectant » le point I dans les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)^2 + \left(\overrightarrow{\mathrm{AI}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AI}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{AI}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}^2 \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{AI}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IB}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{IC}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)}_{=\vec{0}} \\
&= 2\mathrm{AI}^2 + \mathrm{IB}^2 + \mathrm{IC}^2 \\
&= 2\mathrm{AI}^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{BC}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\mathrm{BC}\right)^2 \\
&= 2\mathrm{AI}^2 + 2 \times \frac{1}{4}\mathrm{BC}^2 \\
&= 2\mathrm{AI}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{BC}^2 .
\end{aligned}$$

■

Théorème *Formule d'Al-Kashi*



Soit ABC un triangle quelconque. En notant :

$$a = \mathrm{BC} \quad , \quad b = \mathrm{AC} \quad , \quad c = \mathrm{AB} \quad , \quad \widehat{\mathrm{A}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) ,$$

on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}} .$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}^2 &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= BA^2 + 2BA \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) + AC^2 \\
&= AB^2 + AC^2 + 2AB \times AC \times \left(-\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right) \\
&= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) .
\end{aligned}$$

■

Remarque

La formule d'Al-Kashi peut bien évidemment être utilisée avec les autres côtés :

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2bc\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)
\end{aligned}$$

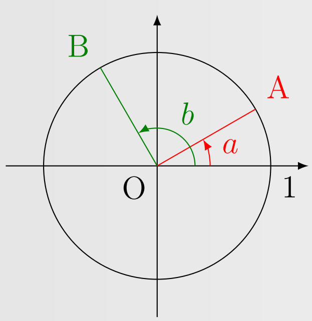
Propriétés

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Démonstration



D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= x_A x_B + y_A y_B \\
&= \cos a \cos b + \sin a \sin b .
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \\
&= 1 \times 1 \times \cos(b-a) \\
&= \cos(a-b) .
\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b .$$

En prenant $b = -b$, on obtient :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b .$$

Démonstration (suite)

De plus, on sait que pour tout x, $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ donc :

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b\\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\ .\end{aligned}$$

En prenant $b = -b$, on obtient :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b\ .$$

■

Propriétés

Formules de duplication

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= 2\cos^2 a - 1\\ &= 1 - 2\sin^2 a\end{aligned}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Démonstration

De la formule :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\ ,$$

en prenant $b = a$, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(a+a) &= \cos a \cos a - \sin a \sin a\\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a\ . \qquad (1)\end{aligned}$$

Or, pour tout a, on a :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1\ , \qquad (2)$$

d'où :

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

En reprenant l'égalité (1), on a alors :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)\\ &= 2\cos^2 a - 1\ .\end{aligned}$$

Mais de la relation (2), on peut aussi écrire :

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a\ ,$$

donc, la relation (1) donne :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= 1 - \sin^2 a - \sin^2 a\\ &= 1 - 2\sin^2 a\ .\end{aligned}$$

...

Démonstration (suite)

De la formule :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \ ,$$

en prenant $b = a$, on obtient :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \ .$$

$\blacksquare$

Exemple

En prenant $a = \dfrac{\pi}{12}$, la formule :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

donne :

$$\cos \frac{\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \ ,$$

soit :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1.$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \\ \text{donc : } \cos \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{4}} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 &= \frac{2 + 2\sqrt{12} + 6}{16} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \ . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}.$$

Donc,

$$\boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$