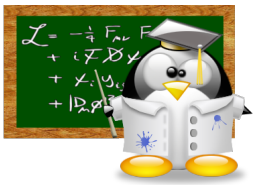
Sommaire

Variance 2
Théorème de König-Huygens 2
Écart-type 4
Médiane & quartiles (rappels) 4
Diagramme en boîte (boîte à moustaches) 5
Cas des séries à caractères quantitatifs continus 6
Analyse d'une série statistique 7



Prérequis

- Vocabulaire de Seconde (caractères quantitatifs)
- Moyenne, médiane, quartiles

Définition *Variance*

On considère une série statistique à caractères quantitatifs discrets $\left(x_i\ ;n_i\right)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, de moyenne $\overline{x}$.
On appelle `variance` de cette série le nombre V défini par :

$$\mathrm{V} = \frac{n_1\left(\overline{x}-x_1\right)^2 + n_2\left(\overline{x}-x_2\right)^2 + \cdots + n_k\left(\overline{x}-x_k\right)^2}{n_1+n_2+\cdots+n_k} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i}\ .$$

Remarque

On dit que la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne $\overline{x}$.
Les « écarts à la moyenne » sont les $\left(\overline{x}-x_i\right)$; les « carrés des écarts à la moyenne » sont donc les $\left(\overline{x}-x_i\right)^2$. En faisant la moyenne de ces écarts, on trouve la variance.

Exemple

Le tableau suivant donne les notes obtenues par des élèves de 1re S à un devoir sur les statistiques descriptives noté sur 10.

Notes (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs (n_i)	1	1	3	1	0	3	4	7	2	1	1

La moyenne des notes à ce devoir est :

$$\overline{x} = \frac{0\times1+1\times1+2\times3+3\times1+\cdots+9\times1+10\times1}{1+1+3+1+0+3+4+7+2+1+1}$$
$$\overline{x} = \frac{133}{24}$$
$$\overline{x} \approx 5,542\ .$$

On a alors le tableau suivant :

x_i	$\overline{x}-x_i$	$n_i\left(\overline{x}-x_i\right)^2$
0	5,542	30,713764
1	4,542	20,629764
2	3,542	37,637292
3	2,542	6,461764
4	1,542	0
5	0,542	0,881292

x_i	$\overline{x}-x_i$	$n_i\left(\overline{x}-x_i\right)^2$
6	$-0,458$	0,839056
7	$-1,458$	14,880348
8	$-2,458$	12,083528
9	$-3,458$	11,957764
10	$-4,458$	19,873764
	Somme :	155,958336

La variance de ce devoir est alors :

$$\mathrm{V} = \frac{155,958336}{24}$$
$$\boxed{\mathrm{V} \approx 6,498}$$

Théorème *Théorème de König-Huygens*

Soit $\left(x_i\ ;n_i\right)$ une série statistique à caractères quantitatifs discrets de moyenne $\overline{x}$ et de variance V. Alors,

$$\mathrm{V}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2-\overline{x}^2\qquad,\qquad N=n_1+n_2+\cdots+n_k\ .$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}&=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}\\
&=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i\left(\overline{x}^2-2\overline{x}x_i+x_i^2\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}\\
&=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i\overline{x}^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}-\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}2\overline{x}n_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}+\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}\\
&=\frac{\overline{x}^2\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}-\frac{2\overline{x}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_ix_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}+\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}\\
&=\overline{x}^2-2\overline{x}\times\overline{x}+\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}\\
&=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}n_i}-\overline{x}^2\ .
\end{aligned}$$

■

Exemple

Reprenons l'exemple précédent et ajoutons deux lignes :

Notes (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Effectifs (n_i)	1	1	3	1	0	3	4	7	2	1	1	
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	
$n_i x_i^2$	0	1	12	9	0	75	144	343	128	81	100	$\to \Sigma = 893$

$$\mathrm{V} = \frac{893}{24} - 5,54166667^2$$
$$\boxed{\mathrm{V} \approx 6,498}$$

Dans la formule du théorème de König-Huygens, il faut veiller à remplacer $\overline{x}$ par sa valeur approchée la plus précise possible.
En effet, dans le dernier calcul de l'exemple précédent, si j'avais remplacer $\overline{x}$ par $5,542$, j'aurais obtenu $\mathrm{V} \approx 6,495$, valeur différente de celle trouvée dans le premier calcul.

Définition

Écart-type

Soit $(x_i\,;n_i)$ une série statistique à caractères quantitatifs discrets de variance V.
On appelle `écart-type` de cette série le nombre défini par :

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}}\,.$$

Remarque

L'écart-type est un `indicateur de dispersion` : il permet de se rendre compte de la dispersion des caractères étudiés autour de la moyenne.

- Plus il est petit, plus les caractères sont concentrés autour de la moyenne (on dit que la série est homogène).
- Plus il est grand, plus les caractères sont dispersés autour de la moyenne (on dit que la série est hétérogène).

Exemple

Reprenons l'exemple du devoir de la classe de 1re S où la moyenne était d'environ 5,5.
Nous avions trouvé que sa variance était : $\mathrm{V} \approx 6,5$. Ainsi, son écart-type est $\sigma \approx \sqrt{6,5} \approx 2,5$.
Les notes seront donc concentrées dans l'intervalle $[5,5-2,5\,;5,5+2,5] = [3\,;8]$ (bien qu'il puisse y en avoir à l'extérieur !).

Définitions

Médiane & quartiles (rappels)

Soit $(x_i\,;n_i)$ une série statistique à caractères quantitatifs. Je rappelle que :

- La médiane (notée m_e) est la valeur du caractère pour lequel au moins 50 % des caractères lui sont inférieurs ;
- Le premier quartile (notée Q_1) est la valeur du caractère pour lequel au moins 25 % des caractères lui sont inférieurs ;
- Le troisième quartile (noté Q_3) est la valeur du caractère pour lequel au moins 75 % des caractères lui sont inférieurs.

Exemple

Reprenons les notes obtenues au devoir sur les statistiques de notre classe de 1re S, et ajoutons au tableau la ligne des effectifs cumulés croissants :

Notes (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs (n_i)	1	1	3	1	0	3	4	7	2	1	1
E.c.c.	1	2	5	6	6	9	13	20	22	23	24

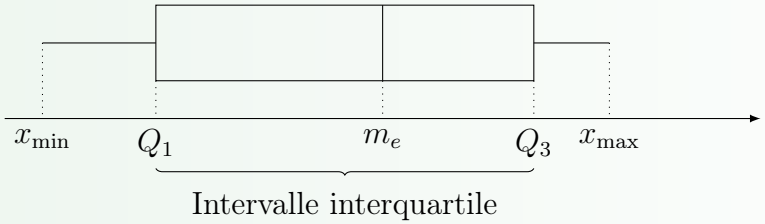
- 50 % de 24 est égal à 12 ; on atteint au moins 12 notes cumulées pour la note « 6 » ; donc $m_e = 6$;
- 25 % de 24 est égal à 6 ; on atteint au moins 6 notes cumulées pour la note « 3 » ; donc $Q_1 = 3$;
- 75 % de 24 est égal à 18 ; on atteint au moins 18 notes cumulées pour la note « 7 » ; donc $Q_3 = 7$;

Définition

Diagramme en boîte (boîte à moustaches)

On appelle diagramme en boîte d'une série statistique la représentation de la dispersion des caractères de la série. Elle est composée :

- d'un rectangle de largeur $Q_3 - Q_1$ représentant ainsi l'écart interquartile (noté I_Q) ;
- d'un segment allant de $x_{\min}$ à Q_1 et d'un segment allant de Q_3 à $x_{\max}$;
- d'un trait vertical inclus dans le rectangle désignant la médiane.



Exemple

Le diagramme en boîte de la série des exemples précédents est :

Remarque

Cas des séries à caractères quantitatifs continus

Dans le cas où les caractères de la série sont des intervalles (des classes), on prend pour x_i le milieu de chaque classe.

Exemple

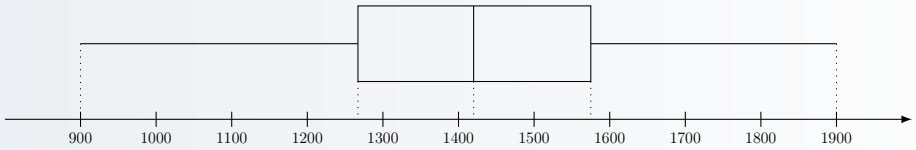
Le tableau ci-dessous représente la répartition des salaires des employés dans une PME :

Salaires (en €)	[900 ; 1 100[	[1 100 ; 1 300[	[1 300 ; 1 500[	[1 500 ; 1 700[	[1 700 ; 1 900]
Centre des classes	1 000	1 200	1 400	1 600	1 800
Effectifs	10	30	50	40	10
E.c.c.	10	40	90	130	140

- **Moyenne :** $\overline{x} = \dfrac{1\,000 \times 10 + 1\,200 \times 30 + \cdots + 1\,800 \times 10}{10 + 30 + 50 + 40 + 10}$
$= \dfrac{198\,000}{140}$
$\boxed{\overline{x} \approx 1\,414}$
- **Variance :** $\mathrm{V} \approx \dfrac{1}{140}(10 \times 1\,000^2 + 30 \times 1\,200^2 + \cdots + 10 \times 1\,800^2) - 1\,414^2$
$\approx \dfrac{286\,000\,000}{140} - 1\,414^2$
$\boxed{\mathrm{V} \approx 43\,461}$
- **Écart-type :** $\sigma \approx \sqrt{43\,461}$
$\boxed{\sigma \approx 208,5}$
- **Médiane :** 50 % (soit 70) est atteint pour la classe [1 300 ; 1 500[; donc $m_e \in [1\,300\,;1\,500[$.
Soient A(1 300 ; 40) et B(1 500 ; 90) dans le repère où est tracé le polygône des e.c.c.
La droite (AB) a pour équation $y = mx + p$ où $m = \dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \dfrac{50}{200} = \dfrac{1}{4}$.
Donc $y_\mathrm{A} = \dfrac{1}{4}x_\mathrm{A} + p$, soit $40 = \dfrac{1}{4} \times 1\,300 + p$; ainsi, $p = -285$.
Finalement, on a (AB) : $y = \dfrac{1}{4}x - 285$. Si $y = 70$ (50 % des effectifs), alors $70 = \dfrac{1}{4}x - 285$, soit $x = 1\,420$.
Ainsi, $\boxed{m_e = 1\,420}$.

Exemple (suite)

- **1er quartile :** 25 % (soit 35) est atteint pour la classe $[1\,100\,;1\,300[$.
  Donc $Q_1 \in [1\,100\,;1\,300[$.
  Soient C$(1\,100\,;10)$ et A$(1\,300\,;40)$ dans le repère où est tracé le polygône des e.c.c.
  La droite (CA) a pour équation $y = mx + p$ où $m = \dfrac{y_\text{C} - y_\text{A}}{x_\text{C} - x_\text{A}} = \dfrac{30}{200} = \dfrac{3}{20}$.
  Donc $y_\text{A} = \dfrac{3}{20}x_\text{A} + p$, soit $40 = \dfrac{3}{20} \times 1\,300 + p$; ainsi, $p = -155$.
  Finalement, on a (CA) : $y = \dfrac{3}{20}x - 155$. Si $y = 35$ (25 % des effectifs), alors $35 = \dfrac{3}{20}x - 155$, soit $x \approx 1\,266{,}67$.
  Ainsi, $\boxed{Q_1 \approx 1\,267}$.
- **3e quartile :** 75 % (soit 105) est atteint pour la classe $[1\,500\,;1\,700[$.
  Donc $Q_3 \in [1\,500\,;1\,700[$.
  Soient D$(1\,700\,;130)$ et B$(1\,500\,;90)$ dans le repère où est tracé le polygône des e.c.c.
  La droite (BD) a pour équation $y = mx + p$ où $m = \dfrac{y_\text{D} - y_\text{B}}{x_\text{D} - x_\text{B}} = \dfrac{40}{200} = \dfrac{1}{5}$.
  Donc $y_\text{B} = \dfrac{1}{5}x_\text{B} + p$, soit $90 = \dfrac{1}{5} \times 1\,500 + p$; ainsi, $p = -210$.
  Finalement, on a (CA) : $y = \dfrac{1}{5}x - 210$. Si $y = 105$ (75 % des effectifs), alors $105 = \dfrac{1}{5}x - 210$, soit $x = 1\,575$.
  Ainsi, $\boxed{Q_3 = 1\,575}$.
- **Diagramme en boîte :**



Méthode

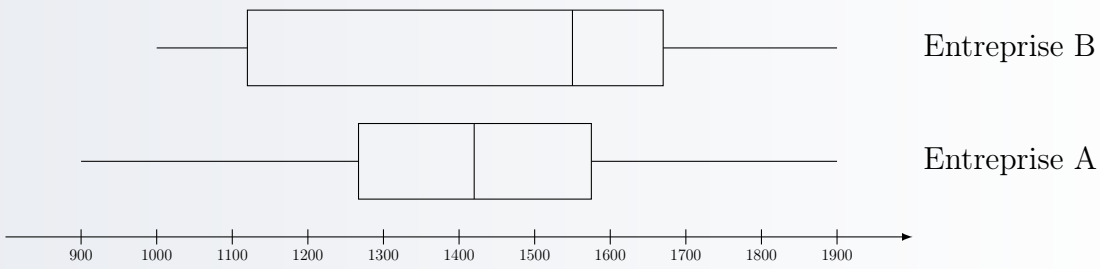
Analyse d'une série statistique

Pour analyser une série statistique, on utilise :

- le coupe $(m_e\,;I_Q)$, qui permet d'avoir une idée de la répartition des valeurs de la série autour de la médiane ;
- le couple $(\overline{x}\,;\sigma)$, qui permet d'avoir une idée de la répartition des valeurs de la série autour de la moyenne.

Exemples

1 On a représenté ci-dessous le diagramme en boîte de la répartition des salaires dans deux entreprises :



Nous pouvons alors voir que l'intervalle interquartile correspondant à l'entreprise B est plus grand ce celui correspondant à l'entreprise A ; les salaires de l'entreprise B sont donc plus hétérogènes que ceux de l'entreprise A.

La médiane des salaires de l'entreprise B est plus élevée que celle de l'entreprise A et correspond presque au Q_3 de l'entreprise A : au moins 50 % des salariés de l'entreprise B gagnent moins d'environ 1 550 € alors que dans l'entreprise A, ils sont au moins 75 % à gagner moins que cette somme.

Les salaires de l'entreprise A semblent donc ici plus homogènes que ceux de l'entreprise B.

2 Dans l'entreprise Λ, la moyenne des salaires est $\overline{x}_1 = 1\,500$ € ; l'écart-type est $\sigma_1 = 120$ €.
Dans l'entreprise Θ, la moyenne des salaires est $\overline{x}_2 = 1\,700$ € ; l'écart-type est $\sigma_2 = 660$ €.

A priori, il fait bon travailler dans l'entreprise Θ vu que la moyenne des salaires est plus élevée que celle de l'entreprise Λ. Cependant, on remarque que l'écart-type des salaires de l'entreprise Θ est plus grand que l'autre.
Pour l'entreprise Λ, l'intervalle $[\overline{x}_1 - \sigma_1 ; \overline{x}_1 + \sigma_1]$ est $[1\,380 ; 1\,620]$;
Pour l'entreprise Θ, l'intervalle $[\overline{x}_2 - \sigma_2 ; \overline{x}_2 + \sigma_2]$ est $[1\,040 ; 2\,360]$.

On constate que dans l'entreprise Θ, les salaires sont plus dispersés autour du salaire moyen que dans l'entreprise Λ.

On ne peut rien conclure de bien constructif à partir de ces données.
Le fait que les salaires soient plus dispersés dans une entreprise que dans une autre ne doit pas aboutir à une conclusion précise. Les statistiques nous permettent uniquement d'avoir une vue globale d'une situation.