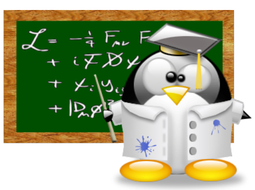
Généralités sur les probabilités

Stéphane PASQUET, 3 décembre 2014

Sommaire



Prérequis

- Notions de probabilités de Seconde

Activité

Activité d'introduction

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues. Voici les différentes possibilités que nous avons :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Notons X l'ensemble des sommes possibles. Alors,

$$\mathrm{X} = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}.$$

Définition

Variable aléatoire

X est appelée la `variable aléatoire` représentant à la somme obtenue.

Activité (suite)

Construisons maintenant un tableau qui permet de voir les probabilités des différentes valeurs possibles pour X :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P (X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

- Dans le tableau donnant les différentes issues possibles, on voit que la somme « 2 » apparaît une fois sur les 36 (en tout) ; par conséquent, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{1}{36}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=12$.
- La somme « 3 » apparaî deux fois sur les 36 (en tout) ; donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=11$.
- La somme « 4 » apparaît trois fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=10$.
- La somme « 5 » apparaît quatre fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=9$.
- La somme « 6 » apparaît cinq fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=6)=\frac{5}{36}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=8$.
- La somme « 7 » apparaît six fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Définition *Loi de probabilité*

La donnée du tableau de probabilités précédent est la `loi de probabilité` de la variable aléatoire X.
Si $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors la loi de probabilité de X est la donnée de $P(X = x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition *Espérance d'une variable aléatoire discrète*

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.
On appelle `espérance mathématique de X` le nombre défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i) \ .$$

Exemple

Reprenons l'activité précédente et la loi de probabilité de X. Alors,

$$\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \cdots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$\boxed{\mathbb{E}(X) = 7}$

Remarque

Le calcul de l'espérance mathématique ressemble à celui de la moyenne d'une série statistique.
En effet, l'espérance peut être considérée comme la « valeur moyenne » de la variable aléatoire si on répète l'expérience un grand nombre de fois.
Par exemple ici, si on lance 10 000 fois les deux dès, on peut espérer avoir une somme égale à « 7 » un grand nombre de fois.

Propriété *Linéarité de l'espérance*

Soit X une variable aléatoire discrète. Soient a et b deux réels. Alors,

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b \ .$$

Démonstration

Par définition, $a\mathrm{X}+b=\left\{ax_i+b\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(a\mathrm{X}{+}b\right) &= \sum_{i=1}^{n}\big(ax_i+b\big)\times \mathrm{P}\left(a\mathrm{X}+b=ax_i+b\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(ax_i+b\big)\times \mathrm{P}\left(\mathrm{X}=x_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}ax_i\times \mathrm{P}\left(\mathrm{X}=x_i\right)+\sum_{i=1}^{n}b\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=x_i\right)\\
&= a\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i\times \mathrm{P}\left(\mathrm{X}=x_i\right)}_{=\mathbb{E}(\mathrm{X})}+b\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=x_i\right)}_{=1}\\
&= a\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)+b\;.
\end{aligned}$$

■

Définitions

Variance & écart-type

Soit $\mathrm{X}=\left\{x_i\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.
On appelle `variance mathématique de X` le nombre défini par :

$$\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right)=\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}{-}\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right)^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right]^2\times \mathrm{P}\left(\mathrm{X}=x_i\right)\;.$$

On appelle `écart-type de X` le nombre défini par :

$$\sigma\left(\mathrm{X}\right)=\sqrt{\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right)}\;.$$

Théorème

Théorème de König-Huygens

Soit $\mathrm{X}=\left\{x_i\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right)=\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right]^2\;.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\mathrm{X}\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}{-}\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right)^2\right)\quad \text{(par définition)}\\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-\mathbb{E}\left(2\mathrm{X}\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right)+\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right)^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-2\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right]^2+\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right]^2\\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right)\right]^2\;.
\end{aligned}$$

■

Propriété

Soit $X = \left\{x_i\right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$\mathbb{V}(aX) = a^2 \mathbb{V}(X) \ .$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX) &= \mathbb{E}\left((aX)^2\right) - \Big[\mathbb{E}(aX)\Big]^2 \\
&= a^2 \mathbb{E}\left(X^2\right) - a^2 \Big[\mathbb{E}(X)\Big]^2 \\
&= a^2 \left[\mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2\right] \\
&= a^2 \mathbb{V}(X) \ .
\end{aligned}$$

∎