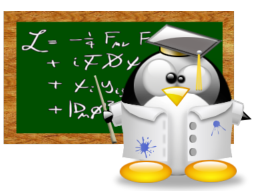
Stéphane PASQUET, 8 décembre 2014

Sommaire

Arbre pondéré . . . 2
Expériences indépendantes . . . 2
Schématisation d'une répétition d'expériences indépendantes . . . 2
Épreuve de Bernoulli . . . 3
Loi de Bernoulli . . . 3
Schéma de Bernoulli . . . 4
Loi binomiale . . . 4
Coefficients binomiaux . . . 5
Triangle de Pascal . . . 6
Formule . . . 7
Représentation d'une loi binomiale . . . 8
Espérance, variance & écart-type pour une loi binomiale . . . 8
Complément 1 : Loi binomiale et calculatrices . . . 10



Prérequis

- Arbre de probabilités
- Calcul de probabilités élémentaires
- Variable aléatoire
- Loi de probabilité

Dans ce chapitre, je noterai :

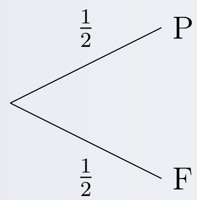
- $\mathscr{E}_n$ l'expérience consistant à lancer n fois une pièce équilibrée ;
- $\mathscr{L}_n$ l'expérience consistant à lancer une pièce équilibrée pour la n-ième fois ;
- P l'événement : « On obtient Pile lors d'un lancer » ;
- F l'événement : « On obtient Face lors d'un lancer ».

Définition — *Arbre pondéré*

Un `arbre pondéré` est une représentation schématique des issues d'une expérience aléatoire. Chaque issue est une extrémité d'un segment, que l'on appelle une `branche`, sur lequel est inscrite la probabilité de l'issue.

Exemple

L'arbre pondéré de $\mathscr{E}_1$ est :



L'expérience mène à 2 issues : soit on obtient Pile, soit on obtient Face.

L'événement P (tout comme l'événement F) a une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$ car il y a 1 chance sur 2 d'être réalisé.

Définition — *Expériences indépendantes*

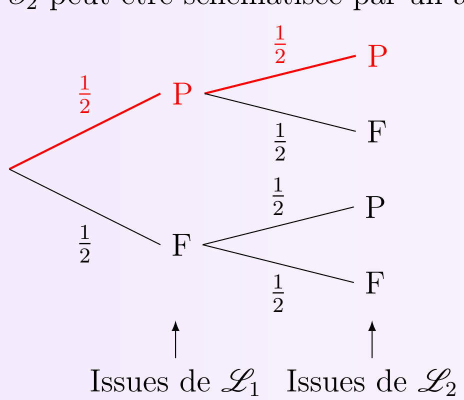
On dit que deux expériences sont `indépendantes` quand les issues de l'une ne sont pas les conséquences de celles de l'autre.

Exemple

Si on lance deux fois de suite une pièce équilibrée, $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont indépendantes car le résultat obtenu la 1$^{\text{re}}$ fois n'influence pas celui obtenu la 2$^{\text{nde}}$ fois.

Modélisation — *Schématisation d'une répétition d'expériences indépendantes*

$\mathscr{E}_2$ peut être schématisée par un arbre pondéré de la façon suivante :



Lecture du chemin rouge :

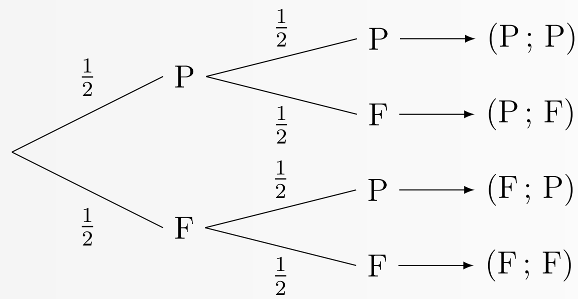
L'événement P a été obtenu lors du premier lancer ; ensuite, nous avons jeté la pièce et nous avons obtenu P une seconde fois.
Lors de chaque lancer, la probabilité d'obtenir P n'a pas changé ; elle est toujours égale à $\dfrac{1}{2}$.

Remarque

Sur l'arbre précédent, on constate qu'au final, il y a 4 issues possibles :

$$(P\,;P)\,;\qquad (P\,;F)\,;\qquad (F\,;P)\,;\qquad (F\,;F).$$

On peut écrire :



Propriété

La probabilité d'un événement issu d'une répétition d'expériences est le produit des probabilités des événements sur le chemin qui y mène.

Exemple

La probabilité de l'événement (P ; P) est :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,.$$

La probabilité des trois autres événements est aussi $\frac{1}{4}$.
La somme des probabilités est bien égale à 1.

Définition

Épreuve de Bernoulli

Une `épreuve de Bernoulli` est une expérience aléatoire à 2 issues seulement.

Exemple

$\mathscr{L}_n$ est une épreuve de Bernoulli, quelle que soit la valeur de n.

Définition *Loi de Bernoulli*

On considère une épreuve de Bernoulli. On note « S » et « E » les deux issues possibles, de probabilités respectives p et $1 - p$.
On note X la variable aléatoire représentant l'issue de cette expérience.
Alors, on dit que X suit la `loi de Bernoulli`, c'est-à-dire que sa loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	S	E
$\mathrm{P}(\mathrm{X})$	p	$1 - p$

Remarque

Les deux issues d'une épreuve de Bernoulli sont notées « S » et « E » en référence aux initiales des mots « Succès » et « Échec ».
En effet, il est fréquent de dire que l'une des deux issues est considérée comme un succès quand on s'y intéresse.

Définition *Schéma de Bernoulli*

Un `schéma de Bernoulli` est une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple

$\mathscr{E}_n$ est un schéma de Bernoulli pour $n \geqslant 2$.

Définition *Loi binomiale*

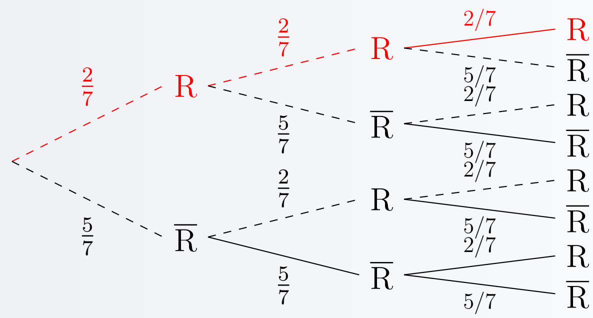
On considère une expérience consistant à répéter n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli. On note p la probabilité de l'événement « S ».
On note alors X la variable aléatoire représentant le nombre de fois que l'on obtient « S ».
On dit alors que X suit la `loi binomiale de paramètres n et p`, et on note :

$$\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;p) \ .$$

Exemple

Un cycliste fait le même parcourt pendant trois jours pour se rendre à son travail.
On note R l'événement : « Le dernier feu tricolore qu'il rencontre est rouge ». On considère que la probabilité de cet événement est $\mathrm{P}(\mathrm{R}) = \dfrac{2}{7}$. On a alors l'arbre pondéré page suivante.

Exemple (suite)



- La probabilité pour qu'il rencontre 3 fois de suite un feu rouge en dernier est :

$$p_1 = \left(\frac{2}{7}\right)^3.$$

Cela correspond au chemin rouge de l'arbre.

- La probabilité pour qu'il ne rencontre que deux feux rouges en dernier est :

$$p_2 = 3 \times \left(\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7}\right).$$

$\frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7}$ correspond au calcul de la probabilité d'obtenir 2 feux rouges et le coef- -ficient « 3 » correspond au nombre de chemins qui contiennent uniquement deux R (représentés en pointillés sur l'arbre).

Définition

Coefficients binomiaux

On considère un schéma de Bernoulli où une épreuve de Bernoulli est répétée n fois de façon indépendante. Soit k un entier compris entre 0 et n.

On appelle `coefficients binomiaux` les nombres notés $\binom{n}{k}$ désignant le nombre de chemins contenant exactement k succès sur l'arbre pondéré.

Exemple

Dans l'exemple précédent, il y a 3 chemins contenant exactement 2 fois l'événement « R » et on a $n = 3$ donc :

$$\binom{3}{2} = 3.$$

Propriété

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration

$\binom{n+1}{k+1}$ représente le nombre de chemins contenant $k+1$ succès lors de la répétition de $n+1$ épreuves de Bernoulli.
Il y a donc deux possibilités :

- il y a k succès pour n répétitions, puis 1 succès lors de la dernière (la $(k+1)$-ième répétition). Il y a $\binom{n}{k}$ chemins contenant k succès pour n répétitions et pour chacun de ces chemins, 1 seule possibilité de continuer : ajouter une branche contenant 1 succès. Il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins ici.
- il y a $k+1$ succès pour n répétitions, puis 0 succès lors de la dernière répétition. Il y a $\binom{n}{k+1}$ chemins contenant $k+1$ succès pour n répétitions et pour chacun d'eux, une seule possibilité de continuer : ajouter une branche menant à un échec. Il y a donc $\binom{n}{k+1}$ chemins ici.

Ainsi, le nombre de chemins contenant $k+1$ succès pour $n+1$ répétitions est la somme des nombres de chemins obtenus :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$\blacksquare$

Définition *Triangle de Pascal*

Le `triangle de Pascal` est le triangle commençant par :

Valeurs de n

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Valeurs de k

Chaque nombre en noir est obtenu en ajoutant le nombre au-dessus et celui qui est à gauche du nombre au-dessus, comme le montre l'exemple du $6 = 3 + 3$.

Propriété

Dans le triangle de Pascal, pour $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$, le nombre à la n-ième ligne et k-ième colonne est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Démonstration

Cette propriété découle de l'égalité :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

■

Propriété *Formule*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$. Alors,

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!],\ \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration

Si l'on veut k succès, on devra multiplier p par elle-même k fois ; on obtient p^k. Comme il reste $n-k$ événements contraires, on doit multiplier aussi par $(1-p)^{n-k}$, $1-p$ étant la probabilité de l'échec.

Il n'y a pas qu'un seul chemin qui contient k succès ; il y en a $\binom{n}{k}$.

Démonstration (suite)

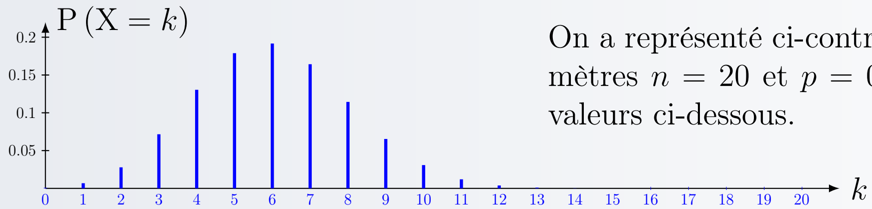
Ainsi, la probabilité d'avoir k succès est $p^k \times (1-p)^{n-k} \times \binom{n}{k}$, d'où la formule. ■

Propriété

Représentation d'une loi binomiale

On représente une loi binomiale de paramètres n et p par un diagramme en bâtons dans un repère orthogonal en mettant en abscisses les valeurs de k (pour $0 \leqslant k \leqslant n$) et en ordonnées les valeurs de $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$.

Exemple



On a représenté ci-contre la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$ à l'aide du tableau de valeurs ci-dessous.

k	$\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)$
0	0.00079792
1	0.00683934
2	0.02784587
3	0.07160366
4	0.13042096
5	0.17886304
6	0.19163898
7	0.16426199
8	0.11439675
9	0.06536958
10	0.03081709
11	0.01200666
12	0.00385928
13	0.00101783
14	0.00021811
15	0.00003739
16	0.00000501
17	0.00000050
18	0.00000004
19	0.00000000
20	0.00000000

Propriété (admise)

Espérance, variance & écart-type pour une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$. Alors,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = np \qquad , \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = np(1-p) \qquad \text{et} \qquad \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{np(1-p)}\ .$$

Exemple

Soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(100\,;0,2)$.

Alors, $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 100 \times 0,2 = 20$,

$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 100 \times 0,2 \times 0,8 = 16$,

$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{16} = 4$.

Complément 1: Loi binomiale et calculatrices

Construire un tableau de valeurs d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale peut s'avérer long si on le fait sans aide informatique ou électronique.

Algorithme

Algorithme

```
> Entrées
    | p un nombre réel P un nombre réel n un nombre entier k un nombre entier

> Traitement
    | Affecter à p la valeur souhaitée (probabilité de l'événement voulu)
    | Affecter à n la valeur souhaitée (nombre de répétitions de l'expérience)
    | Pour k allant de 0 à n
    |     | Affecter à P la valeur (n k) p^k (1 − p)^(n−k)
    |     | Afficher : « P (X = k)= »
    |     | Afficher P
    | Fin du Pour
```

Calcul de P(X=k) sur CASIO Graph 35+

Ici, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;p)$ et on cherche à calculer $P(X = k)$ pour $0 \leqslant l \leqslant n$.

- Choisir dans le menu l'item « Stat » ;
- Choisit « DIST » dans le menu du bas de la fenêtre (touche [F5]) ;
- Choisir « BINM » (touche [F5]) ;
- Choisir « Bpd » (touche [F1]) ;
- Choisir « Var » (touche [F2]) ;
- Compléter alors comme suit :

Data	: Variable
x	: entrer ici la valeur de k
Numtrial	: entrer ici la valeur de n
p	: entrer ici la valeur de p

Calcul de P(X=k) sur TI

Ici, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;p)$ et on cherche à calculer $P(X = k)$ pour $0 \leqslant l \leqslant n$.

- Appuyer sur les touches [2nde] puis [VAR] ;
- Appuyer sur les touches [2nde] puis [0] (pour sélectionner le catalogue des fonctions) ;
- Appuyer sur [Alpha] et [math] pour vous rendre directement à l'item "A" (ou "0") : la fonction s'appelle « ddpbinom » (ou « binompdf ») ;
- Les paramètres à rentrer sont : `ddpbinom(n,p,k)` dans cet ordre.

Calcul automatisé de toutes les valeurs de P(X=k) sur CASIO Graph 35+

- Avant tout, on entre les valeurs prises par k :
  - → Choisir dans le menu l'item « Run » ;
  - → Taper l'instruction : `Seq(n,n,0,<valeur de n>,1)` → `List 1` puis appuyer sur la touche [EXE].
    « `List` » s'affiche en appuyant sur [OPTN]+[F1]+[F1].
- Ensuite, on construit le tableau de valeurs :
  - → Choisir dans le menu l'item « Stat » ;
  - → Saisir dans la colonne 1 (List 1) les valeurs prises par k : 0, 1, 2, ..., n ;
  - → Choisir DIST (touche [F5]) puis BINM (touche [F5]) ;
  - → Choisir Bpd ([F1]) et List ([F1]) ;
  - → Compléter alors la fenêtre comme ceci :

Data	: List
List	: List1
Numtrial	: valeur de n
p	: valeur de p

  - → Sélectionner « Execute » et appuyer sur la touche [EXE].

Calcul automatisé de toutes les valeurs de P(X=k) sur TI

- Appuyer sur la touche [$f(x)$] ;
- En face de Y1, écrire : `binomFdp(<valeur de n>,<valeur de p>,X)` ;
- Appuyer sur [2nde] + [fenêtre] (def. table) et régler les paramètres comme ceci :

DébTable $=0$
PasTable $=1$
Valeurs : Auto
Calculs : Auto

- Ensuite, afficher la table des valeurs ([2nde]+[Graphe])