

Disponible sur *mathweb.fr*

67 exercices
de mathématiques
pour 1^{re} ES

Stéphane PASQUET

12 juin 2018

Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

12 juin 2018

I	Pourcentages	1
I.1	Taux d'évolution	1
I.2	Évolutions successives	1
I.3	Trouver le nombre	1
I.4	Hausse et baisse successives	1
I.5	Retour à l'état initial, le retour	1
I.6	Taux d'évolution moyen	2
I.7	Taux d'évolution moyen, le retour	2
I.8	Taux d'évolution inverse	2
I.9	Prix de l'essence	2
I.10	Tableau d'indices	2
I.11	Prix du timbre	2
I.12	Indices des loyers	3
II	Le second degré	8
II.1	Forme canonique et lecture graphique	8
II.2	Diverses expressions d'un trinôme du second degré	8
II.3	Racines et factorisation	9
II.4	Inéquations	9
II.5	Intersection de deux paraboles	10
II.6	Factorisation d'un polynôme de degré 3	10
II.7	Polynôme de degré 3	10
II.8	Points d'intersection d'une parabole et d'une droite	11
II.9	Trouver l'équation d'une parabole	11
II.10	Coût de fabrication	11
II.11	Bénéfice et coûts de fabrication	11
II.12	Détermination d'un prix de vente	12
II.13	Somme et produit des deux racines	12
III	Dérivation	26
III.1	Nombre dérivé et équation de tangentes	26
III.2	Lecture graphique de nombres dérivés	26
III.3	Détermination d'une fonction par lecture graphique	27
III.4	Détermination d'une fonction par lecture graphique	28
III.5	Dérivées de référence	28
III.6	Dérivées de fonctions produits et quotient	28
III.7	Sens de variation de fonctions quotients	29

III.8 Variations de fonctions produits	29
III.9 Un problème lié à l'économie	29
III.10 Coût total, marginal et bénéfice	30
IV Suites	46
IV.1 Reconnaître une suite arithmétique et géométrique	46
IV.2 Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, le retour	46
IV.3 Trouver un terme ou la raison dans une suite arithmétique	47
IV.4 Trouver un terme ou la raison d'une suite géométrique	47
IV.5 Établir une relation de récurrence	47
IV.6 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique	48
IV.7 Somme des premiers termes d'une suite géométrique	48
IV.8 Compilation d'exercices	48
IV.9 Le super-héros	49
IV.10 Avec un algorithme (1)	50
IV.11 Avec un algorithme (2)	51
V Statistiques descriptives	66
V.1 Notes de deux classes	66
V.2 Salaires dans deux entreprises	66
V.3 Influence d'un ajout dans une série statistique	67
V.4 Un algorithme	67
V.5 De l'algèbre dans les statistiques	68
VI Variables aléatoires	78
VI.1 Différents ordinateurs	78
VI.2 49 boules dans un urne	78
VI.3 Avec deux dés	79
VI.4 Avec une pièce de monnaie	79
VI.5 Lancer de 3 pièces	79
VI.6 Deux urnes	80
VI.7 Nombre variable de boules	80
VI.8 Avec une urne	81
VI.9 Dans une usine de composants électroniques	81
VI.10 Au lycée à vélo	81
VI.11 Au tennis	82
VII Fluctuation, échantillonnage	90
VII.1 Pièce défectueuse	90
VII.2 Un dé peut-être truqué	90
VII.3 Le médecin de campagne	90
VII.4 Les OVNIS	90
VII.5 Coup de fatigue au centre d'appels	91

Règles de navigation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

12 juin 2018

Bonjour.

Avant toutes choses, je vous remercie d'avoir acquis cet ouvrage. J'espère qu'il vous satisfera pleinement.

J'ai souhaité créer ici un document dans lequel il est facile de naviguer. C'est la raison pour laquelle :

- À chaque énoncé d'exercices, vous pouvez cliquer sur le numéro de la page où se trouve le corrigé pour vous y rendre directement ;
- De même, quand vous êtes sur un corrigé, vous pouvez par un simple clic revenir à l'énoncé de l'exercice concerné ;
- De plus, à tout moment, vous pouvez retourner au sommaire en cliquant sur le petit carré ■ qui se trouve devant chaque titre.

Cette édition a été vérifiée avec attention. Cependant, l'erreur est humaine et malgré ma vigilance, il se pourrait qu'il y ait quelques erreurs. Si tel est le cas, ou si vous avez un doute, contactez-moi à l'aide du formulaire de contact sur mon site :

<http://www.mathweb.fr>

Dans ce cas, n'oubliez pas de préciser votre email (celui avec lequel vous avez acquis cet ouvrage) et le titre de l'ouvrage.

Stéphane Pasquet

Pourcentages

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

12 juin 2018

■ Exercice 1. Taux d'évolution

★★★★★ **A**

Corrigé page 4

Calculer, dans chacun des cas suivants, le taux d'évolution pour passer de la valeur x_1 à la valeur x_2 .

1 $x_1 = 20$ et $x_2 = 130$.

3 $x_1 = 150$ et $x_2 = 100$.

2 $x_1 = 15$ et $x_2 = 70$.

4 $x_1 = 200$ et $x_2 = 10$.

■ Exercice 2. Évolutions successives

★★★★★ **A**

Corrigé page 4

Le prix d'un article subit une hausse de 20 %, puis une baisse de 10 %.
Quel est le taux d'évolution global ?

■ Exercice 3. Trouver le nombre

★★★★★ **A**

Corrigé page 4

1 Un article coûtant 20 € en temps normal est en solde à « -15 % ». Calculer le prix de cet article pendant ces soldes.

2 Un article vaut, après réduction de 15 %, 21,25 €. Quel est le prix de cet article avant réduction ?

■ Exercice 4. Hausse et baisse successives

★★★★★ **R**

Corrigé page 5

Une valeur est augmentée de t %, puis diminuée de t %, où $t > 0$.
Existe-t-il une valeur de t telle que le nombre final soit égal au nombre initial ?

■ Exercice 5. Retour à l'état initial, le retour

★★★★★ **R**

Corrigé page 5

Une valeur est augmentée de t %, puis diminuée de t' %, où $t > 0$ et $t' > 0$.

1 Exprimer t' en fonction de t de sorte que le nombre final soit égal au nombre initial.

2 Calculer alors t' quand $t = 20$.

■ Exercice 6. Taux d'évolution moyen

★★★★★ R

Corrigé page 5

On considère deux évolutions successives $t_1\%$ et $t_2\%$.

On appelle *taux d'évolution moyen* le pourcentage $t\%$ tel que, si l'on effectue deux évolutions successives de $t\%$, on obtient la même évolution globale.

Calculer le taux d'évolution moyen lorsque $t_1 = 6\%$ et $t_2 = 10\%$.

■ Exercice 7. Taux d'évolution moyen, le retour

★★★★★ R

Corrigé page 6

Une grande entreprise souhaite voir le prix de ses prestations augmenter de 30 % sur 5 ans.

Les journalistes disent alors que cela fera une augmentation annuelle moyenne de 6 %. Ont-ils raison ?

■ Exercice 8. Taux d'évolution inverse

★★★★☆ R

Corrigé page 6

Une valeur subit une évolution de 30 %.

Quelle doit être l'évolution suivante pour revenir à la valeur initiale ?

Indices

■ Exercice 9. Prix de l'essence

★★★★☆ A

Corrigé page 6

En mars 2000, le litre de gazole était vendu dans une station service au prix de 0,65 €. En mars 2001, il y était vendu 0,78 €.

L'indice du prix de litre de gazole est noté I_0 (base 100 en 2000).

Calculer I_0 .

■ Exercice 10. Tableau d'indices

★★★★☆ A

Corrigé page 6

Compléter le tableau suivant :

Époque	Époque 0	Époque 1	Époque 2
Indice	100	108	
Prix (en €)	3,5		4,10

■ Exercice 11. Prix du timbre

★★★★☆ A

Corrigé page 6

Le coût d'un timbre poste pour une lettre normale a été de :

1990	1993	1994
0,34 €	0,38 €	0,43 €

On décide d'attribuer l'indice 100 à l'année 1990.

1 Calculer les indices pour les années 1993 et 1994.

2 Quel est le pourcentage d'augmentation de 1994 par rapport à 1990 ?

■ Exercice 12. Indices des loyers

★★★★☆ A

Corrigé page 7

Le graphique ci-dessous représente l'évolution annuelle de l'indice de référence des loyers :



Source : INSEE

- 1 Décrire les variations de l'indice des loyers de 2008 à 2012.
- 2 L'INSEE donne avec ce graphique le tableau suivant donnant les indices de référence des loyers (référence 100 au 4^e trimestre 1998) :

	En niveau	Évolution annuelle (T/T-4) en %
2008 T1	115,12	+ 1,81
2008 T2	116,07	+ 2,38
2008 T3	117,03	+ 2,95
2008 T4	117,54	+ 2,83
2009 T1	117,70	+ 2,24
2009 T2	117,59	+ 1,31
2009 T3	117,41	+ 0,32
2009 T4	117,47	- 0,06
2010 T1	117,81	+ 0,09
2010 T2	118,26	+ 0,57
2010 T3	118,70	+ 1,10
2010 T4	119,17	+ 1,45
2011 T1	119,69	+ 1,60
2011 T2	120,31	+ 1,73
2011 T3	120,95	+ 1,90
2011 T4	121,68	+ 2,11
2012 T1	122,37	+ 2,24
2012 T2	122,96	+ 2,20
2012 T3	123,55	+ 2,15

- a. Expliquer le calcul qui permet de trouver le pourcentage de la ligne en couleur (« +2,11 »).
- b. Calculer le pourcentage d'évolution d'un loyer du 4^e trimestre 1998 au 3^e trimestre 2012.

■ Corrigé de l'exercice 1.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad \frac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \frac{130 - 20}{20} \times 100 = \frac{110}{20} \times 100 = 550.$$

Le taux d'évolution est donc égal à 550%.

$$2 \quad \frac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \frac{70 - 15}{15} \times 100 = \frac{55}{15} \times 100 \approx 366,67.$$

Le taux d'évolution est donc égal à 366,67%.

$$3 \quad \frac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \frac{100 - 150}{150} \times 100 = \frac{-50}{150} \times 100 \approx -33,33.$$

Le taux d'évolution est donc égal à -33,33%.

$$4 \quad \frac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100 = \frac{10 - 200}{200} \times 100 = \frac{-190}{200} \times 100 = -95.$$

Le taux d'évolution est donc égal à -95%.

■ Corrigé de l'exercice 2.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le coefficient multiplicateur correspondant à une hausse de 20 % est égal à 1,2 ; celui correspondant à une baisse de 10 % est égal à 0,9.

Ainsi, le coefficient multiplicateur global est égal à $1,2 \times 0,9$, soit 1,08, ce qui correspond à une hausse de 8 %.

Le taux d'évolution global est donc égal à 8%.

■ Corrigé de l'exercice 3.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad 20 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 20 \times 0,8 = 16.$$

L'article vaut donc 16 € pendant ces soldes.

$$2 \quad 21,25 \div \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 25.$$

L'article vaut donc, avant réduction, 25 €.

■ Corrigé de l'exercice 4.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le coefficient multiplicateur global (CMG) est égal à $\left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1 - \frac{t^2}{10000}$.

Pour que le nombre final soit égal au nombre initial, il faudrait que le CMG soit égal à 1, ce qui ne peut pas être le cas car $\frac{t^2}{10000} \neq 0$.

Il n'existe donc aucun pourcentage correspondant à ce que l'on veut.

■ Corrigé de l'exercice 5.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le coefficient multiplicateur global (CMG) est égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 - \frac{t'}{100}\right).$$

On souhaite que le CMG soit égal à 1 d'où :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{100}\right) \left(1 - \frac{t'}{100}\right) &= 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{t'}{100} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{t'}{100} = \frac{100}{100 + t} \\ &\Leftrightarrow -\frac{t'}{100} = \frac{100}{100 + t} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{t'}{100} = 1 - \frac{100}{100 + t} \\ &\Leftrightarrow t' = 100 - \frac{10000}{100 + t} \\ &\Leftrightarrow t' = \frac{10000 + 100t - 10000}{100 + t} \\ &\Leftrightarrow \boxed{t' = \frac{100t}{100 + t}} \end{aligned}$$

2 Si $t = 20$, alors $t' = \frac{100 \times 20}{100 + 20} = \frac{2000}{120} = \frac{200}{12} = \frac{50}{3} \approx 16,67$.

■ Corrigé de l'exercice 6.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le CMG est égal ici à $1,06 \times 1,1 = 1,166$.

Si les deux augmentations sont égales à $t\%$, alors le CMG est égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2.$$

Ainsi, on veut :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 &= 1,166 \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = \sqrt{1,166} \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{100} = \sqrt{1,166} - 1 \\ &\Leftrightarrow t = 100 \left(\sqrt{1,166} - 1\right) \\ &\Leftrightarrow t \approx 5,64. \end{aligned}$$

Le taux moyen d'évolution est donc égal ici à 5,64 %.

■ Corrigé de l'exercice 7.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Prenons un tarif au hasard : $x = 100$.

S'il subit 5 hausses successives de 6 %, alors le CMG est égal à :

$$1,06^5 = 1,338\,225\,578.$$

À la fin, le tarif sera égal à :

$$100 \times 1,338\,225\,578 = 133,822\,5578.$$

Or,

$$\frac{133,822\,5578 - 100}{100} \times 100 = 33,822\,5578.$$

Donc l'augmentation sera de 33,82 %, et non 30 %.

Les journalistes ont donc tort de diviser le pourcentage total par le nombre d'années.

■ Corrigé de l'exercice 8.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le CM correspondant à 30 % est égal à 1,3. Le CM inverse est donc égal à :

$$\frac{1}{1,3} \approx 0,77,$$

ce qui correspond à une évolution de -23% .

L'évolution doit donc être de -23% pour revenir à la valeur initiale.

■ Corrigé de l'exercice 9.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$I_0 = \frac{0,78}{0,65} \times 100 = 1,2 \times 100 = 120.$$

L'indice du prix de litre de gazole est donc de 120.

■ Corrigé de l'exercice 10.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Époque	Époque 0	Époque 1	Époque 2
Indice	100	108	$\frac{4,10}{3,5} \times 100 = 117$
Prix (en €)	3,5	$\frac{108 \times 3,5}{100} = 3,78$	4,10

■ Corrigé de l'exercice 11.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'indice pour 1993 est : $\frac{0,38}{0,34} \times 100 \approx 111,76$.

L'indice pour 1994 est : $\frac{0,43}{0,34} \times 100 \approx 126,47$.

2 Le pourcentage d'augmentation de 1994 par rapport à 1990 est la différence entre les deux indices, soit 26,47 %.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Attention : ce que nous voyons est l'évolution de l'indice des loyers, et non l'indice lui-même. On constate que l'évolution est positive, sauf au 4^e trimestre 2009. Ainsi, l'indice croît jusqu'au 4^e trimestre 2009, décroît pour ce trimestre, puis croît de nouveau jusqu'au 3^e trimestre 2012.
- 2 *a.* « 2,11 » correspond à l'arrondi au centième du pourcentage d'augmentation de l'indice entre le 4^e trimestre 2010 et le 4^e trimestre 2011. Donc :

$$2,11 = \frac{121,68 - 119,17}{119,17} \times 100.$$

- b.* L'indice des loyers est de 123,55 au 3^e trimestre 2012 ; par conséquent, l'augmentation des loyers depuis le 4^e trimestre 1998 est de 23,55 %.

Le second degré

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

■ Exercice 1. Forme canonique et lecture graphique

★★★★★

A

Corrigé page 13

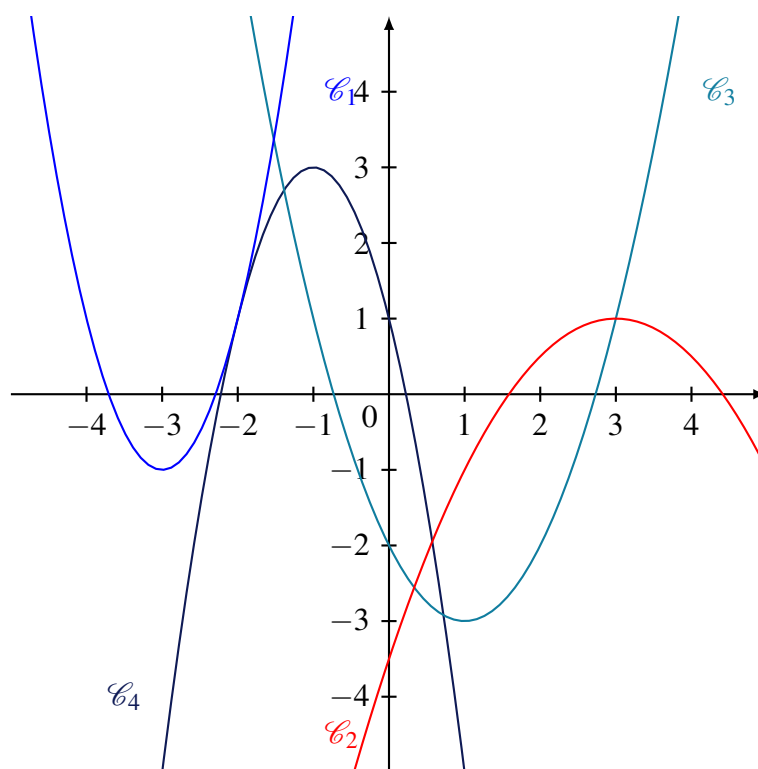
Associer les 4 fonctions suivantes à leur représentation graphique ci-dessous.

$$f(x) = -2(x+1)^2 + 3$$

$$h(x) = 2(x+3)^2 - 1$$

$$g(x) = (x-1)^2 - 3$$

$$j(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$$



■ Exercice 2. Diverses expressions d'un trinôme du second degré

★★★★★

A

Corrigé page 13

1 Soit $f(x) = 9x^2 - 54x + 56$.

a. Montrer que $f(x) = 9(x-3)^2 - 25$.

b. Montrer que $f(x) = (3x-14)(3x-4)$.

c. En utilisant la forme la plus adaptée de $f(x)$, résoudre les équations :

i. $f(x) = 56$.

ii. $f(x) = 0$.

iii. $f(x) = -25$.

2 Soit $g(x) = 2x^2 + 4x - 7$.

a. Montrer que $g(x) = 2(x+1)^2 - 9$.

b. Montrer que $g(x) = \left(x + \frac{3\sqrt{2}+2}{2}\right)(2x - 3\sqrt{2} + 2)$.

c. En utilisant la forme la plus adaptée de $g(x)$, résoudre les équations :

i. $g(x) = -9$.

ii. $g(x) = -7$.

iii. $g(x) = 0$.

3 Soit $h(x) = 2x^2 - 8x + 7$.

a. Montrer que $h(x) = 2(x-2)^2 - 1$.

b. Montrer que $h(x) = 2\left(x - \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$.

c. En utilisant la forme la plus adaptée de $h(x)$, résoudre les équations :

i. $h(x) = 0$.

ii. $h(x) = 7$.

iii. $h(x) = -1$.

■ Exercice 3. Racines et factorisation

★☆☆☆☆ **A**

Corrigé page 16

Pour chacun des polynômes suivants, déterminer les éventuelles racines puis l'éventuelle factorisation.

1 $3x^2 - 5x + 2$.

4 $x^2 - 3x + 2$.

2 $3x^2 - 6x + 1$.

5 $8x^2 - x - \frac{1}{4}$.

3 $x^2 + x + 1$.

6 $x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3}$.

■ Exercice 4. Inéquations

★☆☆☆☆ **A**

Corrigé page 18

Résoudre les inéquations suivantes (on pourra se servir des résultats trouvés à l'exercice précédent intitulé « Racines & factorisation »).

1 $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$.

3 $x^2 + x + 1 < 0$

5 $8x^2 - x - \frac{1}{4} < 0$.

2 $3x^2 - 6x + 1 > 0$.

4 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

6 $x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3} > 0$.

■ Exercice 5. Intersection de deux paraboles

★★★★☆ (R)

Corrigé page 19

Soient $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$, dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_f$, et $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$, de courbe représentative $\mathcal{C}_g$.

On cherche à savoir si les deux courbes se coupent et si tel est le cas, les coordonnées des points d'intersection.

- 1 Montrer que savoir si les deux courbes se coupent revient à savoir si l'équation :

$$-\frac{5}{2}x^2 + 7x + 3 = 0.$$

- 2 Montrer alors que les deux courbes se coupent.
- 3 Déterminer alors les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.

■ Exercice 6. Factorisation d'un polynôme de degré 3

★★★★☆ (R)

Corrigé page 20

On considère le polynôme P suivant :

$$P(x) = 10x^3 + 9x^2 - 13x - 6.$$

- 1 Montrer que 1 est une racine de $P(x)$.
- 2 On peut alors écrire $P(x)$ sous la forme factorisée : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

a. Développer cette expression factorisée et montrer que l'on obtient :

$$P(x) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

b. Identifier alors les coefficients de chaque terme en x^n , puis en déduire les valeurs de a , b et c .

- 3 Déterminer une factorisation de $P(x)$ comme produit de trois polynômes de degré 1 dont les coefficients sont tous entiers.

■ Exercice 7. Polynôme de degré 3

★★★★☆ (R)

Corrigé page 20

On considère le polynôme P suivant :

$$P(x) = -2x^3 - x^2 + 13x - 6.$$

- 1 Montrer que $\alpha = 2$ est une racine de $P(x)$.
- 2 En déduire une factorisation de $P(x)$ comme produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.
- 3 Trouver alors toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

■ Exercice 8. Points d'intersection d'une parabole et d'une droite

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 22

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = -2x^2 + 3x + 2$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x + 1$.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

■ Exercice 9. Trouver l'équation d'une parabole

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 22

Une parabole $\mathcal{P}$ passe par les points $A(-1; 1)$, $B(1; -2)$ et $C(4; 2)$.

Trouver son équation.

■ Exercice 10. Coût de fabrication

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 23

Une entreprise a estimé ses coûts de fabrication quotidiens à l'aide de la fonction C définie pour tout réel q dans l'intervalle $[0; 25]$ par :

$$C(q) = -0,5q^2 + 5q + 300,$$

où q est la quantité d'objets fabriqués, exprimée en centaines, et $C(q)$ en euros.

- 1 Que représente $C(0)$ pour cette entreprise ?
- 2 Pour combien d'objets fabriqués ce coût est-il maximal ? Quel est alors ce coût de fabrication ?
- 3 L'entreprise vend chaque objet fabriqué 20 €.
Exprimer la fonction $R(q)$ représentant les recettes quotidiennes de cette entreprise.
- 4 Pour combien d'objets fabriqués et vendus le bénéfice quotidien est-il nul ?
- 5 Pour combien d'objets fabriqués et vendus le bénéfice quotidien est-il maximal ? Quel est alors le bénéfice quotidien de l'entreprise ?

■ Exercice 11. Bénéfice et coûts de fabrication

★★★★☆☆ (R)

Corrigé page 24

Une entreprise de fabrication de montres estime que ses coûts de fabrication mensuels peuvent être représentés par la fonction C définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$C(q) = -0,2q^2 + 1,2q + 2,$$

où q est exprimé en dizaines et $C(q)$ en milliers d'euros.

L'entreprise vend 1 montre à 30 €. On appelle CA la fonction définie sur $[0; +\infty[$ représentant le chiffre d'affaire de cette entreprise, CA étant exprimé en milliers d'euros.

- 1 Expliquer pourquoi $CA(q) = 0,3q$.
- 2 Tracer à la calculatrice les fonctions C et CA , puis donner une estimation de l'abscisse du point d'intersection (arrondie au dixième) des deux courbes représentatives.
- 3 Calculer une valeur approchée du nombre de montres que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice.

■ Exercice 12. Détermination d'un prix de vente

★★★★☆ R

Corrigé page 24

Jean Frémis est responsable d'une boutique de déguisements d'Halloween. Il vend tous ses déguisements a €, a étant un entier naturel non nul.

Il paie un loyer pour sa boutique de 500 € par mois. À cela s'ajoutent divers frais fixes qu'il estime à 150 € mensuels. De plus, les frais mensuels de réapprovisionnement d'articles sont estimés par la fonction f définie pour tout réel x compris entre 0 et 165 par :

$$f(x) = -0,003x^2 + 0,5x,$$

où x représente le nombre d'articles commandés à sa centrale d'achat.

- 1 Montrer que le bénéfice mensuel pour x articles vendus est exprimé par la fonction b définie par :

$$b(x) = 0,003x^2 + (a - 0,5)x - 650.$$

- 2 La capacité de stockage de sa boutique ne lui permet de n'avoir que 165 costumes. Il souhaite donc que son bénéfice soit maximal pour $x = 165$.

- Montrer qu'il n'a aucun soucis à se faire de ce côté là et que son bénéfice sera toujours optimal pour $x = 165$.
- Déterminer le prix minimal de vente d'un costume.
- Déterminer le prix de vente d'un costume de sorte à ce que son bénéfice mensuel soit de 2 000 €.

■ Exercice 13. Somme et produit des deux racines

★★★★☆ R

Corrigé page 25

On considère un polynôme $A(x) = ax^2 + bx + c$ qui admet deux racines distinctes x_1 et x_2 .

- Écrire $A(x)$ sous sa forme factorisée en fonction de x_1 et x_2 .
- On note $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$.
À l'aide de la question 1, montrer que $A(x) = a(x^2 - Sx + P)$.
- Montrer alors que $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.
- En vous aidant de la question 3 et en remarquant que $x_1 = 1$ est une racine du polynôme $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$, déterminer rapidement la seconde racine x_2 de $A(x)$.

Remarque : si on constate qu'un polynôme admet pour racine « 1 », « -1 », « 2 » ou « -2 », on peut utiliser cette méthode pour trouver la seconde racine plus rapidement.

Si la somme des coefficients du polynôme est égale à 0, alors « 1 » est une racine. Pour les autres valeurs, il faut sans doute plus de feeling...

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Nous savons, d'après le cours, que le trinôme du second degré qui a pour forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est représenté par une parabole symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$. Ainsi,

- $\mathcal{C}_1$ est la représentation graphique de $h(x)$ (car $x = -3$ est l'équation de son axe de symétrie);
- $\mathcal{C}_2$ est la représentation graphique de $j(x)$ (car $x = 3$ est l'équation de son axe de symétrie);
- $\mathcal{C}_3$ est la représentation graphique de $g(x)$ (car $x = 1$ est l'équation de son axe de symétrie);
- $\mathcal{C}_4$ est la représentation graphique de $f(x)$ (car $x = -1$ est l'équation de son axe de symétrie).

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = 9x^2 - 54x + 56.$

$$\begin{aligned} a. \quad 9(x-3)^2 - 25 &= 9(x^2 - 6x + 9) - 25 \\ &= 9x^2 - 54x + 81 - 25 \\ &= 9x^2 - 54x + 56 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \quad (3x-14)(3x-4) &= 9x^2 - 12x - 42x + 56 \\ &= 9x^2 - 54x + 56 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. \quad \text{i. } f(x) = 56 &\iff 9x^2 - 54x + 56 = 56 \\ &\iff 9x^2 - 54x = 0 \\ &\iff 9x(x-6) = 0 \\ &\iff 9x = 0 \text{ ou } x-6 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 6. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 56$ sont donc $x = 0$ et $x = 6$.

$$\begin{aligned} \text{ii. } f(x) = 0 &\iff (3x-14)(3x-4) = 0 \\ &\iff 3x-14 = 0 \text{ ou } 3x-4 = 0 \\ &\iff x = \frac{14}{3} \text{ ou } x = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc $x = \frac{14}{3}$ et $x = \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}
\text{iii. } f(x) = -25 &\iff 9(x-3)^2 - 25 = -25 \\
&\iff 9(x-3)^2 = 0 \\
&\iff (x-3)^2 = 0 \\
&\iff x-3 = 0 \\
&\iff x = 3.
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $f(x) = -25$ est donc $x = 3$.

2 $g(x) = 2x^2 + 4x - 7$.

$$\begin{aligned}
a. \quad 2(x+1)^2 - 9 &= 2(x^2 + 2x + 1) - 9 \\
&= 2x^2 + 4x + 2 - 9 \\
&= 2x^2 + 4x - 7 \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b. \quad \left(x + \frac{3\sqrt{2}+2}{2}\right)(2x - 3\sqrt{2} + 2) &= 2x^2 + (2 - 3\sqrt{2})x + \frac{3\sqrt{2}+2}{2} \times 2x \\
&\quad + (2 - 3\sqrt{2}) \times \frac{3\sqrt{2}+2}{2} \\
&= 2x^2 + (2 - 3\sqrt{2})x + (2 + 3\sqrt{2})x + \frac{1}{2}[2^2 - (3\sqrt{2})^2] \\
&= 2x^2 + 4x + \frac{1}{2}(4 - 9 \times 2) \\
&= 2x^2 + 4x - 7 \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c. \quad \text{i. } g(x) = -9 &\iff 2(x+1)^2 - 9 = -9 \\
&\iff 2(x+1)^2 = 0 \\
&\iff (x+1)^2 = 0 \\
&\iff x+1 = 0 \\
&\iff x = -1.
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $g(x) = -9$ est donc $x = -1$.

$$\begin{aligned}
\text{ii. } g(x) = 7 &\iff 2x^2 + 4x - 7 = -7 \\
&\iff 2x^2 + 4x = 0 \\
&\iff 2x(x+2) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = -2.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $g(x) = -7$ sont donc $x = 0$ et $x = -2$.

$$\begin{aligned}
\text{iii. } g(x) = 0 &\iff \left(x + \frac{3\sqrt{2}+2}{2}\right)(2x - 3\sqrt{2} + 2) = 0 \\
&\iff x + \frac{3\sqrt{2}+2}{2} = 0 \text{ ou } 2x - 3\sqrt{2} + 2 = 0 \\
&\iff x = -\frac{3\sqrt{2}+2}{2} \text{ ou } 2x = 3\sqrt{2} - 2 \\
&\iff x = -\frac{3\sqrt{2}+2}{2} \text{ ou } x = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont donc $x = -\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$ et $x = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

3 $h(x) = 2x^2 - 8x + 7.$

$$\begin{aligned} a. \quad 2(x-2)^2 - 1 &= 2(x^2 - 4x + 4) - 1 \\ &= 2x^2 - 8x + 8 - 1 \\ &= 2x^2 - 8x + 7 \\ &= h(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \quad 2 \left(x - \frac{4-\sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{4+\sqrt{2}}{2} \right) &= 2 \left(x^2 - \frac{4+\sqrt{2}}{2}x - \frac{4-\sqrt{2}}{2}x + \frac{4-\sqrt{2}}{2} \times \frac{4+\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 2 \left[x^2 - \left(\frac{4+\sqrt{2}+4-\sqrt{2}}{2} \right) x + \frac{4^2 - (\sqrt{2})^2}{4} \right] \\ &= 2 \left(x^2 - 4x + \frac{7}{2} \right) \\ &= 2x^2 - 8x + 7 \\ &= h(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. \quad \text{i. } h(x) = 0 &\iff 2 \left(x - \frac{4-\sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{4+\sqrt{2}}{2} \right) = 0 \\ &\iff x - \frac{4-\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ ou } x - \frac{4+\sqrt{2}}{2} = 0 \\ &\iff x = \frac{4-\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{4+\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $gh(x) = 0$ sont donc $x = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{4+\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{ii. } h(x) = 7 &\iff 2x^2 - 8x + 7 = 7 \\ &\iff 2x^2 - 8x = 0 \\ &\iff 2x(x-4) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $h(x) = 7$ sont donc $x = 0$ et $x = 4$.

$$\begin{aligned} \text{iii. } h(x) = -1 &\iff 2(x-2)^2 - 1 = -1 \\ &\iff 2(x-2)^2 = 0 \\ &\iff (x-2)^2 = 0 \\ &\iff x-2 = 0 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $h(x) = -1$ est donc $x = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le discriminant de $3x^2 - 5x + 2$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 \\ &= 25 - 24 \\ \Delta &= 1.\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 3} & x_2 &= \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 3} \\ x_1 &= \frac{2}{3} & x_2 &= 1\end{aligned}$$

On en déduit que la factorisation est :

$$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1) \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

2 Le discriminant de $3x^2 - 6x + 1$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times 3 \times 1 \\ &= 36 - 12 \\ \Delta &= 24.\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-(-6) - \sqrt{24}}{2 \times 3} & x_2 &= \frac{-(-6) + \sqrt{24}}{2 \times 3} \\ x_1 &= \frac{6 - 2\sqrt{6}}{6} & x_2 &= \frac{6 + 2\sqrt{6}}{6} \\ x_1 &= \frac{3 - \sqrt{6}}{3} & x_2 &= \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que la factorisation est :

$$3x^2 - 6x + 1 = 3 \left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)$$

3 Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ \Delta &= -1.\end{aligned}$$

Donc il n'admet aucune racine et donc pas de factorisation.

4 Le discriminant de $x^2 - 3x + 2$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 \\ &= 9 - 8 \\ \Delta &= 1.\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} & x_2 &= \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} \\ x_1 &= \frac{2}{2} & x_2 &= \frac{4}{2} \\ x_1 &= 1 & x_2 &= 2\end{aligned}$$

On en déduit que la factorisation est :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

5 Le discriminant de $8x^2 - x - \frac{1}{4}$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 + 8 \\ \Delta &= 9.\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 8} & x_2 &= \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 8} \\ x_1 &= \frac{-2}{16} & x_2 &= \frac{4}{16} \\ x_1 &= -\frac{1}{8} & x_2 &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

On en déduit que la factorisation est :

$$8x^2 - x - \frac{1}{4} = 8 \left(x - \frac{1}{8}\right) \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

6 Le discriminant de $x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3}$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times \sqrt{3} \times (-2\sqrt{3}) \\ &= 1 + 24 \\ \Delta &= 25.\end{aligned}$$

Donc il admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 x_1 &= \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times \sqrt{3}} & x_2 &= \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times \sqrt{3}} \\
 x_1 &= \frac{-4}{2\sqrt{3}} & x_2 &= \frac{6}{2\sqrt{3}} \\
 x_1 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} & x_2 &= \frac{3}{\sqrt{3}} \\
 x_1 &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} & x_2 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

On en déduit que la factorisation est :

$$x^2\sqrt{3} - x - 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) (x - \sqrt{3})$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Les deux racines sont $\frac{2}{3}$ et 1. Le signe de x^2 est positif donc $3x^2 - 5x + 2$ est positif à l'extérieur des racines et négatif à l'intérieur :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{2}{3}; 1 \right]$$

On inclut les racines car l'inégalité est large.

- 2 Il y a deux racines distinctes x_1 et x_2 et le coefficient de x^2 est positif donc le polynôme est positif à l'extérieur des racines :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \right[\cup \left] \frac{3 + \sqrt{3}}{3}; +\infty \right[$$

On exclut les racines car l'inégalité est stricte.

- 3 Le discriminant est strictement négatif donc le polynôme est du signe du coefficient de x^2 , donc ici positif. Donc :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

- 4 Il y a deux racines distinctes et le coefficient de x^2 est positif donc le polynôme est positif à l'extérieur des racines d'où :

$$\mathcal{S} =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

- 5 Il y a deux racines distinctes donc le polynôme est négatif entre les racines, d'où :

$$\mathcal{S} = \left] \frac{1}{8}; \frac{1}{4} \right[$$

6 Il y a deux racines distinctes donc le polynôme est positif à l'extérieur des racines donc :

$$\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right[\cup \left] \sqrt{3}; +\infty \right[$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent s'il existe au moins un x tel que $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 2x^2 - 4x - 1 \\ &\iff -\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 3x + 4x + 2 + 1 = 0 \\ &\iff -\frac{5}{2}x^2 + 7x + 3 = 0. \end{aligned}$$

2 Le discriminant du polynôme $-\frac{5}{2}x^2 + 7x + 3$ est :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times 3 = 49 + 30 = 79 > 0,$$

donc l'équation $-\frac{5}{2}x^2 + 7x + 3 = 0$ admet deux solutions distinctes, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points distincts d'abscisses respectives x_1 et x_2 .

3 On a :

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{79}}{2 \times \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{7 + \sqrt{79}}{5}$$

et

$$x_2 = \frac{-7 + \sqrt{79}}{2 \times \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{7 - \sqrt{79}}{5}.$$

x_1 correspond à l'abscisse d'un point M_1 dont l'ordonnée est égale à $f(x_1)$ (ou $g(x_1)$, c'est pareil !).

$$g(x_1) = 2x_1^2 - 4x_1 - 1 = \frac{8\sqrt{79} + 91}{25} \text{ (après calculs).}$$

x_2 est l'abscisse d'un point M_2 dont l'ordonnée est $g(x_2)$:

$$g(x_2) = 2x_2^2 - 4x_2 - 1 = \frac{-8\sqrt{79} + 91}{25} \text{ (après calculs).}$$

Les deux points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont alors :

$$M_1 \left(\frac{7 + \sqrt{79}}{5}; \frac{8\sqrt{79} + 91}{25} \right) \quad \text{et} \quad M_2 \left(\frac{7 - \sqrt{79}}{5}; \frac{-8\sqrt{79} + 91}{25} \right)$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $P(1) = 10 \times 1^3 + 9 \times 1^2 - 13 \times 1 - 6 = 19 - 19 = 0.$

Donc 1 est bien une racine de P (car son image est égale à 0).

2 a. $(x-1)(ax^2+bx+c)$
 $= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$ (on utilise la distributivité)
 $= ax^3 + bx^2 - ax^2 + cx - bx - c$ (on regroupe les termes de même degré)
 $= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ (on regroupe les coefficients)

b. On doit donc avoir pour tout réel x :

$$P(x) = 10x^3 + 9x^2 - 13x - 6 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

soit :

$$\begin{cases} 10 &= a \\ 9 &= b-a \\ -13 &= c-b \\ -6 &= -c \end{cases}$$

On en déduit donc que $a = 10$ (première équation) et $c = 6$ (dernière équation).
Ainsi, de la deuxième équation, on peut écrire $9 = b - 10$, soit $b = 9 + 10 = 19$.

Finalement, $P(x) = (x-1)(10x^2 + 19x + 6)$.

3 Le discriminant du polynôme $10x^2 + 19x + 6$ est :

$$\Delta = 19^2 - 4 \times 10 \times 6 = 121 = 11^2$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-19 - 11}{2 \times 10} = -\frac{3}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-19 + 11}{20} = -\frac{2}{5}.$$

$$\text{Ainsi, } 10x^2 + 19x + 6 = \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{2}{5}\right) = (2x+3)(5x+2).$$

Finalement, $P(x) = (x-1)(2x+3)(5x+2)$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $P(2) = -2 \times 2^3 - 2^2 + 13 \times 2 - 6$
 $= -2 \times 8 - 4 + 26 - 6$
 $= -16 - 4 + 26 - 6$
 $= -20 + 20$
 $= 0.$

Ainsi, $P(2) = 0$, donc $\alpha = 2$ est une racine de $P(x)$.

- 2 Si α est une racine de $P(x)$, alors $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, où Q est un polynôme de degré inférieur à 1 à celui de P (donc ici, le degré de Q est égal à $3 - 1 = 2$; c'est donc un polynôme de degré 2).

Posons alors $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ et développons cette expression :

$$\begin{aligned}(x - 2)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c.\end{aligned}$$

On sait que pour tout réel x :

$$-2x^3 - x^2 + 13x - 6 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c,$$

donc :

$$\begin{cases} -2 &= a \\ -1 &= b - 2a \\ 13 &= c - 2b \\ -6 &= -2c \end{cases} \quad (\text{les coefficients de chaque } x^n \text{ doivent être égaux})$$

On en déduit que $a = -2$ et $c = \frac{-6}{-2} = 3$ d'après la première et dernière équation.

La deuxième équation nous donne alors :

$$-1 = b - 2a \iff -1 = b - 2 \times (-2) \iff -1 = b + 4 \iff b = -1 - 4 = -5.$$

Ainsi, $P(x) = (x - 2)(-2x^2 - 5x + 3)$.

- 3 Le discriminant du polynôme $-2x^2 - 5x + 3$ est :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 49 = 7^2;$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-5) - 7}{2 \times (-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-5) + 7}{2 \times (-2)} = \frac{12}{-4} = -3.$$

L'ensemble solution de l'équation $P(x) = 0$ est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ 2; -3; \frac{1}{2} \right\}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Pour trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, on doit résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
 -2x^2 + 3x + 2 &= 3x + 1 \iff -2x^2 + 3x - 3x + 2 - 1 = 0 \\
 &\iff -2x^2 + 1 = 0 \\
 &\iff 1 - 2x^2 = 0 \\
 &\iff 1^2 - (\sqrt{2}x)^2 = 0 \\
 &\iff (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x) = 0 \\
 &\iff 1 - \sqrt{2}x = 0 \text{ ou } 1 + \sqrt{2}x = 0 \\
 &\iff x = \frac{-1}{-\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &\iff x = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\
 &\iff x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

Les abscisses des points d'intersection sont donc : $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 9.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Posons $y = ax^2 + bx + c$ l'équation de $\mathcal{P}$. Alors :

- $A(-1; 1) \in \mathcal{P} \iff 1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \iff a - b + c = 1.$
- $B(1; -2) \in \mathcal{P} \iff -2 = a \times 1^2 + b \times 1 + c \iff a + b + c = -2.$
- $C(4; 2) \in \mathcal{P} \iff 2 = a \times 4^2 + b \times 4 + c \iff 16a + 4b + c = 2.$

On doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a - b + c = 1 & (1) \\ a + b + c = -2 & (2) \\ 16a + 4b + c = 2 & (3) \end{cases}$$

En faisant (2) - (1), on obtient $2b = -3$, soit $b = -\frac{3}{2}$. Ainsi, le système est équivalent à (en remplaçant b par $-\frac{3}{2}$) :

$$\begin{cases} a + c = -\frac{1}{2} & (1) \\ 16a + c = 8 & (2) \end{cases}$$

En faisant (2) - (1), on obtient : $15a = \frac{17}{2}$, soit $a = \frac{17}{30}$.

Ainsi, de l'équation (2), on a : $c = 8 - 16a = 8 - 16 \times \frac{17}{30} = -\frac{32}{30} = -\frac{16}{15}$. Ainsi :

$$\mathcal{P} : y = \frac{17}{30}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{16}{15}.$$

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $C(0)$ représente le coût de fabrication pour 0 objet, c'est-à-dire les charges fixes.
- 2 C est un polynôme de degré 2 dont le coefficient du terme de degré 2 est négatif, donc son maximum est atteint pour $q = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \times (-0,5)} = 5$.

Les coûts de fabrication sont maximaux pour 500 objets fabriqués.

On a : $C(5) = -0,5 \times 5^2 + 5 \times 5 + 300 = 312,5$.

Ainsi, le coût de fabrication maximum est 312,5 €.

- 3 Les recettes de l'entreprise sont données par la fonction R définie par :

$$R(q) = 20q.$$

- 4 Le bénéfice quotidien est donné par la fonction B définie par :

$$B(q) = R(q) - C(q)$$

$$B(q) = 0,5q^2 + 15q - 300.$$

Le discriminant de B est :

$$\begin{aligned}\Delta &= 15^2 - 4 \times 0,5 \times (-300) \\ &= 825.\end{aligned}$$

B a donc deux racines :

$$q_1 = \frac{-15 - \sqrt{825}}{2 \times 0,5} < 0$$

et

$$q_2 = \frac{-15 + \sqrt{825}}{2 \times 0,5} \approx 13,723 \in [0; 25].$$

Ainsi, le bénéfice sera quasiment nul pour 1 372 objets fabriqués et vendus quotidiennement.

- 5 Le sommet de la parabole représentative de B est atteint pour :

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{15}{2 \times 0,5} = -15.$$

Ainsi, sur $[0; 25]$, la fonction B est croissante et son maximum est atteint pour $q = 25$.

$$\begin{aligned}B(25) &= 0,5 \times 25^2 + 15 \times 25 - 300 \\ &= 387,50.\end{aligned}$$

Le bénéfice quotidien maximal est alors 387,50 €.

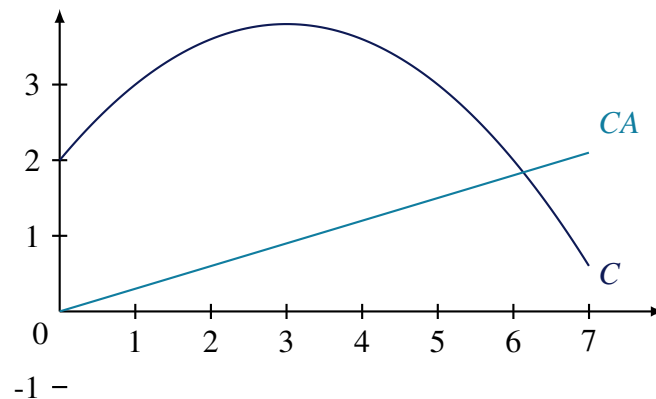
■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le prix d'une montre est 30 €. Ainsi, pour 10 montres, l'entreprise gagnera 300 €, et donc q dizaines de montres rapporteront $300q$ €. CA étant exprimé en milliers d'euros, on divise ce dernier résultat par 1 000 et on obtient :

$$CA(q) = \frac{300q}{1000} = 0,3q.$$

- 2 À la calculatrice, on trace la courbe représentative des deux fonctions C et CA :



On peut donc estimer à environ 6,1 l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

- 3 Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que $CA(q) > C(q)$.

$$\begin{aligned} CA(q) > C(q) &\iff 0,3q > -0,2q^2 + 1,2q + 2 \\ &\iff -0,2q^2 + 1,2q - 0,3q + 2 < 0 \\ &\iff -0,2q^2 + 0,9q + 2 < 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $-0,2q^2 + 0,9q + 2$ est :

$$\Delta = 0,9^2 - 4 \times (-0,2) \times 2 = 2,41$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$q_1 = \frac{-0,9 - \sqrt{2,41}}{-0,4} \approx 6,13$$

et

$$q_2 = \frac{-0,9 + \sqrt{2,41}}{-0,4} \approx -1,63 \text{ (ce qui ne nous intéresse pas car étant négatif).}$$

q_1 correspond à plus de 61 montres donc l'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle vend au moins 62 montres.

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le bénéfice est égal au prix de vente (soit ax) auquel on soustrait les charges ($f(x) + 650$). Ainsi, $b(x) = ax - (-0,003x^2 + 0,5x + 650)$, soit $b(x) = 0,003x^2 + (a - 0,5)x - 650$.

- 2 a. La courbe représentative de b est une parabole dont les branches sont tournées vers le haut (car le coefficient de x^2 est positif) donc la fonction b va décroître (pour x allant jusqu'à $-\frac{a-0,5}{2 \times 0,003}$ puis croître à partir de $-\frac{a-0,5}{0,006}$. Comme a est un entier naturel non nul, $a > 0$ donc $a - 0,5 > 0,5$ et donc $-\frac{a-0,5}{0,006} < 0$.

La fonction b sera donc croissante sur $[0; 165]$. Le bénéfice sera donc toujours optimal pour $x = 165$ et sera donc égal à :

$$b(165) = 0,003 \times 165^2 + 165(a - 0,5) - 650 = 165a - 650,825.$$

- b. Le bénéfice soit être supérieur ou égal à 0 donc :

$$\begin{aligned} 165a - 650,825 \geq 0 &\iff a \geq \frac{650,825}{165} \\ &\iff a \geq 3,94 \end{aligned}$$

a étant un entier, il faut que le prix de vente d'un costume soit au moins égal à 4 €.

- c. Si l'on veut que $b(165) = 2000$, alors :

$$\begin{aligned} 165a - 650,825 &= 2000 \iff 165a = 2000 + 650,825 \\ &\iff a = \frac{2650,825}{165} \\ &\iff a \approx 16,06 \end{aligned}$$

Ainsi, un costume devra être vendu 16 € pour avoir un bénéfice de 2 000 €.

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Si x_1 et x_2 sont les deux racines de $A(x)$, alors :

$$A(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- 2
$$\begin{aligned} A(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) \\ &= a[x^2 - (x_2 + x_1)x + x_1x_2] \end{aligned}$$

$$A(x) = a(x^2 - Sx + P)$$

- 3 Nous venons de montrer que $A(x) = a(x^2 - Sx + P)$.

Or, $A(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Donc, pour tout réel x :

$$x^2 - Sx + P = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

ce qui signifie que $-S = \frac{b}{a}$, soit $S = -\frac{b}{a}$, et $P = \frac{c}{a}$.

- 4 $A(1) = 3 - 5 + 2 = 0$ donc $x_1 = 1$ est bien une racine de $A(x)$ (on dit que c'est une « racine évidente »).

Or, d'après la question 3, $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$, soit $1 \times x_2 = \frac{2}{3}$.

La seconde racine est donc égale à $\frac{2}{3}$.

Dérivation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

■ Exercice 1. Nombre dérivé et équation de tangentes

★★★★☆ **A**

Corrigé page 31

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(a)$ puis trouver l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

1 $f(x) = x^2, a = 2$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1$

4 $f(x) = \sqrt{x}, a = 4$

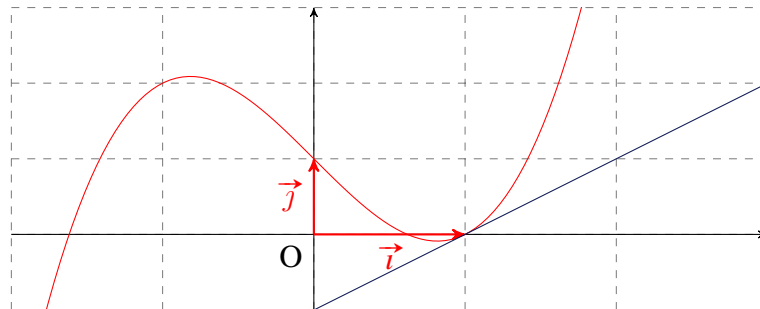
■ Exercice 2. Lecture graphique de nombres dérivés

★★★★☆ **A**

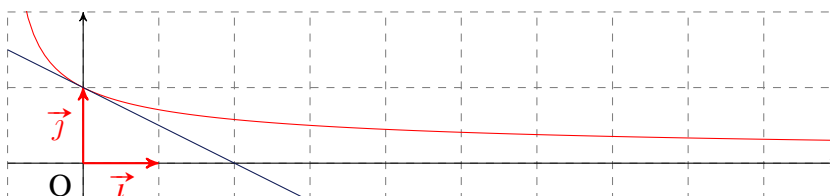
Corrigé page 33

Pour chacune des questions suivantes, on a la représentation graphique d'une fonction f (en rouge) et la tangente à cette représentation au point d'abscisse a . Déterminer graphiquement $f'(a)$, puis écrire l'équation réduite de la tangente tracée.

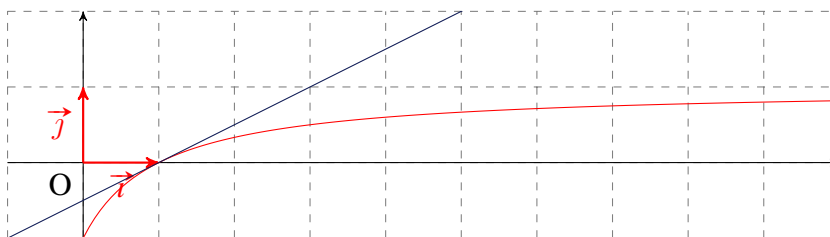
1 $a = 1$.



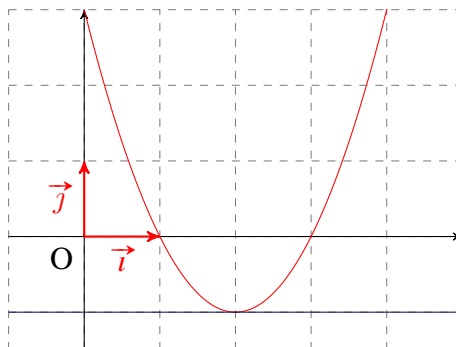
2 $a = 0$.



3 $a = 1$.

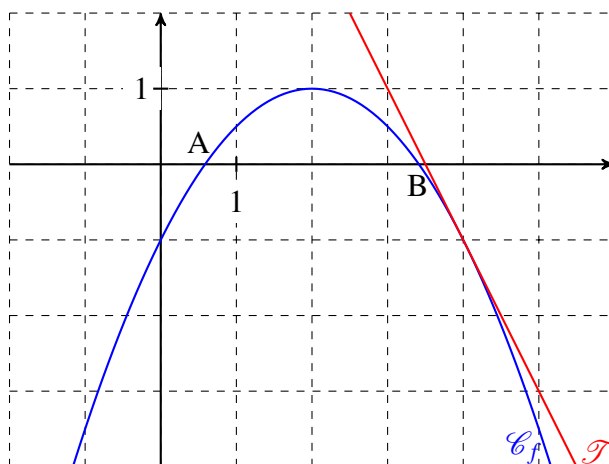


4 $a = 2$.



■ Exercice 3. Détermination d'une fonction par lecture graphique

★★★★☆☆ 
Corrigé page 34



La courbe ci-dessus représente la fonction f dont l'expression est de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1 Lire graphiquement les valeurs :

$$f(0) \quad ; \quad f(2) \quad ; \quad f'(2) \quad ;$$

$$f(4) \quad ; \quad f'(4)$$

2 Déterminer les valeurs de a , b et c à l'aide des valeurs trouvées précédemment.

3 Calculer l'abscisse des points A et B.

■ Exercice 4. Détermination d'une fonction par lecture graphique

★★★★☆ R

Corrigé page 35

On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a , b , c et d sont quatre nombres réels.

On sait que :

- le point $A(1; -1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$;
- la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x + 1$;
- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2;
- $f'(0) = -5$

Déterminer les valeurs de a , b , c et d à l'aide de ces informations.

Fonctions dérivées

■ Exercice 5. Dérivées de référence

★★★★☆ A

Corrigé page 36

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée.

1 $f(x) = 3x - 1$

4 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$

5 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$

3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

6 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$

■ Exercice 6. Dérivées de fonctions produits et quotient

★★★★☆ A

Corrigé page 36

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa dérivée.

1 $f(x) = 2x\sqrt{x}$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

2 $f(x) = \frac{3x - 1}{4x + 5}$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$

■ Exercice 7. Sens de variation de fonctions quotients

★★★★☆ A

Corrigé page 39

Pour chacune des fonctions suivantes,

- Donner son domaine de définition ;
- Trouver sa dérivée ;
- En déduire ses variations sur son domaine de définition.

1 $f(x) = \frac{3x-4}{5x-2}$

2 $g(x) = \frac{5x-3}{x^2-x-2}$

3 $h(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$

■ Exercice 8. Variations de fonctions produits

★★★★☆ A

Corrigé page 41

Pour chacune des fonctions suivantes,

- Trouver son domaine de définition ;
- Trouver sa dérivée ;
- Trouver son sens de variation sur son domaine de définition ;
- Donner le signe de la fonction sur son domaine de définition.

1 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x}$

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

■ Exercice 9. Un problème lié à l'économie

★★★★★ R

Corrigé page 43

Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, ...) et d'autre part, les coûts variables (salaires, ingrédients, ...) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.

On estime que la fonction de coût total de cette entreprise (exprimé en dizaine d'euros) pour une journée est donnée par la fonction :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20.$$

On suppose que cette entreprise ne peut pas fabriquer plus de 800 pizzas par jour.

Cette entreprise vend une pizza 7,50 €. On note B la fonction qui donne le bénéfice quotidien de l'entreprise en fonction de q lots fabriqués et vendus.

- 1 Étudier les variations de C sur l'intervalle $[1; 20]$.
- 2 Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$ de cette entreprise (en dizaine d'euros).
- 3 Étudier les variations de B sur $[0; 20]$.

En déduire le nombre de lots de pizzas qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice ?

■ Exercice 10. Coût total, marginal et bénéfice

★★★★★ R

Corrigé page 44

Une entreprise fabrique des fils de cuivre. Pour q tonnes fabriquées, le coût de production (exprimé en dizaine d'euros) est donné par :

$$C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 16q^2 + 266q + 10.$$

Les contraintes de production ne permettent pas de produire plus de 40 tonnes par jour.

Le coût moyen de production est obtenu par l'expression :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} \quad \text{pour } q \in]0; 40].$$

Le coût marginal est le coût supplémentaire engendré par la production d'une tonne supplémentaire. On l'assimile à la dérivée du coût de production :

$$C_m(q) = C'(q).$$

Chaque tonne fabriquée est vendue 3 000 euros.

- 1 a. Déterminer l'expression du coût marginal $C_m(q)$.
b. En déduire les variations du coût total $C(q)$ sur $[0; 40]$.

- 2 a. Déterminer l'expression du coût moyen $C_M(q)$.
b. Montrer que :

$$C'_m(q) = \frac{2q^3 - 48q^2 - 30}{3q^2}.$$

On admettra que $C'_M(q) \leq 0$ sur $[0; q_0]$ et $C'_M(q) \geq 0$ sur $[q_0; 40]$, avec $q_0 \approx 24,026$.

- c. Donner les variations de C_M sur $]0; 40]$.
d. Calculer une valeur approchée à l'unité de $C_M(q_0)$ et de $C_m(q_0)$. Que peut-on constater ?
- 3 a. Montrer que le bénéfice quotidien de l'entreprise est donné par l'expression :

$$B(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 16q^2 - 34q - 10.$$

- b. Trouver les variations de B sur $[0; 40]$.
c. Pour quelle production q_0 (arrondie à l'entier le plus proche) le bénéfice est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = x^2, a = 2.$

- Calcul de $f'(2)$.

Le taux d'accroissement de f en 2 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \frac{(2+h-2)(2+h+2)}{h} \\ &= \frac{h(4+h)}{h} \\ &= 4+h.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 2 est :

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est alors :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$y = 4(x-2) + 4$$

$$y = 4x - 8 + 4$$

$$\boxed{y = 4x - 4}$$

2 $f(x) = \frac{1}{x}, a = 1.$

- Calcul de $f'(1)$.

Le taux d'accroissement de f en 1 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} \\ &= -\frac{h}{h(1+h)} \\ &= -\frac{1}{1+h}.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 1 est :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1+h} \right) = -1.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$y = -1(x - 1) + 1$$

$$y = -x + 1 + 1$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

3 $f(x) = x^2 - 2x + 3, a = -1.$

- Calcul de $f'(-1)$.

Le taux d'accroissement de f en -1 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - ((-1)^2 - 2 \times (-1) + 3)}{h} \\ &= \frac{h^2 - 2h + 1 + 2 - 2h + 3 - 6}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= \frac{h(h-4)}{h} \\ &= h - 4.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en -1 est :

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 4) = -4.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$y = -4(x + 1) + 6$$

$$y = -4x - 4 + 6$$

$$\boxed{y = -4x + 2}$$

4 $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$.

- Calcul de $f'(3)$.

Le taux d'accroissement de f en 4 est :

$$\begin{aligned}\frac{f(4+h) - f(4)}{h} &= \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre dérivé de f en 4 est :

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \right) = \frac{1}{4}.$$

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1 + 2$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Dans cet exercice, il faut avoir en tête que le nombre dérivé d'une fonction en un point a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

Il faut donc, pour chaque question, regarder la tangente à la courbe tracée en rouge au point d'abscisse a donné.

- 1** Ici, la tangente a pour coefficient directeur 1. Donc $f'(1) = 1$.

Ainsi, la tangente tracée a pour équation réduite :

$$y = x - 1$$

(N'oublions pas que dans l'équation d'une droite $y = mx + p$, p désigne l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

- 2 Ici, le coefficient directeur de la tangente tracée est $-\frac{1}{2}$. En effet, les points A(0;1) et B(2;0) sont sur la tangente donc :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

- 3 Ici, le coefficient directeur de la tangente est $\frac{1}{2}$, donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente sera alors :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

- 4 Ici, la tangente est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.

L'équation de la tangente est alors :

$$y = -1$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1
- $f(0) = -1$;
 - $f(2) = 1$;
 - $f'(2) = 0$ car la fonction atteint un maximum pour $x = 2$;
 - $f(4) = -1$;
 - $f'(4) = -2$ (c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4).
- 2
- $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$; donc $c = -1$ d'après la question précédente (1^{er} point).
 - $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(2) = 4a + b$; donc $4a + b = 0$, soit $b = -4a$.
 - $f(2) = 1$ donc $4a + 2b - 1 = 1$, soit $-b + 2b = 2$ d'après le point précédent. Ainsi, $b = 2$.
 - $f'(4) = 8a + b = -2$ donc $8a = -4$, soit $a = -\frac{1}{2}$.

Finalement, on a : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

- 3 L'abscisse des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi,

$$x_B = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_B = \frac{-2 - \sqrt{2}}{-1}$$

$$\underline{x_B = 2 + \sqrt{2}}$$

$$x_A = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_A = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-1}$$

$$\underline{x_A = 2 - \sqrt{2}}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** • $A(1; -1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(1) = -1$, soit :

$$a + b + c + d = -1 \quad (\text{III.1})$$

- la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A a pour équation : $y = -2x + 1$ donc $f'(1) = -2$, soit :

$$3a + 2b + c = -2 \quad (\text{III.2})$$

- $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2 donc $f(0) = 2$, d'où :

$$d = 2.$$

- $f'(0) = -5$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc :

$$c = -5.$$

Les équations III.1 et III.2 donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = -1 - (-5) - 2 = 2 \\ 3a + 2b = -2 - (-5) = 3 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a = 2 - b \\ 3(2 - b) + 2b = 3 \end{cases}$$

La seconde équation donne alors :

$$6 - b = 3 \quad \text{soit :} \quad b = 3.$$

La première équation donne alors :

$$a = 2 - 3 = -1.$$

On obtient finalement :

$$\boxed{f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2.}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f(x) = 3x - 1$ donc $f'(x) = 3$.
- 2 $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = 10x + 3$.
- 3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ donc $f'(x) = x^2 - 10x + 3$.
- 4 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- 5 $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}$ donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$.
- 6 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$ donc $f'(x) = -x + 3 - \frac{1}{6\sqrt{x}}$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f(x) = 2x\sqrt{x}$. On pose :

$$u(x) = 2x$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 2$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2\sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}} \\ &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 3\sqrt{x}}$$

- 2 $f(x) = \frac{3x-1}{4x+5}$. On pose :

$$u(x) = 3x - 1$$

$$v(x) = 4x + 5$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = 4$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3(4x+5) - 4(3x-1)}{(4x+5)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{12x + 15 - 12x + 4}{(4x + 5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{19}{(4x + 5)^2}$$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 + 1}$. On pose :

$$u(x) = \sqrt{x} - x$$

$$v(x) = x^2 + 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$v'(x) = 2x$$

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times (x^2 + 1) - (\sqrt{x} - x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} - x^2 - 1 - 2x\sqrt{x} + 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + x^2 - 2x\sqrt{x} - 1}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}}}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 3x^2 + 1}{2\sqrt{x}(x^2 + 1)^2}$$

4 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$. On pose :

$$u(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$v(x) = x - 3$$

$$u'(x) = 2x - 3$$

$$v'(x) = 1$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2-3x+1) \times 1}{(x-3)^2} \\
 &= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 1}{(x-3)^2} \\
 \boxed{f'(x) &= \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}}
 \end{aligned}$$

5 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \frac{1}{x}}.$

On commence par simplifier l'écriture de $f(x)$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\frac{x^2+1}{x}} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}.
 \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= x\sqrt{x} & v(x) &= x^2 + 1 \\
 u'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} & v'(x) &= 2x \\
 &= \sqrt{x} + \frac{\cancel{x}\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\cancel{x}\sqrt{x}} \\
 &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
 &= \frac{3}{2}\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x^2+1) - x\sqrt{x} \times 2x}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} \\
 \boxed{f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}(3-x^2)}{(x^2+1)^2}}
 \end{aligned}$$

1 $f(x) = \frac{3x-4}{5x-2}.$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{5} \right\}.$
- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 3x - 4$$

$$v(x) = 5x - 2$$

$$u'(x) = 3$$

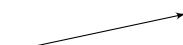
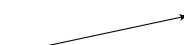
$$v'(x) = 5$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3(5x-2) - 5(3x-4)}{(5x-2)^2} \\ &= \frac{15x-6-15x+20}{(5x-2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{14}{(5x-2)^2}$$

- $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ donc :

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$			

2 $g(x) = \frac{5x-3}{x^2-x-2}.$

- Le discriminant de $x^2 - x - 2$ est $\Delta = 9$ et on trouve pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.
Ainsi, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}.$
- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 5x - 3$$

$$v(x) = x^2 - x - 2$$

$$u'(x) = 5$$

$$v'(x) = 2x - 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{5(x^2 - x - 2) - (5x - 3)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} \\
 &= \frac{5x^2 - 5x - 10 - 10x^2 + 5x + 6x + 3}{(x^2 - x - 2)^2} \\
 &= \frac{-5x^2 + 6x - 7}{(x^2 - x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

- $g'(x)$ est du signe de $-5x^2 + 6x - 7$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 36 - 140 = -104 < 0.$$

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$g'(x)$	—			
$g(x)$				

3 $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$

- $x^2 - 3x + 2$ possède comme racines $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ ($\Delta = 1$).

Ainsi, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

- f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = x^2 + x + 1$$

$$v(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$u'(x) = 2x + 1$$

$$v'(x) = 2x - 3$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\
 &= \frac{(2x + 1)(x^2 - 3x + 2) - (x^2 + x + 1)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x + x^2 - 3x + 2 - (2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + 2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2 - 2x^3 + x^2 + x + 3}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
 &= \frac{-4x^2 + 2x + 5}{(x^2 - 3x + 2)^2}
 \end{aligned}$$

- $h'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 2x + 5$, dont le discriminant est :

$$\Delta = 4 + 80 = 84.$$

Ses deux racines sont donc :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \approx -0,9 < \alpha$$

et

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{84}}{-8} = \frac{-2 - 2\sqrt{21}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \approx 1,4 \in]\alpha; \beta[=]1; 2[.$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	$\alpha = 1$	x_2	$\beta = 2$	$+\infty$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$							

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x) = (3x + 2)\sqrt{x}$.

- Le domaine de définition de f est : $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$.
- f est de la forme uv avec :

$$u(x) = 3x + 2$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 3\sqrt{x} + (3x + 2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3x + 2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x + 2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x + 3x + 2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{9x + 2}{2\sqrt{x}}}$$

- $f'(x) > 0 \iff 9x + 2 > 0$ car $2\sqrt{x} > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.
Ainsi, $f'(x) > 0 \iff x > -\frac{2}{9}$, d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

- D'après le tableau de variation de f , on peut dire que $f(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$.

2 $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sqrt{x}.$

- Le domaine de définition de g est $\mathcal{D}_g =]0; +\infty[$.
- g est de la forme uv avec :

$$u(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 &= -\frac{1}{x^2}\sqrt{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{x \times \sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

- $g'(x) > 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1$ car $2x\sqrt{x} > 0$ sur $\mathcal{D}_g$.

On a alors le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		 2 	

- D'après le tableau de variation de g , on peut dire que $g(x) \geq 2$ sur $]0; +\infty[$, donc $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

1 $C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$. donc $C'(q) = \frac{3}{2}q^2 - 4q + 5$.

Le discriminant de $C'(q)$ est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 5 = 16 - 30 = -14 < 0.$$

Par conséquent, $C'(q) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 20]$. Ainsi, C est strictement croissante sur $[0; 20]$.

2 Une pizza est vendue 7,50 € et il y a 4 dizaines de pizzas dans un lot donc la recette (exprimée en dizaine d'euros) est :

$$R(q) = 4 \times 7,5q = 30q.$$

Ainsi, le bénéfice est :

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 30q - \frac{1}{2}q^3 + 2q^2 - 5q - 20 \end{aligned}$$

$$B(q) = -\frac{1}{2}q^3 + 2q^2 + 25q - 20$$

3 $B'(q) = -\frac{3}{2}q^2 + 4q + 25$. Le discriminant de $B'(q)$ est :

$$\Delta = 16 + 150 = 166.$$

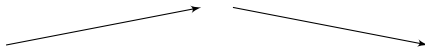
Les racines sont donc :

$$q_1 = \frac{-4 - \sqrt{166}}{-3} \approx 5,63$$

et

$$q_2 = \frac{-4 + \sqrt{166}}{-3} < 0.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	q_1	20
$B'(q)$	+	0	-
$B(q)$			

Le bénéfice maximal est donc atteint pour $q = 5$ ou $q = 6$ lots de 40 pizzas. Le bénéfice (en dizaine d'euros) est alors :

$$B(5) = -\frac{1}{2} \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 25 \times 5 - 20 = 92,5.$$

$$B(6) = -\frac{1}{2} \times 6^3 + 2 \times 6^2 + 25 \times 6 - 20 = 94.$$

Le bénéfice maximum est donc atteint pour 6 lots de 40 pizzas fabriqués, et est égal à 94 €.

1 a. $C_m(q) = C'(q)$

$$= \frac{1}{3} \times 3q^2 - 16 \times 2q + 266$$

$$C_m(q) = q^2 - 32q + 266$$

b. Le discriminant de $C_m(q)$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-32)^2 - 4 \times 1 \times 266 \\ &= -40.\end{aligned}$$

Ainsi, $C_m(q) > 0$ sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[0; 40]$, ce qui signifie que la fonction C est strictement croissante sur $[0; 40]$.

2 a. $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$

$$C_M(q) = \frac{1}{3}q^2 - 16q + 266 + \frac{10}{q}$$

b. $C'_M(q) = \frac{2}{3}q - 16 - \frac{10}{q^2}$

$$= \frac{\frac{2}{3}q^3 - 16q^2 - 10}{q^2}$$

$$C'_m(q) = \frac{2q^3 - 48q^2 - 30}{3q^2}$$

c. D'après ce qui est admis dans l'énoncé, on a :

x	0	q_0	40
$C'_M(q)$		-	+
$C_M(q)$		$C_M(q_0)$	

d. $C_M(q_0) \approx C_M(24,026) \approx 74.$

$$C_m(q_0) \approx 74.$$

On constate alors que $C_M(q_0) = C_m(q_0)$.

On dit ici que l'optimum technique est atteint pour une quantité q_0 produite.

3 a. $B(q) = 300q - C(q)$

$$= 300q - \left(\frac{1}{3}q^3 - 16q^2 + 266q + 10 \right)$$

$$= 300q - \frac{1}{3}q^3 + 16q^2 - 266q - 10$$

$$B(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 16q^2 + 34q - 10$$

$$\begin{aligned}
 b. \quad B'(q) &= -\frac{1}{3} \times 3q^2 + 16 \times 2q + 34 \\
 &= -q^2 + 32q + 34.
 \end{aligned}$$

Le discriminant de $B'(q)$ est :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 32^2 - 4 \times (-1) \times 34 \\
 &= 1160 > 0
 \end{aligned}$$

Il admet donc deux racines :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & q_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
 q_1 &= \frac{-32 - \sqrt{1160}}{2 \times (-1)} & q_2 &= \frac{-32 + \sqrt{1160}}{2 \times (-1)} \\
 q_1 &= 16 + \sqrt{290} \approx 33,029 & q_2 &= 16 - \sqrt{290} \approx -1,029
 \end{aligned}$$

On a alors :

x	0	q_1	40
$B'(q)$	+	0	-
$B(q)$	-10	$B(q_2)$	$B(40)$

Suites

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

12 juin 2018

■ Exercice 1. Reconnaître une suite arithmétique et géométrique

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 52

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie de façon explicite. Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1 $u_n = 3 + 4n$

2 $u_n = 8 \times 2^n$

3 $u_n = 2 \times 3^{n-1}$

4 $u_n = \sqrt{2^n}$

5 $u_n = \frac{5}{3^n}$

6 $u_n = n(n+1) - n(n-1)$

7 $u_n = n^2 + 2n + 1$

8 $u_n = \frac{1}{3^n} + 1$

9 $u_n = 2^n + 1$

10 $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$

■ Exercice 2. Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique, le retour ★★☆☆☆

A

Corrigé page 55

Pour chacune des questions suivantes, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est définie à l'aide d'une relation de récurrence. Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1 $u_{n+1} = 3u_n, u_0 = 1$

2 $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}, u_0 = 1$

3 $u_n = 2u_{n-1}, u_0 = 1$

4 $u_{n+1} = u_n - \pi, u_0 = 2\pi$

5 $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1), u_0 = 1$

6 $u_n = \frac{u_{n-1}}{2}, u_0 = 2$

7 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}, u_0 = 2$

8 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}, u_0 = 1$

■ Exercice 3. Trouver un terme ou la raison dans une suite arithmétique

★★★★☆ R

Corrigé page 56

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r .

1 $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r .

4 $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .

2 $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r .

5 $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r .

3 $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9 .

■ Exercice 4. Trouver un terme ou la raison d'une suite géométrique

★★★★☆ R

Corrigé page 57

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

1 $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q .

4 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} .

2 $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9 .

3 $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8 .

5 $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7 .

■ Exercice 5. Établir une relation de récurrence

★★★★☆ R

Corrigé page 58

Dans chacun des cas suivants, donner la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n . Indiquez alors si (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

1 Chaque jour, ma vue baisse de 0,001 %. u_n désigne ma note aux yeux au jour n .

2 Ma mère me donne 10 €, puis me dit : « chaque mois, je te donnerai 10 € ». u_n représente la somme que j'ai reçu en n mois, pour $n \geq 1$.

3 Je remplis d'eau une bouteille d'un litre à moitié. Chaque minute, ce qui restait la minute précédente est rempli à moitié. u_n représente la proportion de la bouteille qui est remplie la n^{e} minute, $n \geq 1$.

4 Je place 1 000 € sur un compte qui me rapporte 0,75 % chaque année. u_n représente le solde de ce compte (si je ne prélève rien) à l'année n , $n \geq 0$, avec $u_0 = 1 000$.

5 Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Pierre étant derrière Paul. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$ (on suppose que les pas de Paul et de Pierre sont de même longueur).

6 Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Paul étant derrière Pierre. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$ (on suppose que les pas de Paul et de Pierre sont de même longueur).

Sommes de termes

■ Exercice 6. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

★★★★☆ A

Corrigé page 59

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- 1 Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
- 2 Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
- 3 Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
- 4 Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

■ Exercice 7. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

★★★★☆ A

Corrigé page 60

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

- 1 Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{100}$.
- 2 Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{50}$.
- 3 Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
- 4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$.

■ Exercice 8. Compilation d'exercices

★★★★☆ R

Corrigé page 61

- 1 On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$u_2 = 8 \quad ; \quad u_{10} = -3.$$

Donner l'expression du terme général de cette suite sous la forme $u_n = a + bn$.

- 2 On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que :

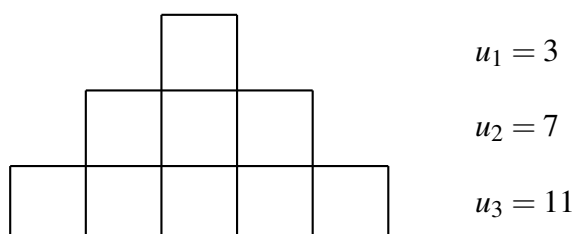
$$u_0 = -6 \quad ; \quad u_8 = 10.$$

Donner l'expression du terme général de cette suite sous la forme $u_n = a + bn$.

- 3 Trouver toutes les suites géométriques $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que :

$$u_0 = 90 \quad ; \quad u_2 = 10.$$

- 4 On construit une pyramide en allumettes comme sur le schéma suivant :



On note u_n le nombre d'allumettes nécessaires pour le n -ième étage de cette pyramide, $n \geq 1$.
Combien faut-il d'allumettes pour faire 20 étages ?

- 5 Dans chacun des cas suivants, dire si les termes sont ceux d'une suite géométrique, d'une suite arithmétique ou d'une autre suite. S'ils définissent une suite arithmétique ou géométrique, donner les paramètres de la suite (raison et 1^{er} terme).

a. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - \frac{1}{3}u_n$.

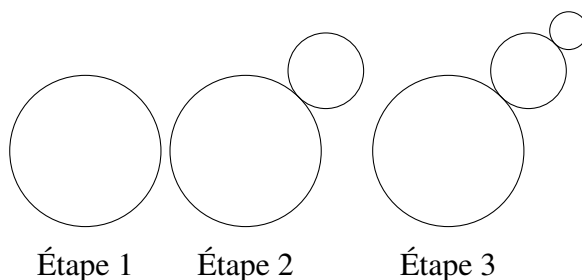
b. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{10}$.

c. $u_n = 3 + 4(n - 1)$.

d. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 1$.

e. $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

- 6 On construit une figure étape par étape comme suit :



À chaque étape, on ajoute un disque dont le rayon est la moitié de celui qui a été ajouté à l'étape précédente.

Sachant que le premier disque a un rayon égal à 5 cm, quelle sera la valeur approchée à l'unité de l'aire totale des disques à l'étape 10 ?

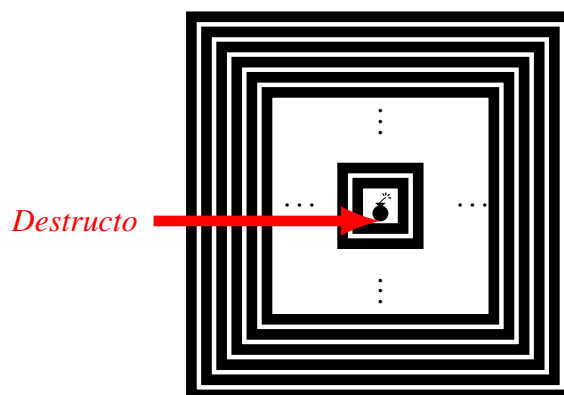
■ Exercice 9. Le super-héros

★★★★☆ R
Corrigé page 63

Destructo a la capacité de détruire les murs en fonçant dessus. Malheureusement, après chaque destruction, il perd 5 % de sa force.

Dès potron-minet, sa force est de 1 000 Newton.

Un jour, le méchant *Massono* a mis une bombe dans un bâtiment carré qui demande à *Destructo* de passer à travers 50 murs.



Sachant qu'il faut à *Destructo* au moins 100 Newton pour détruire un mur, arrivera-t-il jusqu'à la bombe ?

Suites arithmético-géométriques

■ Exercice 10. Avec un algorithme (1)



Corrigé page 63

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle une suite arithmétique ? Une suite géométrique ?

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{9}{2}.$$

- 3 Montrer que $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 4 En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis une expression de u_n en fonction de n .
- 5 On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1

Initialisation

Affecter à U la valeur 1
Affecter à i la valeur 0
Saisir la valeur de N

Traitement

Tant que i < N

Affecter à i la valeur i+1
Affecter à U la valeur U/3+3

Fin du Tant que

Sortie

Afficher U

- a. À l'aide d'un tableau (par exemple), exécuter cet algorithme pour $N = 3$.
- b. Que permet de faire cet algorithme ?
- c. À l'aide de votre calculatrice, donner la valeur qu'affiche cet algorithme pour $N=10$, $N=20$ et $N=30$.
Que peut-on conjecturer ?

■ Exercice 11. Avec un algorithme (2)

★★★★★ R

Corrigé page 64

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3u_n + 1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On considère alors l'algorithme suivant :

Algorithme 2

Initialisation

Affecter à U la valeur 2

Affecter à i la valeur 0

Saisir la valeur de N

Traitement

Tant que i < N

Affecter à i la valeur i+1

Affecter à U la valeur $2/(3*U+1)$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher U

- 1 À l'aide d'un tableau, exécuter cet algorithme pour $N = 4$.
Qu'affiche alors cet algorithme ?

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - \frac{2}{3}}{u_n + 1}.$$

- 2 Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- 3 En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis une expression de u_n en fonction de n .

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_n = 3 + 4n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 + 4(n+1) - (3 + 4n) \\ &= 3 + 4n + 4 - 3 - 4n \\ &= 4. \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 4$ est une constante (un nombre qui ne dépend pas de n) donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 3 + 4 \times 0 = 3$.

Remarque : j'ai remarqué que u_n était de la forme $u_0 + nr$ donc j'ai commencé par calculer $u_{n+1} - u_n$ car je savais alors que c'était une suite arithmétique.

2 $u_n = 8 \times 2^n$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{8 \times 2^{n+1}}{8 \times 2^n} \\ &= \frac{2^n \times 2^1}{2^n} \\ &= 2. \end{aligned}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ est une constante donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 8 \times 2^0 = 8$.

Remarque : ici, j'ai remarqué que u_n était de la forme $u_0 \times q^n$, d'où le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3 $u_n = 2 \times 3^{n-1}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2 \times 3^n}{2 \times 3^{n-1}} \\ &= \frac{3^{n-1} \times 3}{3^{n-1}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 2 \times 3^{0-1} = \frac{2}{3}$.

4 $u_n = \sqrt{2^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{n+1}}{2^n}} \\ &= \sqrt{\frac{2^n \times 2}{2^n}} \\ &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2^0} = 1$.

5 $u_n = \frac{5}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{5}{3^{n+1}}}{\frac{5}{3^n}} \\ &= \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{5}{3^0} = 5$.

6 $u_n = n(n+1) - n(n-1) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$. u_n est donc de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = 0$ et $r = 2$.

$(u_n)_{n \geq 0}$ est donc arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$.

7 $u_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (n+2)^2 - (n+1)^2 \\ &= (n+2-n-1)(n+2+n+1) \\ &= 2n+3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

8 $u_n = \frac{1}{3^n} + 1$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{3^{n+1}} + 1 - \frac{1}{3^n} - 1 \\ &= \frac{1}{3^n \times 3} - \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{3^{n+1}} + 1}{\frac{1}{3^n} + 1} \\ &= \frac{\frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1+3^n}{3^n}} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{1+3^n} \\ &= \frac{1+3^{n+1}}{3(1+3^n)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

9 $u_n = 2^n + 1$. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 \\ &= 2^n \times 2 - 2^n \\ &= 2^n(2 - 1) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1}.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne sont pas des constantes. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

10 $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$. On calcule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}} \times \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_{n+1} = 3u_n$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$.

2 $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

3 $u_n = 2u_{n-1}$, $u_0 = 1$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

4 $u_{n+1} = u_n - \pi$, $u_0 = 2\pi$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = \pi$.

5 $u_{n+1} = 3(u_n - 1) - 2(u_n + 1) = u_n - 5$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = -5$.

6 $u_n = \frac{u_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}u_{n-1}$. On reconnaît ici une relation de récurrence de la forme $u_n = qu_{n-1}$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

7 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 2$. Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - (\sqrt{u_n})^2 = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \neq \text{cte}.$$

Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas géométrique.

8 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $u_0 = 1$. La relation de récurrence de cette suite est la même que dans la question précédente. Cependant, le premier terme change. On a ici : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{1} = 1$, etc.

Ainsi, (u_n) est constante. On peut alors dire qu'elle est arithmétique (de raison $r = 0$) et géométrique (de raison $q = 1$).

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc

$$u_8 = u_0 + 8r$$

$$7 = 3 + 8r$$

$$7 - 3 = 8r$$

$$r = \frac{4}{8}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{2}}$$

- 2 $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_5 = u_2 + (5 - 2)r$$

$$2 = 5 + 3r$$

$$2 - 5 = 3r$$

$$3r = -3$$

$$\boxed{r = -1}$$

- 3 $u_0 = 5$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 + nr$$

donc

$$u_9 = u_0 + 9r$$

$$u_9 = 5 - \frac{9}{2}$$

$$u_9 = \frac{10}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\boxed{u_9 = \frac{1}{2}}$$

- 4 $u_5 = 6$ et $r = 2$. Calculer u_{20} .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_{20} = u_5 + (20 - 5)r$$

$$u_{20} = 6 + 15 \times 2$$

$$u_{20} = 6 + 30$$

$$\boxed{u_{20} = 36}$$

5 $u_7 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{7}$. Calculer r .

On sait que :

$$u_n = u_k + (n - k)r$$

donc

$$u_7 = u_2 + (7 - 2)r$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{7} + 5r$$

$$5r = \sqrt{2} - \sqrt{7}$$

$$r = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{5}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$. Calculer q .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_2 = u_0 \times q^2$$

$$12 = 5 \times q^2$$

$$q^2 = \frac{12}{5}$$

$$q = \sqrt{\frac{12}{5}} \quad \text{ou} \quad q = -\sqrt{\frac{12}{5}}$$

2 $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_9 .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_9 = u_0 \times q^9$$

$$u_9 = 3 \times 2^9$$

$$u_9 = 1536$$

3 $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_8 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_8 = u_2 \times q^{8-2}$$

$$u_8 = 8 \times 2^{-6}$$

$$u_8 = 2^{-3}$$

- 4 $u_0 = 2$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_{10} .

On sait que :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc

$$u_{10} = u_0 \times q^{10}$$

$$u_{10} = 2 \times 3^{-10}$$

$$u_{10} = \frac{2}{3^{10}}$$

- 5 $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$. Calculer u_7 .

On sait que :

$$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

donc

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5}$$

$$u_7 = 2 \times \sqrt{2}^2$$

$$u_7 = 4$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Chaque jour, ma vue baisse de 0,001 %. u_n désigne ma note aux yeux au jour n .

Alors,

$$u_{n+1} = 99,999u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 99,999$.

- 2 Ma mère me donne 10 €, puis me dit : « chaque mois, je te donnerai 10 € ». u_n représente la somme que j'ai reçu en n mois, pour $n \geq 1$.

Alors,

$$u_{n+1} = u_n + 10.$$

(u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 10$.

- 3 Je remplis d'eau une bouteille d'un litre à moitié. Chaque minute, ce qui restait la minute précédente est rempli à moitié. u_n représente la proportion de la bouteille qui est remplie la n^{e} minute, $n \geq 1$.

Alors,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(1 - u_n) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}.$$

(u_n) n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

- 4 Je place 1 000 € sur un compte qui me rapporte 0,75 % chaque année. u_n représente le solde de ce compte (si je ne prélève rien) à l'année n , $n \geq 0$, avec $u_0 = 1\,000$.

Alors,

$$u_{n+1} = 1,075u_n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,075$.

- 5** Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Pierre étant derrière Paul. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$.

D'une étape à l'autre, si Paul avance de deux mètres, la distance qui le sépare de Pierre s'agrandit de deux mètres, mais si Pierre avance d'un mètre, elle se réduit d'un mètre. Au final, elle s'agrandit d'un mètre. Mais attention ! u_n est une distance donc :

$$u_{n+1} = |u_n + 1|.$$

Ici, $u_n + 1 > 0$ pour tout n (c'est assez intuitif) donc on peut enlever les valeurs absolues. Finalement, on a :

$$u_{n+1} = u_n + 1.$$

(u_n) est donc arithmétique de raison $r = 1$.

- 6** Paul et Pierre sont à 20 mètres l'un de l'autre, Paul étant derrière Pierre. Quand Pierre fait un pas en avant, Paul en fait deux. u_n représente la distance (en mètre) entre Paul et Pierre à la n^{e} étape, $n \geq 0$, avec $u_0 = 20$.

D'une étape à l'autre, si Paul avance de deux mètres, la distance qui le sépare de Pierre se réduit de deux mètres, mais si Pierre avance d'un mètre, elle s'agrandit d'un mètre. Au final, elle se réduit d'un mètre. Mais attention ! u_n est une distance donc :

$$u_{n+1} = |u_n - 1|.$$

On ne peut pas ici enlever les valeurs absolues car $u_n - 1$ sera négatif au-delà d'un certain rang. Par conséquent, (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** Si $u_0 = 5$ et $r = 3$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.
 (u_n) est une suite arithmétique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n + 1)$$

donc ici :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= \frac{5 + (5 + 100 \times 3)}{2} \times 101 \\ &= 155 \times 101 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 15\,655}$$

- 2** Si $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= \frac{3 + 60}{2} \times 51 \\ &= 155 \times 101 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 1\,606,5}$$

3 Si $u_1 = 60$ et $r = 5$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 \\&= \frac{60 + (60 + 5 \times 99)}{2} \times 100 \\&= \frac{61\,500}{2} \\ \boxed{u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = 30\,750}\end{aligned}$$

4 Si $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + \dots + u_{50} &= \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 \\&= \frac{50 + 1}{2} \\ \boxed{u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = 25,5}\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Si $u_0 = 1$ et $q = 2$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.
 (u_n) est une suite géométrique donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Donc ici,

$$\begin{aligned}u_0 + u_1 + \dots + u_{100} &= \frac{1 - 2^{101}}{1 - 2} \\ \boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 2^{101} - 1}\end{aligned}$$

2 Si $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

$$\begin{aligned}u_0 + u_1 + \dots + u_{50} &= 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{51}}}{1 - \frac{1}{2}} \\&= 3 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right) \times 2 \\ \boxed{u_0 + u_1 + \dots + u_{50} = 6 \left(1 - \frac{1}{2^{51}} \right)}\end{aligned}$$

- 3 Si $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{100}$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{100} &= u_1 \times \frac{1 - q^{100}}{1 - q} \\ &= 60 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{100}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 60 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right) \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{100} = 45 \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

- 4 Si $u_1 = 50$ et $q = 10$, calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{50}$.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = 50 \times \frac{1 - 10^{50}}{1 - 10}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_5 = \frac{50}{9} (10^{50} - 1)$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_k + (n - k)r$.

Ainsi, $u_{10} = u_2 + (10 - 2)r$, soit $-3 = 8 + (10 - 2)r$. On obtient alors $r = \frac{-3 - 8}{10 - 2} = -\frac{11}{8}$.

On peut alors écrire :

$$u_n = u_2 + (n - 2)r$$

$$\begin{aligned} u_n &= 8 - \frac{11}{8}(n - 2) \\ &= 8 - \frac{11}{8}n + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$u_n = \frac{43}{4} - \frac{11}{8}n$$

- 2 $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique donc, pour tout entier naturel n , $u_n = u_k + (n - k)r$.

Ainsi, $u_8 = u_0 + 8r$, soit $10 = -6 + 8r$. On obtient alors $r = \frac{10 + 6}{8} = 2$.

On peut alors écrire :

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = -9 + 2n$$

- 3 $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique donc $u_n = u_0 \times q^n$, soit $u_2 = u_0 \times q^2$. Ainsi, $10 = 90 \times q^2$, soit $q^2 = \frac{1}{9}$.

Par conséquent, $q = \frac{1}{3}$ ou $q = -\frac{1}{3}$.

Il existe donc deux suites géométriques, chacune de premier terme $u_0 = 90$, l'une de raison $\frac{1}{3}$ et l'autre de raison $-\frac{1}{3}$.

- 4 On constate que $u_n = u_{n-1} + 4$, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique de raison $r = 4$.

Ainsi, la somme des 20 premiers termes est :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} &= (\text{nombre de termes dans la somme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2} \\ &= 20 \times \frac{1 + (u_1 + (20 - 1) \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{1 + (1 + 19 \times 4)}{2} \\ &= 20 \times \frac{78}{2} \\ &= 780. \end{aligned}$$

Le nombre total d'allumettes qu'il faut pour faire 20 étages correspond à la somme des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, donc il faut 780 allumettes.

- 5
- $u_{n+1} = 3u_n - \frac{1}{3}u_n = \left(3 - \frac{1}{3}\right)u_n = \frac{8}{3}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n donc c'est le terme général de la suite géométrique de raison $q = \frac{8}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.
 - $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n$ donc u_{n+1} est de la forme qu_n avec $q = \frac{1}{10}$. Il définit donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ et de premier terme $u_0 = 1$.
 - $u_n = 3 + 4(n - 1) = 3 + 4n - 4 = -1 + 4n$ donc u_n est de la forme $u_0 + nr$ avec $u_0 = -1$ et $r = 4$. C'est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = -1$.
 - $u_{n+1} = u_n + 1$ donc c'est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$. u_n est donc le terme général d'une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_0 = 2$.
 - $u_{n+1} = 3u_n - 5$ n'est pas de la forme $u_n + r$ ou qu_n donc u_n n'est pas un terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.

- 6 Appelons r_n le rayon du disque ajouté à l'étape n et a_n l'aire du disque de rayon r_n .

Alors, $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$. Donc (r_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

L'aire du disque ajouté à l'étape n est $a_n = \pi \times r_n^2 = \frac{5\pi}{2^{n-1}}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi \times r_{n+1}^2}{\pi \times r_n^2} = \frac{r_{n+1}^2}{r_n^2} = q$ donc (a_n) est aussi une suite géométrique de raison q .

L'aire totale des disques (en cm^2) à l'étape 10 est donc :

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 + \dots + a_{10} &= (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \\
 &= 25\pi \times \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 50\pi \times \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) \\
 &= 50\pi \left(1 - \frac{1}{1024}\right) \\
 &= 50\pi \times \frac{1023}{1024} \\
 &= \frac{25575\pi}{512} \\
 &\approx 157.
 \end{aligned}$$

L'aire totale est donc environ égale à 157 cm^2 .

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons u_n la force de *Destructo* (en Newton) après avoir traversé n murs, avec $u_0 = 1\,000$.

On a :

$$u_{n+1} = 0,95u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$.

Ainsi,

$$u_n = u_0 \times q^n = 1\,000 \times 0,95^n.$$

Avant le 50^e mur, sa force sera :

$$u_{49} = 1\,000 \times 0,95^{49} \approx 81.$$

Par conséquent, *Destructo* n'aura pas assez de force pour détruire le 50^e mur ... Le méchant *massono* a bien calculé son coup !

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 3 = \frac{1}{3} \times 1 + 3 = \frac{10}{3}.$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 3 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 3 = \frac{10}{9} + \frac{27}{9} = \frac{37}{9}.$$

$$2 \quad \left. \begin{aligned} u_1 - u_0 &= \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3} \\ u_2 - u_1 &= \frac{37}{9} - \frac{10}{3} = \frac{7}{9} \neq u_1 - u_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ n'est pas arithmétique.}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= \frac{\frac{10}{3}}{1} = \frac{10}{3} \neq \frac{3}{7} \\ \frac{u_2}{u_1} &= \frac{\frac{37}{9}}{\frac{10}{3}} = \frac{37}{30} \neq \frac{3}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 0} \text{ n'est pas géométrique.}$$

$$\begin{aligned}
3 \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{9}{2} \\
&= \frac{1}{3}u_n + 3 - \frac{9}{2} \\
&= \frac{1}{3}u_n - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{9}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

Ainsi, $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifie une relation de récurrence de la forme $v_{n+1} = qv_n$ qui est significatif d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$. Son premier terme est :

$$v_0 = u_0 - \frac{9}{2} = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}.$$

4 De la question précédente, on peut déduire que pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n}$$

et comme $v_n = u_n - \frac{9}{2}$, on a :

$$u_n = v_n + \frac{9}{2}$$

soit :

$$u_n = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{3^n} + \frac{9}{2}$$

5 a. On a le tableau suivant :

Condition $i < N$		vraie : $0 < 3$	vraie : $1 < 3$	vraie : $2 < 3$	fausse
Valeurs de i	0	1	2	3	4
Valeurs de U	1	$\frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$	$\frac{10}{9} + 3 = \frac{37}{9}$	$\frac{37}{27} + 3 = \frac{118}{81}$	

b. On voit qu'à chaque boucle, l'algorithme permet d'obtenir la valeur de u_i . On n'entre plus dans la boucle lorsque $i = N$ et la dernière valeur de U calculée est alors u_N .

Ainsi, cet algorithme permet de calculer u_N pour un entier naturel N donné par l'utilisateur.

c. On obtient $u_{10} \approx 4,4999407272$, $u_{20} \approx 4,4999999999$ et $u_{30} \approx 4,5$.

On peut alors conjecturer que u_n se rapproche de plus en plus de 4,5 au fur et à mesure que n prend des valeurs de plus en plus grandes.

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On a le tableau suivant :

Condition $i < N$		vraie : $0 < 4$	vraie : $1 < 4$	vraie : $2 < 4$	vraie : $3 < 4$	fausse
Valeurs de i	0	1	2	3	4	5
Valeurs de U	2	$\frac{2}{3 \times 2 + 1} = \frac{2}{7}$	$\frac{2}{3 \times \frac{2}{7} + 1} = \frac{14}{13}$	$\frac{2}{3 \times \frac{14}{13} + 1} = \frac{26}{41}$	$\frac{2}{3 \times \frac{26}{41} + 1} = \frac{82}{119}$	

Cet algorithme affiche alors la dernière valeur de U calculée, à savoir $\frac{82}{119}$, qui est u_4 .

$$\begin{aligned}
2 \quad v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \frac{2}{3}}{u_{n+1} + 1} \\
&= \frac{\frac{2}{3u_n+1} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3u_n+1} + 1} \\
&= \frac{6-2(3u_n+1)}{3(3u_n+1)} \\
&= \frac{2+3u_n+1}{3u_n+1} \\
&= \frac{-6u_n+4}{3(3u_n+1)} \times \frac{3u_n+1}{3u_n+3} \\
&= \frac{-6u_n+4}{9u_n+9} \\
&= \frac{-6(u_n - \frac{2}{3})}{9(u_n+1)} \\
&= -\frac{2}{3}v_n
\end{aligned}$$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme :

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{u_0 - \frac{2}{3}}{u_0 + 1} \\
&= \frac{2 - \frac{2}{3}}{2 + 1} \\
&= \frac{\frac{4}{3}}{3}
\end{aligned}$$

$$v_0 = \frac{4}{9}$$

3 De la question précédente, on déduit :

$$v_n = \frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n - \frac{2}{3}}{u_n + 1} \\
\iff v_n(u_n + 1) &= u_n - \frac{2}{3} \\
\iff v_n u_n - u_n &= -v_n - \frac{2}{3} \\
\iff u_n(v_n - 1) &= -v_n - \frac{2}{3} \\
\iff u_n &= \frac{-v_n - \frac{2}{3}}{v_n - 1} \\
\iff u_n &= \frac{-\frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 1}
\end{aligned}$$

Statistiques descriptives

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✋ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

■ Exercice 1. Notes de deux classes

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 70

Un professeur a en charge deux classes de 1^{re} ES. Il souhaite comparer les résultats de ces deux classes sur le dernier contrôle à l'aide des tableaux suivants :

NOTES DE LA 1^{re} ES1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1

NOTES DE LA 1^{re} ES2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1

- 1 Calculer la moyenne des deux classes.
- 2 Calculer la variance, puis l'écart-type, des deux classes.
- 3 Déterminer la médiane ainsi que l'écart inter-quartile.
- 4 Comparer alors les résultats de ces deux classes.

■ Exercice 2. Salaires dans deux entreprises

★☆☆☆☆

A

Corrigé page 71

Nous avons observé les salaires nets dans deux entreprises concurrentes, et nous les avons réunis dans les tableaux suivants :

ENTREPRISE A

Classes	[1 150; 1 250[	[1 250; 1 350[	[1 350; 1 450[	[1 450; 1 550[
Effectifs	18	27	52	48

Classes	[1 550; 1 650[	[1 650; 1 750[	[1 750; 1 850[	[1 850; 2 000]
Effectifs	36	25	20	8

ENTREPRISE B

Classes	[900; 1 000[	[1 000; 1 100[	[1 100; 1 200[	[1 200; 1 300[
Effectifs	10	15	22	34

Classes	[1 300; 1 400[	[1 400; 1 500[	[1 500; 1 600[	[1 600; 1 700[
Effectifs	38	42	58	30

Classes	[1 700; 1 800[	[1 800; 1 900[	[1 900; 2 000[	[2 000; 2 100[
Effectifs	22	14	10	4

- 1 Déterminer le couple $(\bar{x}; \sigma)$ pour chacune des deux entreprises.
Interpréter ces résultats.
- 2 Déterminer le couple $(m_e; I_Q)$ (médiane - écart inter-quartile) pour chacune des deux entreprises.
(On devra ici trouver une valeur approchée des médianes et des quartiles)
Interpréter ces résultats.

■ Exercice 3. Influence d'un ajout dans une série statistique

★★★★☆ 

Corrigé page 73

On considère une série statistique de n données $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On note $\bar{x}$ sa moyenne et V sa variance.

On ajoute une donnée x à cette série, et on note $m(x)$ la nouvelle moyenne et $v(x)$ la nouvelle variance.

- 1 Montrer que :

$$m(x) = \frac{x + n\bar{x}}{n + 1}.$$

- 2 Quelle valeur de x faut-il prendre pour que $m(x) = \bar{x}$?
- 3 En utilisant le théorème de König-Huygens, montrer que :

$$v(x) = \frac{1}{(n + 1)^2} (nx^2 - 2n\bar{x}x + n(n + 1)V + n\bar{x}).$$

- 4 En déduire la valeur de x pour laquelle $v(x)$ est minimale.

■ Exercice 4. Un algorithme

★★★★☆ 

Corrigé page 74

Voici un algorithme :

Algorithme 3: Un algorithme dont la mission est inconnue

Entrées

L est une liste de nombres
N est un nombre entier
i est un nombre entier
j est un nombre entier
a est un nombre
m est un nombre
indice est un nombre entier

Initialisation

Entrer L

Traitement

N prend la valeur Longueur(L)

Pour i allant de 1 à N

 m prend la valeur L[i]

 indice prend la valeur i

 Pour j allant de i+1 à N

 Si $L[j] < m$ alors

 m prend la valeur L[j]

 indice prend la valeur j

 Fin du Si

Fin du Pour

a prend la valeur L[i]

L[i] prend la valeur L[indice]

L[indice] prend la valeur a

Fin du Pour

Sortie

Afficher L

- 1 Qu'affiche l'algorithme 3 lorsque l'on rentre la liste :

$L=[3,5,1]$

Quelle est la mission de cet algorithme ?

- 2 Modifier l'algorithme 3 afin de déterminer et d'afficher la médiane de la série statistique entrée dans L.

■ Exercice 5. De l'algèbre dans les statistiques

★★★★★ ^R

Corrigé page 75

- 1 Hugo a obtenu au 2^e trimestre une moyenne de 8/20 aux 3 premiers contrôles (dont les coefficients respectifs sont 0,5, 2 et 1). Il ne reste qu'un contrôle avant l'arrêt des notes (dont le coefficient sera égal à 2).

Combien faut-il qu'il obtienne au minimum pour obtenir 10/20 de moyenne au 2^e trimestre ?

- 2 M. Zébulon enseigne les mathématiques aux classes 1^{re}S1 (30 élèves) et 1^{re}S2 (26 élèves). Il propose systématiquement les mêmes sujets de devoirs. Sur celui portant sur les statistiques, la 1^{re}S1 a obtenu une moyenne de 14,5/20.

a. Quelle doit être la moyenne de la 1^{re} S2 pour que la moyenne de ce contrôle (sur les deux classes) soit supérieure à 12/20 ?

b. Lors des précédents devoirs, la moyenne de la 1^{re}S2 était inférieure à celle de la 1^{re}S1 de 20%.

Peut-il espérer atteindre 12/20 de moyenne à ce contrôle sur les deux classes ?

3 Mme Zébulon enseigne aussi les mathématiques dans le même lycée que son mari. Elle a la 1^{re} S3 dans laquelle se trouve Kevin Zépadbol à qui elle propose, avec un sourire narquois, l'énigme suivante :

« Tu as eu 5/20 (coefficient 2) et 8/20 (coefficient 1) aux deux premiers devoirs, et tu attends ta note pour le dernier devoir coefficient 2. Sur ces trois devoirs, l'écart-type de tes notes est à peu près égal à 1,643. Si tu arrives à trouver la note que tu as obtenue au dernier contrôle, je la triple. »
Saurez-vous trouver la note de Kevin ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1**
- **Moyenne de la 1^{re} ES1 :**

$$\bar{x}_1 = \frac{2 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 2 + \dots + 15 \times 1 + 18 \times 1}{1 + 1 + 2 + \dots + 1 + 1}$$

$$= \frac{312}{32}$$

$$\boxed{\bar{x}_1 \approx 9,75}$$
 - **Moyenne de la 1^{re} ES2 :**

$$\bar{x}_2 = \frac{1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + \dots + 15 \times 1 + 16 \times 1}{1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1}$$

$$= \frac{286}{35}$$

$$\boxed{\bar{x}_2 \approx 8,17}$$

- 2** Pour la 1^{re} ES1, la variance est : $V_1 = \frac{173}{16} \approx 10,81$.
- Ainsi, son écart-type est : $\sigma_1 = \sqrt{V_1} = \frac{\sqrt{173}}{4} \approx 3,29$.
- Pour la 1^{re} ES2, la variance est : $V_2 = \frac{15014}{1225} \approx 12,26$.
- Ainsi, son écart-type est : $\sigma_2 = \sqrt{V_2} = \frac{\sqrt{15014}}{35} \approx 3,5$.

- 3** Complétons les deux tableaux avec la ligne des effectifs cumulés croissants :

NOTES DE LA 1^{re} ES1

Notes (x_i)	2	5	6	7	8	9	11	13	14	15	18
Effectifs (n_i)	1	1	2	5	3	6	5	6	1	1	1
E.c.c.	1	2	4	9	12	18	23	29	30	31	32

NOTES DE LA 1^{re} ES2

Notes (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs (n_i)	1	1	1	3	2	3	4	3	5	4	3	1	1	1	1	1
E.c.c.	1	2	3	6	8	11	15	18	23	27	30	31	31	33	34	35

On voit alors que la médiane de la 1^{re} ES1 est 9 (car c'est la première note pour laquelle les e.c.c. sont supérieurs ou égaux à la moitié de l'effectif total, soit $32 \div 2 = 16$).

Donc $m_1 = 9$.

De plus, $Q_1 = 7$ et $Q_3 = 13$ donc l'écart inter-quartile est $e_1 = 13 - 7 = 6$.

On voit aussi que la médiane de la 1^{re}ES2 est $m_2 = 8$.

De plus, $Q_1 = 6$ et $Q_3 = 10$, donc l'écart inter-quartile est $e_2 = 10 - 6 = 4$.

- 4 Le couples $(m_1; e_1) = (9; 6)$ et $(m_2; e_2) = (8; 4)$ nous permettent de dire que la dispersion des notes autour des médianes est plus étroite dans la 1^{re} ES2 que dans la 1^{re} ES1, en ayant à peu près la même médiane (à 1 point près).

Les couples $(\bar{x}_1; \sigma_1) = (9,75; 3,29)$ et $(\bar{x}_2; \sigma_2) = (8,17; 3,5)$ nous permet de dire que la concentration des notes autour des moyennes est quasiment identique, en ayant une moyenne plus forte dans la 1^{re} ES1 que dans la 1^{re} ES2.

On peut donc voir que la 1^{re} ES1 est légèrement plus performante que la 1^{re} ES2.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 • Pour l'entreprise A :

$$\begin{aligned}\bar{x}_A &= \frac{1\,200 \times 18 + 1\,300 \times 27 + \dots + 1\,925 \times 8}{18 + 27 + 52 + \dots + 20 + 8} \\ &= \frac{353\,000}{234} \\ \boxed{\bar{x}_A \approx 1\,509}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_A &= \frac{18(1\,509 - 1\,200)^2 + 27(1\,509 - 1\,300)^2 + \dots + 8(1\,509 - 1\,925)^2}{234} \\ \boxed{V_A \approx 33\,367}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sqrt{V_A} \\ \boxed{\sigma_A \approx 183}\end{aligned}$$

- Pour l'entreprise B :

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \frac{950 \times 10 + 1\,050 \times 15 + \dots + 2\,050 \times 4}{10 + 15 + \dots + 10 + 4} \\ &= \frac{436\,750}{299} \\ \boxed{\bar{x}_B \approx 1\,461}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_B &= \frac{10(950 - 1\,461)^2 + 15(1\,050 - 1\,461)^2 + \dots + 4(2\,050 - 1\,461)^2}{299} \\ \boxed{V_B \approx 61\,959}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{V_B} \\ \boxed{\sigma_B \approx 249}\end{aligned}$$

Ainsi, des couples $(\bar{x}_A; \sigma_A) = (1\,509; 183)$ et $(\bar{x}_B; \sigma_B) = (1\,461; 249)$, on peut déduire qu'en moyenne, on gagne plus dans l'entreprise A que dans la B, mais que l'écart à ce salaire moyen est plus important dans l'entreprise B quand dans la A.

2

- Pour l'entreprise A, l'effectif total est 234, et la moitié de cet effectif (à savoir 117) est atteint pour la classe $[1\,450; 1\,550[$. Pour déterminer la médiane m_A (qui appartient à ce dernier intervalle), considérons les points $A(1\,450; 97)$ (« 97 » étant l'effectif cumulé croissant correspondant à la classe avant la classe médiane, $18 + 27 + 52 = 97$), et $B(1\,550; 145)$ (« 145 » étant égal à $97 + 48$).

Le coefficient de la droite (AB) est :

$$\frac{145 - 97}{1\,550 - 1\,450} = 0,48.$$

L'équation de (AB) est de la forme $y = 0,48x + p$. Ainsi, $y_A = 0,48x_A + p$, soit $p = 97 - 0,48 \times 1\,450 = -599$.

Ainsi, (AB) a pour équation réduite : $y = 0,48x - 599$. La médiane m_A est la valeur de x pour laquelle $y = 117$ (la moitié de l'effectif total), donc :

$$117 = 0,48 \times m_A - 599 \quad \text{soit} \quad \boxed{m_A \approx 1\,492}$$

Le 1^{er} quartile est dans l'intervalle $[1\,350; 1\,450[$ car le quart de l'effectif total (58,5) est atteint dans cet intervalle. Posons $A(1\,350; 45)$ et $B(1\,450; 52)$. Le coefficient directeur de (AB) est 0,52 donc la droite (AB) a pour équation réduite $y = 0,52x + p$, avec $y_B = 0,52x_B + p$, soit $p = 52 - 0,52 \times 1\,450 = -702$.

Ainsi, (AB) : $y = 0,52x - 702$. Q_1 est la valeur de x pour laquelle $y = 58,5$ donc :

$$Q_1 = \frac{58,5 + 702}{0,52} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_1 = 1\,462,5}$$

Le 3^e quartile est atteint dans $[1\,550; 1\,650[$ (car les trois quarts de l'effectif total, à savoir 175,5, est atteint dans cet intervalle).

Posons $A(1\,550; 145)$ et $B(1\,650; 181)$. Le coefficient directeur de (AB) est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{181 - 145}{100} = 0,36.$$

Donc, l'équation réduite de (AB) est : $y = 0,36x + p$.

Comme $A \in (AB)$, $y_A = 0,36x_A + p$, donc $p = 145 - 0,36 \times 1\,550 = -413$.

Ainsi, (AB) : $y = 0,36x - 413$.

Q_3 est la valeur de x pour laquelle $y = 175,5$ donc :

$$Q_3 = \frac{175,5 + 413}{0,36} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_3 \approx 1\,635}$$

On a alors :

$$I_Q \approx 1\,635 - 1\,462,5 \quad \text{soit} \quad \boxed{I_Q \approx 172}$$

- Pour l'entreprise B, l'effectif total est 299 donc la médiane est atteinte dans l'intervalle pour lequel l'e.c.c. est 150, donc $[1\,400; 1\,500[$.

Sur cet intervalle, le segment a pour équation $y = 0,42x + p$, avec $p = 119 - 0,42 \times 1\,400 = -469$. Donc $y = 0,42x - 469$. La médiane m_B est la valeur de x pour laquelle $y = 149,5$ (la moitié de l'effectif total), donc :

$$m_B = \frac{149,5 + 469}{0,42} \quad \text{soit} \quad \boxed{m_B \approx 1\,473}$$

Le 1^{er} quartile est atteint dans $[1\,200; 1\,300[$. L'équation du segment sur cet intervalle est $y = 0,34x + p$ avec $p = 47 - 0,34 \times 1\,200 = -361$.

Donc, $y = 0,34x - 361$. Q'_1 est la valeur de x pour laquelle $y = 74,75$ (le quart de l'effectif total) donc :

$$Q'_1 = \frac{74,75 + 361}{0,34} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q'_1 \approx 1\,282}$$

Le 3^e quartile est atteint dans $[160; 1\,700]$. L'équation du segment sur cet intervalle est $y = 0,30x + p$ avec $p = 219 - 0,3 \times 1\,600 = -261$.

Donc $y = 0,3x - 261$. Q'_3 est la valeur de x pour laquelle $y = 224,25$ (les trois quarts de l'effectif total) donc :

$$Q'_3 = \frac{224,25 + 261}{0,3} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q'_3 = 1\,617,5}$$

Ainsi, l'intervalle inter-quartile est :

$$I'_Q = 1\,617,5 - 1\,282 \quad \text{soit} \quad \boxed{I'_Q \approx 335,5}$$

Des couples $(m_A; I_Q) = (1\,492; 172)$ et $(m_B; I'_Q) = (1\,473; 335,5)$, on peut observer que les médianes sont presque égales tout en ayant un écart inter-quartile plus grand dans l'entreprise B que dans l'entreprise A. La répartition des salaires autour de la médiane est plus vaste dans l'entreprise B que dans la A, ce qui signifie que dans l'entreprise A, 50 % des salaires sont assez concentrés autour de la médiane (avec un écart de plus ou moins 172 €) alors que dans l'entreprise B, 50 % des salaires se trouvent certes autour de la médiane, mais avec plus ou moins 335,5 €.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Posons $x_{n+1} = x$.

1 Par définition, on a :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i \quad \text{donc} \quad n\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{i=n+1} x_i \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i + x \right) \\ &= \frac{1}{n+1} (n\bar{x} + x) \\ &\boxed{m(x) = \frac{x + n\bar{x}}{n+1}} \end{aligned}$$

2 $m(x) = \bar{x}$
 $\iff \frac{x + n\bar{x}}{n+1} = \bar{x}$
 $\iff x + n\bar{x} = (n+1)\bar{x}$
 $\iff x = \bar{x}.$

Il faut ainsi choisir d'ajouter à la série une valeur égale à la moyenne de la série pour que la moyenne de la nouvelle série soit la même que la série initiale.

3 Par définition, d'après le théorème de König-Huygens, on a :

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \bar{x}^2 \quad \text{donc} \quad nV = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{i=n+1} x_i^2 - [m(x)]^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + x^2 \right) - \left(\frac{x + n\bar{x}}{n+1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n+1} (nV + n\bar{x}^2 + x^2) - \frac{x^2 + 2n\bar{x}x + n^2\bar{x}^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(nV + n\bar{x}^2 + x^2 - \frac{x^2 + 2n\bar{x}x + n^2\bar{x}^2}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{n(n+1)V + n(n+1)\bar{x}^2 + (n+1)x^2 - x^2 - 2n\bar{x}x - n^2\bar{x}^2}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} (nx^2 - 2n\bar{x}x + n(n+1)V + n\bar{x}) \end{aligned}$$

4 $v(x)$ est un polynôme du second degré donc le coefficient de x^2 est positif. Par conséquent, l'extremum est un minimum, et il est atteint pour :

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2n\bar{x}}{2n} = \bar{x}.$$

La nouvelle variance est donc minimale si on ajoute à la série une valeur égale à sa moyenne.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'algorithme 3 affiche la liste :

[1,3,5]

Il semble donc trier dans l'ordre croissant les données de la liste entrée.

2 Un algorithme possible est :

Algorithme 4: L'algorithme complété

Entrées

L est une liste de nombres
N est un nombre entier
i et j sont des nombres entiers
a, m, P, M sont des nombres
indice est un nombre entier

Initialisation

Entrer L

Traitement

N prend la valeur Longueur(L)

Pour i allant de 1 à N

 m prend la valeur L[i]

 indice prend la valeur i

 Pour j allant de i+1 à N

 Si L[j]<m alors

 m prend la valeur L[j]

 indice prend la valeur j

 Fin du Si

 Fin du Pour

 a prend la valeur L[i]

 L[i] prend la valeur L[indice]

 L[indice] prend la valeur a

Fin du Pour

P prend la valeur N

Tant que P>=2

 P prend la valeur P-2

Fin du Tant que

Si P=1 alors

 M prend la valeur L[(n+1)/2]

sinon

 M prend la valeur (L[N/2]+L[N/2+1])/2

Fin du Si

Sortie

Afficher L et M

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Notons x la note au devoir coefficient 2. Il faut :

$$\frac{(0,5 + 2 + 1) \times 8 + 2x}{0,5 + 2 + 1 + 2} \geq 10$$

soit :

$$28 + 2x \geq 10 \times 5,5.$$

On a alors :

$$x \geq \frac{55 - 28}{2}$$

ou encore :

$$x \geq 13,5.$$

Il faut donc que Hugo obtienne une note supérieure ou égale à 13,5/20 lors du prochain contrôle.

- 2** a. Notons $\bar{x}_1 = 14,5$ la moyenne de la 1^{re}S1 et $\bar{x}_2$ celle de la 1^{re}S2. Il faut :

$$\begin{aligned} \frac{30 \times 14,5 + 26 \times \bar{x}_2}{30 + 26} &\geq 12 \iff 435 + 26\bar{x}_2 \geq 12 \times 56 \\ &\iff \bar{x}_2 \geq \frac{12 \times 56 - 435}{26} \\ &\iff \bar{x}_2 \geq 9,12. \end{aligned}$$

Il faut donc que la moyenne de la 1^{re}S2 soit supérieure ou égale à 9,12.

- b. Lors des précédents devoirs, $\bar{x}_2 = 0,8\bar{x}_1$. Ici, $0,8\bar{x}_1 = 0,8 \times 14,5 = 11,6$.

M. Zébulon peut donc se rassurer : il est fort probable que la moyenne de ses deux classes soit supérieure à 12/20.

- 3** La variance des notes de Kevin est : $1,643^2 \approx 2,7$.

Notons n sa note au dernier devoir, $\bar{x}$ sa moyenne sur ses trois contrôles et V la variance. Alors :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{5 \times 2 + 8 \times 1 + 2n}{5} \\ V = \frac{2(5 - \bar{x})^2 + (8 - \bar{x})^2 + 2(n - \bar{x})^2}{5} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{18}{5} + \frac{2}{5}n \\ V = \frac{1}{5} [5\bar{x}^2 - (36 + 4n)\bar{x} + 114 + 2n^2] \end{cases}$$

En remplaçant dans la deuxième égalité $\bar{x}$ par son expression en fonction de n , on a :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{25}(18 + 2n)^2 - \frac{1}{25} \underbrace{(36 + 4n)(18 + 2n)}_{=2(18+2n)} + \frac{1}{5}(114 + 2n^2) \\ &= -\frac{1}{25}(18 + 2n)^2 + \frac{1}{25}(570 + 10n^2) \\ &= \frac{1}{25}(10n^2 + 570 - 18^2 - 72n - 4n^2) \\ &= \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$V = 2,7 \iff \frac{2}{25}(3n^2 - 36n + 123) = \frac{27}{10}$$

$$\iff 3n^2 - 36n + 123 = \frac{27}{10} \times \frac{25}{2}$$

$$\iff 3n^2 - 36n + 123 = \frac{135}{4}$$

$$\iff 3n^2 - 36n + 123 - \frac{135}{4} = 0$$

$$\iff 12n^2 - 144n + 357 = 0.$$

Le discriminant du polynôme $12n^2 - 144n - 233$ est :

$$\Delta = (-144)^2 - 4 \times 12 \times 357 = 3600 = 60^2.$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions :

$$n_1 = \frac{144 - 60}{24} = 3,5 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{144 + 60}{24} = 8,5.$$

Il y a donc deux notes possibles : 3,5 ou 8,5.

Mais le fait que l'enseignante puisse tripler la note suggère que cette note ne peut pas être 8,5 (sans quoi la note triplée serait supérieure à 20).

Kevin a donc eu 3,5/20.

Variables aléatoires

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

12 juin 2018

■ Exercice 1. Différents ordinateurs

★☆☆☆☆ **A**

Corrigé page 83

Un couple décide d'équiper leur foyer avec un nouvel outil informatique. Il vont alors sur un site Internet qui propose des appareils informatiques selon leur type, leur marque et leur puissance. Le couple hésite entre :

- pour le type : un ordinateur de bureau (B), un ordinateur portable (P) et une tablette (T) ;
- pour la marque : la marque M_1 et la marque M_2 ;
- la puissance : W_1 et W_2 .

- 1 Combien de configurations sont possibles ? (vous pouvez vous aider d'un arbre)
- 2 Si le couple choisit au hasard une configuration, quelle est la probabilité pour que l'outil informatique choisi soit :
 - a. une tablette ?
 - b. un ordinateur portable d'une puissance W_1 ?
 - c. un ordinateur de bureau de marque M_2 ?

■ Exercice 2. 49 boules dans un urne

★☆☆☆☆ **A**

Corrigé page 83

Une urne contient 49 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 49. On tire au hasard une boule de cette urne.

On note :

- A l'événement : « le numéro de la boule choisie est un nombre pair » ;
- B l'événement : « le numéro de la boule choisie est un multiple de 5 ».

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Variables aléatoires

■ Exercice 3. Avec deux dés

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 84

On dispose d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et d'un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). Ces dés sont parfaitement équilibrés.

On lance ces deux dés et on s'intéresse à la somme des deux chiffres obtenus.

Soit X la variable aléatoire représentant l'ensemble des sommes possibles.

- 1 Donner la loi de probabilité de X .
- 2 Calculer l'espérance mathématique de X .
- 3 Calculer l'écart-type de X .

■ Exercice 4. Avec une pièce de monnaie

★☆☆☆☆ A

Corrigé page 84

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie.

- 1 Si on obtient trois fois « pile » ou trois fois « face », on gagne 100 €. Sinon, on perd 10 € (ce qui correspond à un gain de -10 €).
Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire représentant le gain algébrique de ce jeu.
- 2 On ajoute 5 € aux gains. Quelle est alors l'espérance et quel est l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu ?
- 3 On multiplie par 2 les gains du jeu initial. Calculer alors l'espérance et l'écart-type de la nouvelle variable aléatoire représentant le gain algébrique du jeu.

■ Exercice 5. Lancer de 3 pièces

★★☆☆☆ A

Corrigé page 85

On lance 3 pièces bien équilibrées valant respectivement 1 €, 2 € et 2 €.

On veut étudier la variable aléatoire X qui totalise le montant en euros des pièces tombées sur « Pile ».

- 1 Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
- 2 Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ?
Donner la loi de probabilité de X .
- 3 Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 € ?

■ Exercice 6. Deux urnes

★★★★☆ A

Corrigé page 85

On considère un jeu où deux urnes U_1 et U_2 sont remplies de 12 boules.

Dans U_1 , il y a 8 boules rouges, 3 boules blanches et 1 boule noire.

Dans U_2 , il y a 1 boule rouge, 8 boules blanches et 3 boules noires.

Le joueur tire au hasard une boule dans U_1 , puis une autre dans U_2 .

On note :

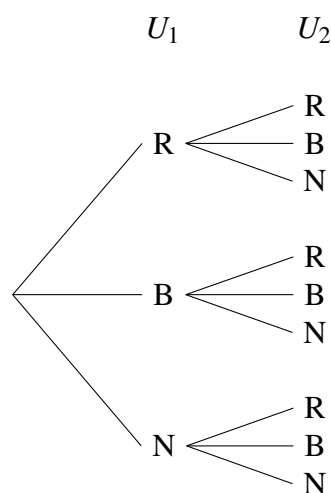
- R l'événement : « la boule tirée est rouge » ;
- B l'événement : « la boule tirée est blanche » ;
- N l'événement : « la boule tirée est noire ».

Si les deux boules tirées sont de la même couleur, le joueur gagne 10 € ; sinon, il ne gagne rien.

Pour jouer, on doit s'acquitter d'une somme de 5 €.

On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1 Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2 Déterminer la loi de probabilités de X .

3 Calculer l'espérance mathématique de X , puis interpréter ce résultat.

4 Calculer la variance puis l'écart-type de X .

■ Exercice 7. Nombre variable de boules

★★★★☆ R

Corrigé page 86

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

Dans U_1 , il y a n boules noires et 10 boules blanches.

Dans U_2 , il y a 10 boules noires et $n + 1$ boules blanches.

On tire au hasard une boule dans chaque urne.

1 Exprimer en fonction de n la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

2 Pour quelle valeur de n cette probabilité est maximale ?

Loi binomiale

■ Exercice 8. Avec une urne

★★★★☆ A

Corrigé page 87

Une urne contient 3 boules bleues et 7 boules vertes. On tire successivement au hasard et de façon indépendante 5 boules de cette urne en les remettant dans l'urne après avoir regardé leur couleur. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules bleues tirées à la fin de cette expérience.

- 1 Décrire X (donner la valeurs possibles de X).
- 2 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 3 Calculer alors :
 - a. $P(X = 0)$
 - b. $P(X = 3)$
 - c. $P(X \geq 1)$

■ Exercice 9. Dans une usine de composants électroniques

★★★★☆ A

Corrigé page 88

Le responsable de fabrication de l'usine ELECTOP est chargé de contrôler une chaîne de production fabriquant un composant électronique. Sur 10 000 composants pris au hasard, il constate que 7 sont défectueux. Il suppose donc que la probabilité d'avoir un composant défectueux fabriqué par cette chaîne de production est égale à 0,000 7.

Le mois suivant, il choisit au hasard sur cette chaîne de production 20 composants. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de composants défectueux.

- 1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2 Calculer $P(X \geq 2)$.

■ Exercice 10. Au lycée à vélo

★★★★☆ A

Corrigé page 88

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.

Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.

Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps (en minute) mis par l'élève pour aller au lycée.

- 1 Déterminer la loi de probabilités de X .
- 2 Exprimer T en fonction de X .
- 3 Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(T)$ de T et interpréter ce résultat.
- 4 L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
Calculer la probabilité que l'élève soit en retard au lycée.

■ Exercice 11. Au tennis

★★★★☆ A

Corrigé page 89

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. On estime que la probabilité qu'Alain gagne une rencontre est 0,6. Ils décident de jouer trois matches dans l'année (les résultats des matches sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.

Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.

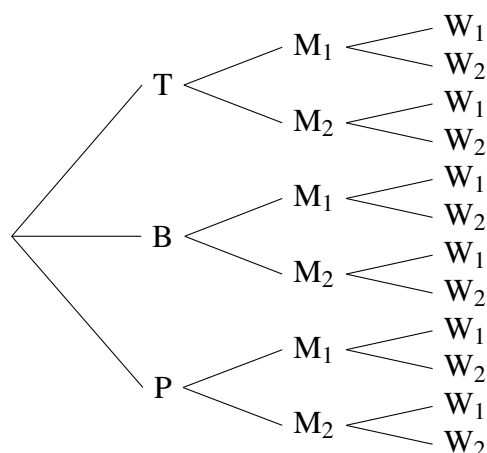
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matches gagnés par Benjamin et D la variable aléatoire correspondant à la dépense de Benjamin.

- 1 Quelles sont les valeurs possibles de X ? Exprimer D en fonction de X et en déduire les valeurs possibles de D .
- 2 Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.
- 3 Calculer l'espérance de dépense en fin d'année de Benjamin.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Nous avons l'arbre suivant :



Il y a donc 12 configurations possibles.

2 a. La probabilité de choisir une tablette est $\frac{1}{3}$.

b. La probabilité de choisir un portable d'une puissance W_1 est $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

c. La probabilité de choisir un ordinateur de bureau de marque M_2 est $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- $P(A) = \frac{24}{49}$ car il y a 24 nombres pairs entre 1 et 49.
- $P(B) = \frac{9}{49}$ car $B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45\}$.
- $P(A \cap B) = \frac{4}{49}$ car $A \cap B = \{10; 20; 30; 40\}$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24 + 9 - 4}{49} = \frac{29}{49}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 L'ensemble des sommes possibles est donné par le tableau suivant :

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

On a alors :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X)	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

2 $\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{24} + 3 \times \frac{1}{12} + \dots + 10 \times \frac{1}{24}$

$\mathbb{E}(X) = 6$

3 La variance de X est : $\mathbb{V}(X) = \frac{25}{6}$ donc son écart-type est $\sigma(X) = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La loi de probabilité de la v.a. X représentant le gain algébrique du jeu est :

X	-10	100
P(X)	$\frac{3}{4}$	$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$

L'espérance de X est donc :

$$\mathbb{E}(X) = -10 \times \frac{3}{4} + 100 \times \frac{1}{4} = 17,5.$$

Sa variance est :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{3}{4}(-10 - 17,5)^2 + \frac{1}{4}(100 - 17,5)^2 = 2268,75$$

Son écart-type est alors :

$$\sigma(X) = \sqrt{2268,75} \approx 47,63.$$

- 2 On sait que $\mathbb{E}(X+a) = \mathbb{E}(X) + a$ donc ici, $\mathbb{E}(X') = 17,5 + 5 = 22,5$.

De plus, $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X+a) = \sigma(X)$ donc la variance et l'écart-type ne changent pas.

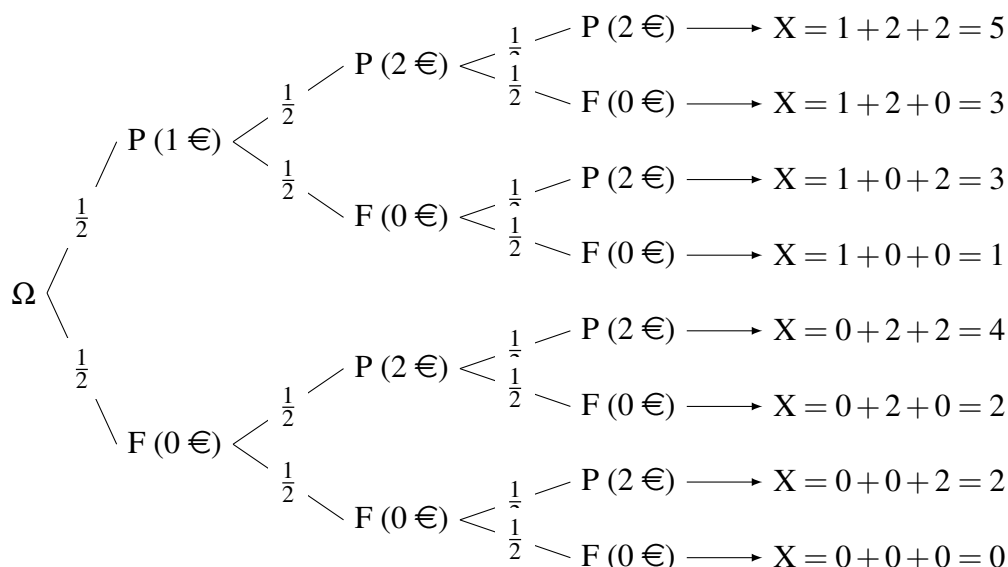
- 3 $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$ donc ici, $\mathbb{E}(X'') = 2 \times 17,5 = 35$.

De plus, $\sigma(aX) = a\sigma(X)$ donc $\sigma(X'') = 2 \times 47,63 = 95,26$.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'arbre est le suivant :



2 On a : $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ d'après l'arbre précédent, d'où la loi de probabilité suivante :

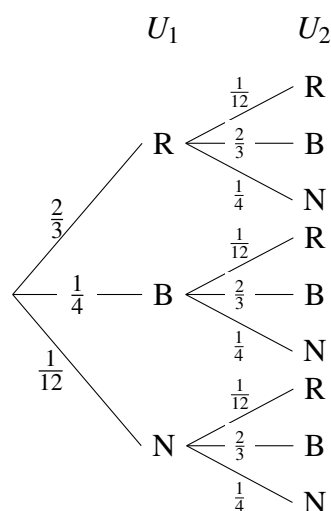
X	0	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3 $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 L'arbre de probabilités complété est le suivant :



2 La probabilité d'avoir deux boules rouges est : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$.

La probabilité d'avoir deux boules blanches est : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'avoir deux boules noires est : $\frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$.

Ainsi, la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est :

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{35}{144}.$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes est :

$$1 - \frac{35}{144} = \frac{109}{144}.$$

Le gain algébrique du joueur peut être -5 € (s'il paie 5 € pour jouer et s'il ne gagne pas) ou 5 € (s'il paie 5 € et qu'il gagne 10 €). On a alors :

X	-5	5
P(X)	$\frac{109}{144}$	$\frac{35}{144}$

- 3 L'espérance mathématique de X est : $\mathbb{E}(X) = -5 \times \frac{109}{144} + 5 \times \frac{35}{144}$

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{185}{72} \approx -2,57$$

Cela signifie que si l'on participe un grand nombre de fois à ce jeu, on peut « espérer » perdre en moyenne $2,57 \text{ €}$.

- 4 La variance de X est : $\mathbb{V}(X) = \left[-5 - \left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2 \times \frac{109}{144} + \left[5 - \left(-\frac{185}{72}\right)\right]^2 \times \frac{35}{144}$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{410970875}{8211456} \approx 50,05$$

Ainsi, $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$
 $\approx \sqrt{50,05}$

$$\sigma(X) \approx 7,07$$

L'écart-type représentant l'écart moyen à l'espérance, le joueur peut espérer avoir un gain algébrique entre $\mathbb{E}(X) - \sigma(X) \approx -9,64 \text{ €}$ et $\mathbb{E}(X) + \sigma(X) \approx 4,5 \text{ €}$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La probabilité de tirer deux boules noires est :

$$\frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+11} = \frac{10n}{(n+10)(n+11)}.$$

La probabilité de tirer deux boules blanches est :

$$\frac{10}{n+10} \times \frac{n+1}{n+11} = \frac{10(n+1)}{(n+10)(n+11)}.$$

La probabilité de tirer deux boules de même couleur est la somme de ces deux probabilités donc :

$$\frac{10(2n+1)}{(n+10)(n+11)}$$

2 Posons $f(x) = \frac{10(2x+1)}{(x+10)(x+11)} = \frac{20x+10}{x^2+21x+110}$.

Alors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{20(x^2+21x+110) - (20x+10)(2x+21)}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{20x^2+420x+2200-40x^2-420x-20x-210}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{-20x^2-20x+1990}{(x^2+21x+110)^2} \\ &= \frac{10(-2x^2-2x+199)}{(x^2+21x+110)^2} \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $-2x^2-2x+199$ est :

$$\Delta = 4 + 8 \times 199 = 1596.$$

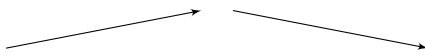
Il a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{1596}}{-4} = \frac{-1 + \sqrt{399}}{2} > 0$$

et

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{1596}}{-4} = \frac{-1 - \sqrt{399}}{2} < 0.$$

On a alors le tableau suivant :

x	0	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

On voit alors que $f(x)$ atteint son maximum pour $x = \frac{-1 + \sqrt{399}}{2} \approx 9$.

Ainsi, pour $n = 9$, la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est maximale.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. En effet, sur 5 tirages successifs avec remise de la boule tirée, on peut n'avoir aucune boule bleue comme en avoir 1, 2, 3, 4 ou 5.

2 L'expérience consistant à choisir au hasard une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli dont le succès est S : « avoir une boule bleue », dont la probabilité est $p = \frac{3}{10} = 0,3$.

Ainsi, si l'on répète de façon indépendante 5 fois cette expérience, cela constitue un schéma de Bernoulli; ainsi, la variable aléatoire représentant le nombre de succès obtenus à l'issue de ce schéma suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0,3)$.

3 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5; 0,3)$ donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $p = 0,3$. Ainsi :

a. $P(X = 0) = \binom{5}{0} \times 0,3^0 \times (1-0,3)^{5-0} = 1 \times 1 \times 0,7^5 = 0,16807$.

b. $P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^2 = 0,1323$.

c. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,16807 = 0,83193$.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 L'expérience consistant à choisir au hasard un composant électronique est une épreuve de Bernoulli dont le succès est : « le composant est défectueux » et donc la probabilité est $p = 0,0007$. Ainsi, répéter 20 fois de façon indépendante cette expérience constitue un schéma de Bernoulli et le nombre de succès obtenus est représenté par une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,0007)$.
- 2
$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left[\binom{20}{0} \times 0,0007^0 \times (1 - 0,0007)^{20} + \binom{20}{1} \times 0,0007^1 \times (1 - 0,0007)^{19} \right] \\ &\approx 1 - (0,986092710141 + 0,0138149684199) \\ &\approx 0,00009. \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6; \frac{2}{3}\right)$. En effet, l'expérience consistant à arriver à un feu tricolore et à regarder sa couleur est une épreuve de Bernoulli dont le succès est ici S : « le feu est vert » et dont la probabilité est égale à $\frac{2}{3}$ d'après l'énoncé.
- 2 Sans feu tricolore, le temps nécessaire pour parcourir 3 km avec une vitesse de 15 km/h est $60 \div 5 = 12$ minutes (en effet, si on fait 15 km en 60 minutes, 3 km seront faits en $\frac{1}{5}$ de 60 minutes).
À ces 12 minutes, il faut ajouter 1,5 minute par feu rouge ou orange. La variable aléatoire représentant le nombre de feux rouges ou oranges est $(6 - X)$ donc :

$$T = 12 + 1,5(6 - X) \quad \text{soit :} \quad T = 21 - 1,5X.$$

- 3 D'après une propriété du cours, $\exp T = \mathbb{E}(21 - 1,5X) = 21 - 1,5\mathbb{E}(X)$.
Or, $\mathbb{E}(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$. Ainsi, $\mathbb{E}(T) = 21 - 1,5 \times 4$, soit $\mathbb{E}(T) = 15$.
L'élève peut donc s'attendre arriver au lycée 15 minutes en moyenne après son départ.
- 4 On cherche $P(T > 17)$.

$$\begin{aligned} P(T > 17) &= P(21 - 1,5X > 17) \\ &= P(-1,5X > 17 - 21) \\ &= P(-1,5X > -4) \\ &= P\left(X < \frac{4}{1,5}\right) \\ &= P\left(X < \frac{8}{3}\right) \\ &= P(X \leq 2) \quad \text{car } X \text{ est un nombre entier} \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{73}{729} \approx 0,1. \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $X = \{0; 1; 2; 3\}.$

$$D = 20(3 - X) \text{ donc } D = \{0; 20; 40; 60\}.$$

2 $P(D = 40) = P(60 - 20X = 40)$

$$= P(-20X = -20)$$

$$= P(X = 1)$$

$$= \binom{3}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^2$$

$$= 0,432.$$

3 $\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(60 - 20X)$

$$= 60 - 20\mathbb{E}(X)$$

$$= 60 - 20 \times (3 \times 0,4)$$

$$= 36.$$

Benjamin peut donc s'attendre à dépenser en moyenne 36 € par an.

Fluctuation, échantillonnage

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

■ Exercice 1. Pièce défectueuse

★★★★☆ **A**

Corrigé page 92

Dans une usine de fabrication de composants électroniques, une chaîne de montage est destinée à la fabrication d'une carte mère. Des études précédentes, on peut admettre que si l'on choisit au hasard une carte mère fabriquée par cette chaîne de montage, la probabilité qu'elle soit défectueuse est égale à $p = 0,0125$.

Le contremaître vérifie un échantillon de 1 000 cartes mères à la sortie de cette chaîne. Il constate que 18 pièces sont défectueuses.

- 1 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de pièces défectueuses fabriquées par cette chaîne de montage.
- 2 Peut-on considérer que cette chaîne de montage doit être de nouveau réglée ?

■ Exercice 2. Un dé peut-être truqué

★★★★☆ **A**

Corrigé page 92

Mathieu propose à Mathilde de jouer avec un dé qu'il a fabriqué lui-même. Mathilde, suspicieuse, souhaite vérifier si le dé de Mathieu est bien équilibré. Pour cela, elle le lance 150 fois et obtient 13 fois la face « 5 ».

- 1 Quelle est la proportion théorique du nombre de faces « 5 » que l'on doit obtenir si le dé est équilibré ?
- 2 Justifier que la loi binomiale peut être utilisée dans ce cas pour déterminer, au seuil de 95 %, l'intervalle de fluctuation du nombre de lancers. Préciser alors les paramètres de cette loi binomiale.
- 3 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de faces « 5 » obtenues. Peut-on alors considérer que le dé de Mathieu est équilibré ?

■ Exercice 3. Le médecin de campagne

★★★★☆ **A**

Corrigé page 93

Un médecin, habitué à changer de commune rurale régulièrement, estime qu'au mois de janvier de n'importe quelle année, il y a 30 % de la population qui chope cette maudite grippe. Cette année, en fin du mois de janvier, il constate que 35 % de la commune où il vient de s'installer ont été touchés par la grippe. On peut compter 5 489 habitants dans cette commune.

Est-ce que ce médecin peut s'inquiéter de ce pourcentage ?

■ Exercice 4. Les OVNIS

★★★★☆ A

Corrigé page 94

Aux États-Unis d'Amérique, on admet que la fréquence mensuelle à laquelle on enregistre des déclarations d'habitants ayant vu des OVNIS (Objets Volants Non Identifiés) est égal à $f = 0,00003$ (3 habitants sur 100 000).

Dans la ville d'Albuquerque (Nouveau-Mexique), peuplé de 556 495 habitants (d'après le recensement de 2013), 20 personnes ont déclaré avoir vu des OVNIS.

Est-il raisonnable de penser que ce nombre est trop grand pour l'ignorer ?

■ Exercice 5. Coup de fatigue au centre d'appels

★★★★☆ A

Corrigé page 94

Dans un centre d'appels, on arrive à répondre en moyenne à 8 appels sur 10.

Un jour, le responsable s'aperçoit à la fin de la journée que sur 7 580 appels, seulement 6 005 ont été traités.

Le responsable doit-il envisager des sanctions envers ses subordonnés ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 On peut assimiler le fait de choisir au hasard parmi des 1 000 pièces de notre échantillon l'une d'elles à un tirage avec remise. Ainsi, si X désigne le nombre de pièces défectueuses, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1\,000; 0,0125)$.

On a alors le tableau suivant :

k	$P(X \leq k)$
5994	0.0234434928002
5995	0.0250609731794
5996	0.0267712509645
$\vdots$	$\vdots$
6131	0.974194304356
6132	0.975889063069
6133	0.97748959176

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est alors : $[6; 20]$.

- 2 Il y a eu 18 pièces défectueuses et $18 \in [6; 20]$ donc la machine est conforme aux réglages attendus. Il n'y a donc pas lieu de la régler à nouveau.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La proportion théorique de « 5 » obtenus est $\frac{1}{6}$ si le dé est équilibré.
- 2 Les 150 lancers du dé constituent 150 répétitions de la même expérience et ce, de façons indépendantes. Ainsi, la loi binomiale peut être utilisée et X (représentant le nombre de « 5 » obtenus) suit la loi $\mathcal{B}(150; \frac{1}{6})$.

3 On a le tableau suivant :

k	$P(X \leq k)$
15	0.0144864717512
16	0.0263751550117
17	0.045121812803
$\vdots$	$\vdots$
33	0.96487990794
34	0.977908627081
35	0.986546879392

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est donc $[16; 34]$.

Mathilde a obtenu 13 fois la face « 5 » ; or, $13 \notin [16; 34]$. On peut donc supposer, au risque de 5 % (de se tromper) que le dé n'est pas équilibré.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Pour répondre à cette question, déterminons l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du pourcentage d'habitants atteints par la grippe.

On peut utiliser la loi binomiale $\mathcal{B}(5489; 0,3)$ (le 0,3 correspond à 30 %, qui est le pourcentage « théorique » de malades de la grippe en janvier).

k	$P(X \leq k)$
1579	0.0235614771327
1580	0.0252617994577
1581	0.0270635234939
$\vdots$	$\vdots$
1712	0.973369570673
1713	0.975120826501
1714	0.976774287579

L'intervalle de fluctuation est donc $\left[\frac{1580}{5489}; \frac{1713}{5489} \right]$, soit approximativement $[28,785; 31,208]$ (termes exprimés en pourcentages).

Le taux de malades de la grippe en janvier étant de 35 % et 35 % n'étant pas compris dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, il peut envisager, au risque d'erreur de 5 %, que la situation n'est pas normale.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Aidons-nous de la loi binomiale $\mathcal{B}(556495; 0,00003)$:

k	$P(X \leq k)$
8	0.0149654387744
9	0.0305602037888
10	0.0565957900676
$\vdots$	$\vdots$
24	0.965842646638
25	0.979129402771
26	0.987660829313

Il n'est donc pas anormal qu'il y ait entre 9 et 25 personnes par mois qui déclarent avoir vu des OVNIS. Ainsi, il n'est pas utile de s'inquiéter dans le cas présent : au risque d'erreur de 5 %, avoir 20 personnes déclarant avoir vu des OVNIS est « normal » ...

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Aidons-nous de la loi binomiale $\mathcal{B}(7580; 0,8)$:

k	$P(X \leq k)$
5994	0.0234434928002
5995	0.0250609731794
5996	0.0267712509645
$\vdots$	$\vdots$
6131	0.974194304356
6132	0.975889063069
6133	0.97748959176

L'intervalle de fluctuation des fréquences d'acceptation des appels est donc $\left[\frac{5995}{7580}; \frac{6132}{7580} \right]$, soit approximativement $[0,791; 0,808]$.

Ici, la fréquence d'acceptation des appels est égale à $\frac{6005}{7580} \approx 0,792 \in [0,791; 0,808]$. Par conséquent, au risque d'erreur de 5 %, on peut considérer que cette fréquence d'acceptations des appels est normal (dans la moyenne basse).

Le responsable n'a donc pas à réprimander ses subordonnés.