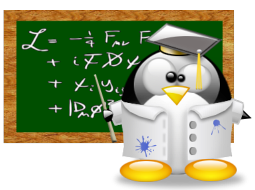
Sommaire



Prérequis

- Notions de pourcentages vues au collège
- Factorisation

Méthode *Calculer le pourcentage d'un nombre (rappel)*

Pour calculer $t\,\%$ d'un nombre x, on effectue l'opération :

$$\frac{t}{100} \times x = \frac{t \times x}{100}.$$

Exemples

- $30\,\%$ d'un groupe de 240 personnes sont asthmatiques.

$$\frac{30}{100} \times 240 = \frac{30 \times 240}{100} = 3 \times 24 = 72.$$

  Cela représente donc 72 personnes.

- $20,6\,\%$ du prix d'un vêtement représente la T.V.A. Un pull coûte 50 €.

$$\frac{20,6}{100} \times 50 = \frac{20,6 \times 50}{100} = 10,3.$$

  Ainsi, 10,30 € sont consacrés uniquement à la T.V.A. sur un pull à 50 €.

Il y a des correspondances entre pourcentages et fractions à connaître par cœur :

- $20\,\%$ d'un nombre représente $\frac{1}{5}$ de ce nombre (son cinquième) ;
- $25\,\%$ d'un nombre représente $\frac{1}{4}$ de ce nombre (son quart) ;
- $50\,\%$ d'un nombre représente $\frac{1}{2}$ de ce nombre (sa moitié) ;
- $75\,\%$ d'un nombre représente $\frac{3}{4}$ de ce nombre (ses trois quarts) ;
- $33\,\%$ d'un nombre représente à peu près $\frac{1}{3}$ de ce nombre (un tiers).

Définition *Évolution (nombre)*

L'`évolution` de x_1 à x_2 est la différence :

$$x_2 - x_1\ .$$

Une évolution peut donc être négative.

Propriété

Évolution relative (pourcentage)

L'évolution de x_1 à x_2 par rapport à x_1 (évolution relative à x_1) est :

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100.$$

Exemple

Un article coûte 125 € au 30 novembre. Au 1er décembre, il coûte 140 €.

$$\frac{140 - 125}{125} \times 100 = 12.$$

Le prix de cet article à donc augmenté de 12 %.

Définition

Coefficient multiplicateur

On considère un nombre x_1 puis un nombre x_2 obtenu après évolution à partir de x_1.
On appelle `coefficient multiplicateur` le nombre CM tel que :

$$x_2 = CM \times x_1.$$

Propriété

On considère une évolution de t % d'une valeur x_1 à une autre valeur x_2.
Si l'évolution est une augmentation, alors :

$$CM = 1 + \frac{t}{100} \ ;$$

Si l'évolution est une réduction, alors :

$$CM = 1 - \frac{t}{100}.$$

Exemples

- Considérons un prix x qui augmente de 15 % ; alors, le prix après augmentation est :

  $$x + \frac{15}{100}x = \left(1 + \frac{15}{100}\right)x = (1 + 0,15)x = 1,15x.$$

  Ici, le coefficient multiplicateur est $CM = 1,15$.
- Considérons un prix x qui diminue de 20 % ; alors, le prix après réduction est :

  $$x - \frac{20}{100}x = \left(1 - \frac{20}{100}\right)x = (1 - 0,2)x = 0,8x.$$

  Ici, le coefficient multiplicateur est $CM = 0,8$.

Méthode *Retrouver la valeur initiale après une évolution*

Le prix d'un article est 150 € après une réduction de 25 %. Quel était le prix de cet article avant cette réduction ?

Notons x le prix de cet article avant cette réduction de 25 %. Une réduction de 25 % correspond à un coefficient multiplicateur de $CM = 1 - 0,25 = 0,75$.
Ainsi,

$$0,75x = 150\ ,$$

donc :

$$x = \frac{150}{0,75} = 200.$$

L'article soldé à 25 % valait 200 € avant la réduction.

Propriété *Évolutions successives*

On considère un nombre x qui subit une évolution de coefficient multiplicateur CM_1, puis une seconde évolution de coefficient multiplicateur CM_2. On note y le nombre final. Alors,

$$y = CM_1 \times CM_2 \times x.$$

Exemple

La facture d'électricité de Monsieur Volta a baissé de 5 % de 2013 à 2014, mais augmentera de 5 % de 2014 à 2015. Le montant de sa facture en 2015 sera-t-il égal à celui de sa facture en 2013 ?

Pas si sûr ... En effet, si x représente le montant de sa facture en 2013, alors celui de sa facture en 2015 sera :

$$y = \underbrace{0,95}_{\substack{\text{réduction}\\ \text{de } 5\,\%}} \times \underbrace{1,05}_{\substack{\text{Augmentation}\\ \text{de } 5\,\%}} \times x = 0{,}997\,5x.$$

On voit alors que $y \neq x$; en fait, comme $0 < 0{,}997\,5 < 1$, on peut même dire que $y < x$.
Le montant de sa facture baissera donc de :

$$(1 - 0{,}997\,5) \times 100 = 0,25\,\%$$

par rapport à celui de sa facture en 2011.

Définition *Taux d'évolution global*

On considère deux évolutions successives de coefficients multiplicateurs respectifs CM_1 et CM_2.
Le `taux d'évolution global` est l'évolution (en pourcentage) entre la valeur initiale et la valeur finale.

Propriété

On considère deux évolutions successives de coefficients multiplicateurs respectifs CM_1 et CM_2. Le taux d'évolution global entre la valeur initiale x_1 et la valeur finale x_2 est le nombre t (en pourcentage) tel que :

$$t = \left(CM_1 \times CM_2\right) \times 100.$$

Explications

Nous avons vu que le taux d'évolution entre x_1 et x_2 est (en pourcentage) :

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} \times 100. \tag{1}$$

Or, $x_2 = CM_1 \times CM_2 \times x_1$. Donc, en remplaçant x_2 par cette expression dans l'expression 1, on obtient :

$$\frac{CM_1 \times CM_2 \times x_1 - x_1}{x_1} \times 100. \tag{2}$$

En factorisant par x_1 dans l'expression 2, on a :

$$\frac{\left(CM_1 \times CM_2 - 1\right) \times x_1}{x_1} \times 100. \tag{3}$$

En simplifiant par x_1 l'expression 3, on obtient :

$$\left(CM_1 \times CM_2 - 1\right) \times 100.$$

Exemple

Une entreprise décide d'augmenter de 6 % le tarif de ses prestations sur deux ans.

$$(1,06 \times 1,06 - 1) \times 100 = 12,36.$$

Ainsi, sur deux ans, le tarifs augmente de 12, 36 % (en non de 12 % comme certains pourraient l'imaginer !).

Définition *Taux d'évolution réciproque*

On considère une évolution de t % entre deux valeurs x_1 et x_2.
Le `taux d'évolution réciproque` est le pourcentage d'évolution de x_2 à x_1.

Propriété

On considère une évolution de t % entre deux valeurs x_1 et x_2.
Le taux d'évolution réciproque est le nombre t' tel que :

$$t' = \frac{-t}{100 + t} \times 100.$$

Explications

On sait que $x_2 = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) x_1$. Ainsi,

$$x_1 = \frac{x_2}{1 + \frac{t}{100}} = \frac{1}{1 + \frac{t}{100}} x_2 = \frac{1}{\frac{100+t}{100}} x_2 = \frac{100}{100+t} x_2 \,. \tag{4}$$

Le taux d'évolution réciproque t' est tel que $x_1 = \left(1 + \dfrac{t'}{100}\right) x_2$. Donc, d'après la relation 4, on a :

$$\frac{100}{100+t} = 1 + \frac{t'}{100} \,,$$

donc :

$$\frac{100}{100+t} - 1 = \frac{t'}{100} \,,$$

soit :

$$\frac{100}{100+t} - \frac{100+t}{100+t} = \frac{t'}{100} \,,$$

et donc :

$$\frac{-t}{100+t} = \frac{t'}{100}.$$

En multipliant par 100, on obtient :

$$t' = \frac{-t}{100+t} \times 100.$$

Exemple

Un article passe de 120 € à 150 €.

L'augmentation est donc de :

$$t = \frac{150 - 120}{120} \times 100 = 25\,\%.$$

Pour passer de 150 à 120, l'évolution est :

$$t' = \frac{-25}{100 + 25} \times 100 = -20\,\%.$$

On peut directement vérifier par le calcul :

$$\frac{120 - 150}{150} \times 100 = \frac{-30}{150} \times 100 = -20\,\%.$$