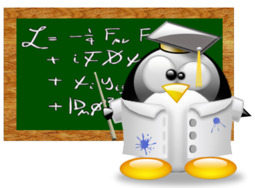
Fonctions de référence

Stéphane PASQUET, 9 décembre 2014

Sommaire



Prérequis

- Sens de variation d'une fonction
- Tableau de variation d'une fonction

Définition *Domaine de définition*

On appelle `domaine de définition` d'une fonction f l'ensemble de toutes les valeurs de x telles que $f(x)$ existe.
On le note fréquemment $\mathscr{D}_f$.

Exemples

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble de toutes les valeurs de x telles que l'on puisse calculer l'inverse de x, c'est-à-dire toutes les valeurs réelles sauf 0 :

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^* = \left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[\,.$$

2. Si $g(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ alors $\mathscr{D}_g$ est l'ensemble des valeurs de x telles que $x^2 - 9 \neq 0$, soient $\mathbb{R}$ privé des valeurs -3 et 3 :

$$\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\} = \left]-\infty\,;-3\right[\cup\left]-3\,;3\right[\cup\left]3\,;+\infty\right[\,.$$

Définition *La fonction racine carrée (fonction de référence)*

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$x \longmapsto \sqrt{x}\,.$$

Propriété *Sens de variation de la fonction racine carrée*

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

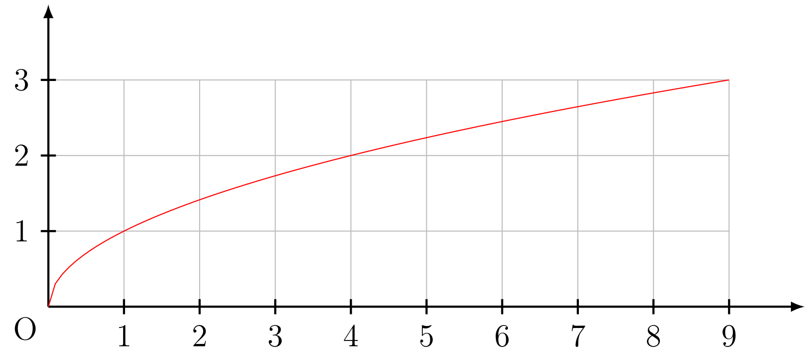
Démonstration

Soient deux nombres réels a et b tels que $0 < a < b$. Posons $f(x) = \sqrt{x}$. Alors,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ &= \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Or, $a < b$ donc $a - b < 0$; de plus, $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{b} > 0$ donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$.
Ainsi, $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$, ce qui signifie que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ (puisque a et b sont pris quelconques dans cet intervalle). ■

La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ dans un repère orthonormé est la suivante :



Définition *La fonction cube (fonction de référence)*

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto x^3 .$$

Propriété *Sens de variation de la fonction cube*

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soient deux nombres réels a et b tels que $a < b$. Posons $f(x) = x^3$. Alors,

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^3 - b^3 \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{(admis)} \end{aligned}$$

Or, $a - b < 0$, $a^2 > 0$ et $b^2 > 0$.
Si on prend a et b tout deux positifs ou tout deux négatifs, $ab > 0$ (car a et b ont le même signe). Donc $f(a) - f(b) < 0$, soit $f(a) < f(b)$.
La fonction f est alors croissante sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, donc sur $\mathbb{R}$. ■