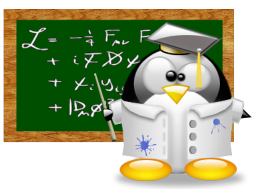
Stéphane PASQUET, 12 décembre 2014

Sommaire



Prérequis

- Notions de probabilités de Seconde

Activité

Activité d'introduction

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et regardons la somme des faces obtenues. Voici les différentes possibilités que nous avons :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Notons X l'ensemble des sommes possibles. Alors,

$$\mathrm{X} = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}.$$

Définition

Variable aléatoire

X est appelée la `variable aléatoire` représentant à la somme obtenue.

Activité (suite)

Construisons maintenant un tableau qui permet de voir les probabilités des différentes valeurs possibles pour X :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P (X)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

- Dans le tableau donnant les différentes issues possibles, on voit que la somme « 2 » apparaît une fois sur les 36 (en tout) ; par conséquent, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{1}{36}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=12$.
- La somme « 3 » apparaî deux fois sur les 36 (en tout) ; donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=11$.
- La somme « 4 » apparaît trois fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=10$.
- La somme « 5 » apparaît quatre fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=9$.
- La somme « 6 » apparaît cinq fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=6)=\frac{5}{36}$. Il en est de même pour $\mathrm{X}=8$.
- La somme « 7 » apparaît six fois donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Définition

Loi de probabilité

La donnée du tableau de probabilités précédent est la `loi de probabilité` de la variable aléatoire X.
Si $\mathrm{X} = \left\{x_i\right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors la loi de probabilité de X est la donnée de $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} = x_i\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition

Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit $\mathrm{X} = \left\{x_i\right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète. Notons $p_i = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} = x_i\right)$.
On appelle `espérance mathématique de X` le nombre défini par :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n\ .$$

Exemple

Reprenons l'activité précédente et la loi de probabilité de X. Alors,

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \cdots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = 7}$$

Remarque

Le calcul de l'espérance mathématique ressemble à celui de la moyenne d'une série statistique.
En effet, l'espérance peut être considérée comme la « valeur moyenne » de la variable aléatoire si on répète l'expérience un grand nombre de fois.
Par exemple ici, si on lance 10 000 fois les deux dès, on peut espérer avoir une somme égale à « 7 » un grand nombre de fois.