

Interrogation d'entraînement sur le second degré

pour Hugo

8 novembre 2015

Exercice 1.

20 minutes

Pour chacun des polynômes suivants,

- résoudre l'équation $P(x) = 0$;
- quand cela est possible, factoriser $P(x)$;
- résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

1. $P(x) = 2x^2 - 16x + 30$

2. $P(x) = 8x^2 - 3x + 1$

3. $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 18$

Exercice 2.

15 minutes

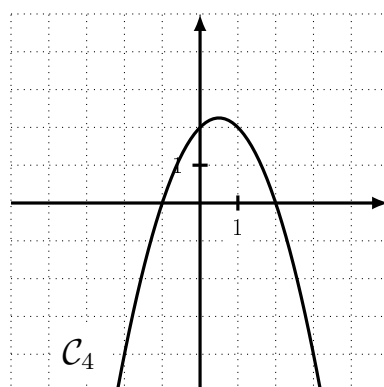
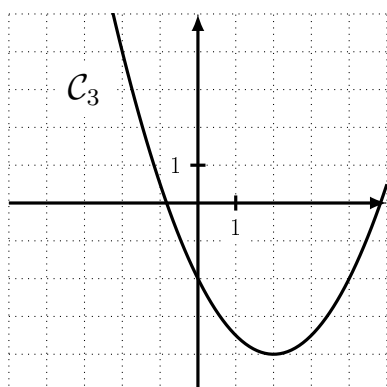
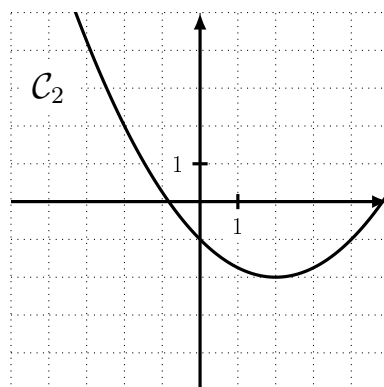
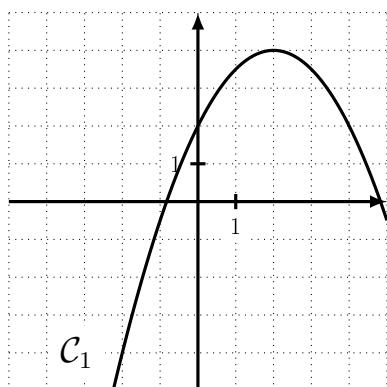
Associer les fonctions suivantes aux paraboles ci-dessous, puis donner la forme canonique de chacune d'elles.

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 1$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$$

$$k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$$



Exercice 3.*15 minutes*

Une entreprise de fabrication de montres estime que ses coûts de fabrication mensuels peuvent être représentés par la fonction C définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$C(q) = -0,2q^2 + 1,2q + 2,$$

où q est exprimé en dizaines et $C(q)$ en milliers d'euros.

L'entreprise vend 1 montre à 30 €. On appelle CA la fonction définie sur $[0; +\infty[$ représentant le chiffre d'affaire de cette entreprise, CA étant exprimé en milliers d'euros.

1. Expliquer pourquoi $CA(q) = 0,3q$.
2. Tracer à la calculatrice les fonctions C et CA , puis donner une estimation de l'abscisse du point d'intersection (arrondie au dixième) des deux courbes représentatives.
3. Calculer une valeur approchée du nombre de montres que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice.

Exercice 4.*15 minutes*

On considère le polynôme P suivant :

$$P(x) = 10x^3 + 9x^2 - 13x - 6.$$

1. Montrer que 1 est une racine de $P(x)$.
2. On peut alors écrire $P(x)$ sous la forme factorisée : $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
 - (a) Développer cette expression factorisée et montrer que l'on obtient :

$$P(x) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

- (b) Identifier alors les coefficients de chaque terme en x^n , puis en déduire les valeurs de a , b et c .
3. Déterminer une factorisation de $P(x)$ comme produit de trois polynômes de degré 1 dont les coefficients sont tous entiers.

Correction

Exercice 1.

1. $P(x) = 2x^2 - 16x + 30$.

Le discriminant de ce polynôme est :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-16)^2 - 4 \times 2 \times 30 \\ &= 16 > 0\end{aligned}$$

donc P admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 - \sqrt{16}}{2 \times 2} = 3$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 + \sqrt{16}}{2 \times 2} = 5.$$

Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont donc $x = 3$ et $x = 5$.

D'après le cours, si $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 , alors il se factorise sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ainsi, $P(x) = 2(x - 3)(x - 5)$.

De plus, toujours d'après le cours, si $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes, alors $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines. Donc ici, $P(x) \geq 0$ est positif pour $x \in]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$.

L'ensemble solution de l'inéquation $P(x) \geq 0$ est donc $]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$.

2. $P(x) = 8x^2 - 3x + 1$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 8 \times 1 = -23 < 0$ donc P n'admet aucune racine ni aucune factorisation.

De plus, il est toujours du signe de a , soit ici positif.

Donc l'ensemble solution de l'inéquation $P(x) \geq 0$ est $\mathbb{R}$.

3. $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x - 18$. $\Delta = 6^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-18) = 0$.

Donc P admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-1}$ soit $x_0 = 6$.

Il se factorise alors sous la forme : $\boxed{P(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2}$ car d'après le cours, si x_0 est l'unique racine de $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors $P(x) = a(x - x_0)^2$.

De plus, il est toujours du signe de a donc l'ensemble solution de l'inéquation $P(x) \geq 0$ est ici $\mathcal{S} = \emptyset$ car $a < 0$.

Exercice 2.

— $f(0) = 2$, ce qui élimine $\mathcal{C}_2$ (car son point d'intersection avec l'axe des ordonnées est -1 , et non 2) et $\mathcal{C}_3$.

On voit de plus que $\mathcal{C}_4$ coupe l'axe des abscisses en $x = 2$, et $f(2) = -4 + 2 + 2 = 0$ donc $\mathcal{C}_4$ correspond bien à f .

La forme canonique de $f(x)$ est $a(x - \alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ donc ici, $\alpha = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$ et
 $\beta = f(\alpha) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \frac{9}{4}$.

La forme canonique de $f(x)$ est $\boxed{f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$.

— $g(0) = -1$ donc seule $\mathcal{C}_2$ peut correspondre à g .

On voit que l'axe de symétrie de la courbe est $\alpha = 2$ et que le minimum est $\beta = -2$

donc la forme canonique de $g(x)$ est $\boxed{g(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 2}$.

— $h(0) = 2$ donc $\mathcal{C}_1$ correspond à h .

L'axe de symétrie de la courbe est $\alpha = 2$ et le maximum est $\beta = 4$ donc $\boxed{h(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 4}$.

— Il ne reste plus que $\mathcal{C}_3$ pour k ($k(0) = -2$ donc on ne se trompe pas).

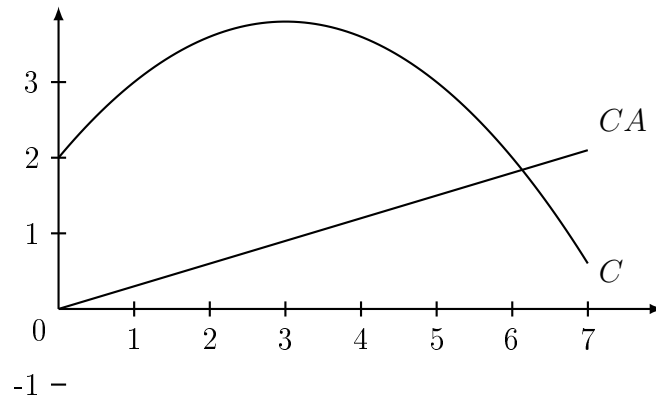
L'axe de symétrie de la courbe est $\alpha = 2$ et le minimum est $\beta = -4$ donc $\boxed{k(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 4}$.

Exercice 3.

1. Le prix d'une montre est 30 €. Ainsi, pour 10 montres, l'entreprise gagnera 300 €, et donc q dizaines de montres rapporteront $300q$ €. CA étant exprimé en milliers d'euros, on divise ce dernier résultat par 1000 et on obtient :

$$CA(q) = \frac{300q}{1000} = 0,3q.$$

2. À la calculatrice, on trace la courbe représentative des deux fonctions C et CA :



On peut donc estimer à environ 6,1 l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

3. Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que $CA(q) > C(q)$.

$$\begin{aligned} CA(q) > C(q) &\iff 0,3q > -0,2q^2 + 1,2q + 2 \\ &\iff -0,2q^2 + 1,2q - 0,3q + 2 < 0 \\ &\iff -0,2q^2 + 0,9q + 2 < 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $-0,2q^2 + 0,9q + 2$ est :

$$\Delta = 0,9^2 - 4 \times (-0,2) \times 2 = 2,41$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$q_1 = \frac{-0,9 - \sqrt{2,41}}{-0,4} \approx 6,13$$

et

$$q_2 = \frac{-0,9 + \sqrt{2,41}}{-0,4} \approx -1,63 \text{ (ce qui ne nous intéresse pas car étant négatif).}$$

q_1 correspond à plus de 61 montres donc l'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle vend au moins 62 montres.

Exercice 4.

1. $P(1) = 10 \times 1^3 + 9 \times 1^2 - 13 \times 1 - 6 = 19 - 19 = 0.$

Donc 1 est bien une racine de P (car son image est égale à 0).

2. (a) $(x-1)(ax^2 + bx + c)$
 $= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$ (on utilise la distributivité)
 $= ax^3 + bx^2 - ax^2 + cx - bx - c$ (on regroupe les termes de même degré)
 $= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ (on regroupe les coefficients)

(b) On doit donc avoir pour tout réel x :

$$P(x) = 10x^3 + 9x^2 - 13x - 6 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

soit :

$$\begin{cases} 10 &= a \\ 9 &= b - a \\ -13 &= c - b \\ -6 &= -c \end{cases}$$

On en déduit donc que $a = 10$ (première équation) et $c = 6$ (dernière équation).
Ainsi, de la deuxième équation, on peut écrire $9 = b - 10$, soit $b = 9 + 10 = 19$.

Finalement, $P(x) = (x-1)(10x^2 + 19x + 6)$.

3. Le discriminant du polynôme $10x^2 + 19x + 6$ est :

$$\Delta = 19^2 - 4 \times 10 \times 6 = 121 = 11^2$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-19 - 11}{2 \times 10} = -\frac{3}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-19 + 11}{20} = -\frac{2}{5}.$$

Ainsi, $10x^2 + 19x + 6 = \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{2}{5}\right) = (2x + 3)(5x + 2).$

Finalement, $P(x) = (x-1)(2x+3)(5x+2)$.