

Exercice 1 (nombres complexes)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $b = 3 - i$.

On définit alors pour tout entier naturel n la suite (z_n) par :

$$z_0 = a \quad ; \quad z_{n+1} = az_n + b$$

1. Écrire a sous la forme exponentielle.

Pour tout entier naturel n , on définit la suite (u_n) par :

$$u_n = z_n - 4 - 2i$$

3. Montrer que (u_n) est géométrique.
Préciser alors sa raison et son premier terme.
4. Exprimer u_n puis z_n en fonction de n .
5. Quelle est la limite de (z_n) ?

Exercice 2 (probabilités)

On donnera les valeurs approchées des probabilités à 0,001 près.

Lors d'un jeu télévisé, un candidat doit choisir au hasard un des trois thèmes proposés : Littérature, Sciences et Culture générale.

Il sait que la probabilité de répondre correctement à une question du thème choisi est égale à :

- 0,4 si le thème est « Littérature » ;
- 0,9 si le thème est « Sciences » ;
- 0,5 si le thème est « Culture générale ».

On note :

- L l'événement : « le candidat choisit le thème Littérature » ;
- S l'événement : « le candidat choisit le thème Sciences » ;
- C l'événement : « le candidat choisit le thème Culture générale » ;
- R l'événement : « le candidat répond correctement à la question ».

1. Montrer que $P(R) = 0,6$.
2. Le candidat répond correctement à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le thème « Sciences » ?
3. Sur cinq questions, quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à au moins 3 d'entre elles ?

Exercice 3 (étude de fonction)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$$

1. Montrer que g est strictement croissante.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $[1; 2]$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$$

1. Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
2. Montrer que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$, puis en déduire les variations de f .

Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \alpha \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $u_1 = \alpha e^\alpha$, puis que $u_1 > u_0$.
2. Montrer par récurrence que (u_n) est strictement croissante.
3. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.