

INTÉGRALE DE GAUSS

PARTIE A

Dans cette partie, k est un réel strictement supérieur à 1.

1. On considère la fonction ϕ_k définie sur $[0; k[$ par :

$$\phi_k : x \mapsto x + (k-1) \ln\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

- (a) En étudiant les variations de ϕ_k , montrer qu'il existe une unique valeur r dans $]1; k[$ telle que $\phi_k(r) = 0$.
 (b) En déduire le signe de $\phi_k(x)$ sur $[0; k[$.
 2. A l'aide de la fonction ϕ_k , montrer que l'équation :

$$e^{-x} = \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{k-1}$$

admet $x = r$ comme unique solution sur $[0; k[$.

3. On considère la fonction φ_k définie sur $[0; k[$ par :

$$\varphi_k : x \mapsto e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$$

- (a) Montrer que $\varphi_k(x) \geq 0$ sur $[0; k[$.
Indication : utiliser l'inégalité $e^{-u} \geq 1 - u$ pour $u \in [0; 1]$ et la croissance de la fonction $v \mapsto v^k$.
 (b) Calculer $\varphi'_k(x)$.
 (c) Montrer que $\varphi'_k(r) = 0$ et en déduire le signe de $\varphi'_k(x)$ sur $[0; k[$.
 (d) Montrer que :

$$\varphi_k(r) = \frac{r}{k} \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{k-1}$$

4. On considère la fonction Ψ_k définie sur $]0; 1[$ par :

$$\Psi_k : x \mapsto x(1-x)^{k-1}$$

- (a) Montrer que pour tout x de $]0; 1[$:

$$|\Psi_k(x)| \leq \Psi_k\left(\frac{1}{k}\right)$$

- (b) En déduire que pour tout x de $]0; 1[$:

$$|\Psi_k(x)| \leq \frac{1}{k}$$

Indication : utiliser la croissance sur $[0; 1]$ de la fonction $u \mapsto u^{k-1}$.

5. A l'aide des variations de la fonction φ_k , montrer que pour tout x de $]0;k[$:

$$|\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{k}$$

Indication : $\varphi_k(r) = \Psi_k\left(\frac{r}{k}\right)$.

6. (a) Déduire de la question précédente que pour tout réel x de $[0;\sqrt{k}[$, on a :

$$\left| e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{k}\right)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

(b) En déduire que pour tout x de $[0;1]$, on a :

$$\left| e^{-kx^2} - (1 - x^2)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

7. Déduire de tout ce qui précède que pour tout réel k strictement supérieur à 1, on a :

$$\left| \sqrt{k} \int_0^1 e^{-kx^2} dx - \sqrt{k} \int_0^1 (1 - x^2)^k dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

PARTIE B

On considère les suites définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^1 e^{-nx^2} dx \quad \text{et} \quad \begin{cases} J_0 = 1 \\ J_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

Indication : considérer, en justifiant son existence, une primitive F de $x \mapsto e^{-x^2}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\left| \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx - \sqrt{n} J_n \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul :

$$J_n = \left(\frac{2n}{2n+1} \right) J_{n-1}$$

(b) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$J_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

On rappelle que $n! = 2 \times 3 \times \dots \times n$.

PARTIE C

1. On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} W_0 = \frac{\pi}{2} \\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Calculer W_1 .
- (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$W_n = \left(\frac{n-1}{n} \right) W_{n-2}$$

- (c) En déduire que pour tout entier naturel n , $W_n > 0$.

2. On considère les deux suites définies pour tout entier naturel n par :

$$A_n = W_{2n} \quad \text{et} \quad B_n = W_{2n+1}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$A_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Indication : à l'aide de la question 1, montrer que les suites (A_n) et (B_n) vérifient une relation de récurrence d'ordre 1.

3. On considère la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$P_n = nW_n W_{n-1}$$

- (a) Montrer que cette suite est constante et préciser sa valeur.

Indication : exprimer P_n en fonction de P_{n-1} à l'aide de la relation de récurrence obtenue à la question précédente.

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$A_n B_n = \frac{\pi}{4n+2}$$

- (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$(nB_n)^2 \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pi n}{4n+2}$$

- (d) Déduire de tout ce qui précède que pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{n} B_n = \sqrt{\frac{B_n}{A_n} \times \frac{\pi n}{4n+2}}$$

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$(\cos x)^{2n+2} \leq (\cos x)^{2n+1} \leq (\cos x)^{2n}$$

Indication : on pourra étudier le signe de $\sigma_p : x \mapsto (\cos x)^p - (\cos x)^{p+1}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, où $p \in \mathbb{N}$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \quad \text{puis} \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} \leq \frac{B_n}{A_n} \leq 1$$

5. (a) Simplifier $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ puis en déduire la valeur de : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{A_n}$.

- (b) Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}B_n$ puis celle de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}J_n$.

- (c) En déduire alors la valeur de $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x^2} dx$.

CORRECTION

PARTIE A

1. (a) La fonction Φ_k est dérivable sur $[0; k[$ comme somme d'une fonction polynôme ($x \mapsto x$) et d'une fonction logarithme définie sur cet intervalle ($x \mapsto (k-1)\ln\left(1 - \frac{x}{k}\right)$).

Sa dérivée est $\Phi'_k(x) = 1 + (k-1) \times \frac{-\frac{1}{k}}{1 - \frac{x}{k}} = 1 + \frac{1-k}{k-x} = \frac{k-x+1-k}{k-x} = \frac{1-x}{k-x}$.

Sur $[0; k[$, $k-x > 0$ et $k > 1$ donc $1-x > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Ainsi, Φ_k est croissante sur $[0; 1[$ et décroissante sur $]1; k[$; elle atteint donc donc maximum en $x = 1$, qui est $\Phi_k(1) = 1 - (k-1)\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) > 1 > 0$.

De plus, $\Phi_k(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow k} \Phi_k(x) = -\infty$ (en effet, $\lim_{x \rightarrow k} \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$; de plus $k-1 > 0$). On a alors le tableau de variations suivant :

x	0	1	k
$\Phi_k(x)$	0	$\Phi_k(1) > 0$	$-\infty$

Ainsi, d'après le *théorème de la bijection*, il existe un unique réel r dans $]1; k[$ tel que $\Phi_k(r) = 0$.

- (b) De ce qui précède, nous pouvons affirmer que :

- Pour $0 \leq x \leq r$, $\Phi_k(x) \geq 0$.
- Pour $r < x < k$, $\Phi_k(x) < 0$.

2. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 0 \leq x < k, e^{-x} &= \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{k-1} && \iff e^{-x} = e^{(k-1)\ln\left(1 - \frac{x}{k}\right)} \\
 &&& \iff -x = (k-1)\ln\left(1 - \frac{x}{k}\right) && \text{car } e^a = e^b \iff a = b \\
 &&& \iff \Phi_k(x) = 0 \\
 &&& \iff x = r && \text{d'après la question 1.}
 \end{aligned}$$

3. (a) Pour $0 \leq u \leq 1$, on a l'inégalité : $e^{-u} \geq 1 - u$. Or, pour $0 \leq x < k$, $0 \leq 1 - \frac{x}{k} < 1$ donc $e^{-\frac{x}{k}} \geq 1 - \frac{x}{k}$. Ainsi, en composant par la fonction $v \mapsto v^k$, croissante sur $[0; 1]$, on a :

$$\left(e^{-\frac{x}{k}}\right)^k \geq \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$$

D'où :

$$e^{-x} \geq \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$$

Ainsi, $\varphi_k(x) \geq 0$ pour $x \in [0; k[$.

- (b) La fonction φ_k est dérivable sur $[0; k[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction exponentielle inverse $x \mapsto e^{-x}$, et la fonction polynôme $x \mapsto \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k$).
Sa dérivée est :

$$\varphi'_k(x) = -e^{-x} - k \times \left(-\frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{k-1}$$

Soit :

$$\boxed{\varphi'_k(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{k}\right)^{k-1}}$$

(c) $\varphi'_k(r) = -e^{-r} + \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{k-1}$.

De plus, $\Phi_k(r) = 0$ (d'après la question 1) donc nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi_k(r) = 0 &\iff r + (k-1)\ln\left(1 - \frac{r}{k}\right) = 0 \\ &\iff (k-1)\ln\left(1 - \frac{r}{k}\right) = -r \\ &\iff e^{(k-1)\ln\left(1 - \frac{r}{k}\right)} = e^{-r} \\ &\iff \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{k-1} = e^{-r} \\ &\iff \boxed{\varphi'_k(r) = 0} \end{aligned}$$

Du raisonnement que l'on vient de faire, nous pouvons écrire : $\varphi'_k(x) \geq 0 \iff \Phi_k(x) \geq 0$. Ainsi :

- Si $0 \leq x \leq r$, alors $\varphi'_k(x) \geq 0$.
- Si $r < x < k$, alors $\varphi'_k(x) < 0$.

(d) D'après la question 2, $e^{-r} = \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{k-1}$.

Ainsi :

$$\varphi_k(r) = \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{k-1} - \left(1 - \frac{r}{k}\right)^k$$

Soit, en factorisant :

$$\varphi_k(r) = \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{k-1} \left(1 - 1 + \frac{r}{k}\right)$$

Soit :

$$\boxed{\varphi_k(r) = \frac{r}{k} \left(1 - \frac{r}{k}\right)^{k-1}}$$

4. (a) La fonction Ψ_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et sa dérivée est :

$$\Psi'_k(x) = 1 \times (1-x)^{k-1} + x \times (k-1) \times (-1) \times (1-x)^{k-2}$$

$$\Psi'_k(x) = (1-x)^{k-2} [1-x - (k-1)x]$$

$$\Psi'_k(x) = (1-x)^{k-2} (1-kx)$$

Ainsi, sur $]0; 1[$, $\Psi'_k(x) \geq 0 \iff 1-kx \geq 0$, soit $x \leq \frac{1}{k}$, car pour tout x dans $]0; 1[$, $1-x \geq 0$, donc $(1-x)^{k-2} \geq 0$.

On a ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{k}$	1
$\Psi_k(x)$	0	$\Psi_k\left(\frac{1}{k}\right)$	0

Ainsi, pour $x \in]0; 1[$, $\Psi_k(x) \leq \Psi_k\left(\frac{1}{k}\right)$, ce qui revient à écrire :

$$|\Psi_k(x)| \leq \Psi_k\left(\frac{1}{k}\right)$$

(b) $\Psi_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1}$.

De plus, $k > 1$ donc :

$$0 < 1 - \frac{1}{k} < 1$$

Ainsi,

$$0 < \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} < 1 \quad \text{car la fonction } u \mapsto u^{k-1} \text{ est croissante sur }]0; 1[$$

et donc

$$0 < \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} < \frac{1}{k}$$

Ainsi, du résultat de la question précédente, nous pouvons écrire :

$$x \in]0; 1[\implies |\Psi_k(x)| \leq \frac{1}{k}$$

5. De la question 3.(c) et de la remarque faite dans l'énoncé - à savoir que $\varphi_k(r) = \Psi_k\left(\frac{r}{k}\right)$, nous pouvons écrire :

x	0	r	k
$\varphi_k(x)$	0	$\Psi_k\left(\frac{r}{k}\right)$	e^{-k}

Ainsi, pour $x \in [0; k[$:

$$|\varphi_k(x)| \leq \Psi_k\left(\frac{r}{k}\right) \quad (1)$$

Or, $0 < \frac{r}{k} < 1$ donc, d'après la question 4.(b) :

$$\Psi_k\left(\frac{r}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on a :

$$|\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{k}$$

6. (a) De la question précédente, on peut écrire :

$$0 \leq y < k \implies \left| e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{k}\right)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

En posant $y = x^2$, cela devient :

$$0 \leq x^2 < k \implies \left| e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{k}\right)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

Soit :

$$0 \leq x < \sqrt{k} \implies \left| e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{k}\right)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

(b) Considérons le résultat de la question précédente et posons $x = \sqrt{k}z$. On obtient alors :

$$0 \leq \sqrt{k}z < \sqrt{k} \implies \left| e^{-(\sqrt{k}z)^2} - \left(1 - \frac{(\sqrt{k}z)^2}{k}\right)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

Soit :

$$0 \leq z < 1 \implies \left| e^{-kz^2} - (1 - z^2)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

En nommant l'inconnue x à la place de z , on obtient finalement :

$$0 \leq x < 1 \implies \left| e^{-kx^2} - (1 - x^2)^k \right| \leq \frac{1}{k}$$

7. Pour tout $k > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{k} \int_0^1 e^{-kx^2} dx - \sqrt{k} \int_0^1 (1 - x^2)^k dx \right| &= \left| \sqrt{k} \int_0^1 (e^{-kx^2} - (1 - x^2)^k) dx \right| \\ &= \sqrt{k} \left| \int_0^1 (e^{-kx^2} - (1 - x^2)^k) dx \right| \\ &\leq \sqrt{k} \int_0^1 |e^{-kx^2} - (1 - x^2)^k| dx \\ &\leq \sqrt{k} \int_0^1 \frac{1}{k} dx \quad \text{d'après la question 6.(b)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

PARTIE B

1. (a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, comme composée de la fonction exponentielle et de la fonction carrée. Ainsi, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

On pose $u = x\sqrt{n}$; ainsi, si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq u \leq \sqrt{n}$. De plus, $\frac{du}{dx} = \sqrt{n}$, soit

$$du = \sqrt{n} dx.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 e^{-(\sqrt{n}x)^2} \sqrt{n} dx = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

(b) D'après la question 7 de la partie A, en remplaçant k par n , on a $n \geq 2$ et :

$$\left| \sqrt{n} \int_0^1 e^{-kx^2} dx - \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^k dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Soit, d'après la question précédente :

$$\left| \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx - \sqrt{n} J_n \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

2. (a) On a :

$$J_n = \int_0^1 1 \times (1-x^2)^n dx$$

On pose alors $u'(x) = 1$, donc $u(x) = x$, et $v(x) = (1-x^2)^n$, et on a alors :

$$xv'(x) = 2n(-x^2)(1-x^2)^{n-1} = 2n(-1+1-x^2)(1-x^2)^{n-1} = -2n(1-x^2)^{n-1} + 2n(1-x^2)^n.$$

Ainsi :

$$J_n = \left[x(1-x^2)^n \right]_0^1 + 2nJ_{n-1} - 2nJ_n$$

Soit :

$$(2n+1)J_n = 2nJ_{n-1}$$

Ainsi :

$$J_n = \frac{2n}{2n+1} J_{n-1}$$

(b) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\ll J_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \gg$.

• **Initialisation.**

$$J_0 = 1 \text{ et } \mathcal{P}_0 : \frac{(2^0 0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = 1.$$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

• **Hypothèse de récurrence :** supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain rang n .

D'après la question 2.(a), on a :

$$J_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} J_n$$

$$J_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$J_{n+1} = \frac{2(n+1) \times (2n+2)}{(2n+3) \times (2n+2)} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$J_{n+1} = \frac{(2^{n+1}(n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

PARTIE C

1. (a) $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

(b) On peut écrire :

$$(\cos x)^n = (\cos x)^2 \times (\cos x)^{n-2} = (1 - (\sin x)^2) \times (\cos x)^{n-2} = (\cos x)^{n-2} - (\sin x)^2 (\cos x)^{n-2}$$

Ainsi :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x (\cos x)^{n-2}) \sin x dx$$

En posant $u'(x) = \sin x (\cos x)^{n-2}$ et $v(x) = \sin x$ dans la seconde intégrale, on a alors $u(x) = -\frac{1}{n-1} (\cos x)^{n-1}$ et $v'(x) = \cos x$. D'où :

$$W_n = W_{n-2} - \left(\left[-\frac{1}{n-1} \sin x (\cos x)^{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx \right)$$

Soit :

$$W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1} W_n$$

D'où :

$$\frac{n}{n-1} W_n = W_{n-2}$$

Ainsi :

$$\boxed{W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}}$$

(c) $W_0 > 0$ et donc, d'après la question précédente, pour tout entier naturel k non nul,

$$W_{2k} > 0 \text{ car } \frac{2k-1}{2k} > 0.$$

De plus, $W_1 > 0$ et donc, par un raisonnement analogue, $W_{2k+1} > 0$.

Ainsi, $W_n > 0$ pour tout entier naturel n .

2. On a : $A_n = W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n} A_{n-1}.$

Posons $\mathcal{P}_n : \ll A_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \gg.$

• **Initialisation.**

$$A_0 = W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \mathcal{P}_0 : A_0 = \frac{\pi}{2} \times \frac{0!}{1 \times (0!)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

L'initialisation est alors faite.

- **Hypothèse de récurrence.**

Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain rang n . Alors :

$$A_{n+1} = W_{2n+2} = \frac{2n+2-1}{2n+2} W_{2n} \quad \text{d'après la question 1.}$$

Donc :

$$A_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

Soit :

$$A_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)! \times (2n+2)}{4^n (n!)^2 \times 2(n+1) \times 2(n+1)}$$

Ainsi :

$$A_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2}$$

L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Posons maintenant $\mathcal{Q}_n : \ll B_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \gg$.

$$B_n = W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} B_{n-1}.$$

- **Initialisation.**

$$B_0 = W_1 = 1 \text{ et } \mathcal{Q}_0 : B_0 = \frac{(1 \times 0!)^2}{1!} = 1.$$

L'initialisation est alors faite.

- **Hypothèse de récurrence.**

Supposons que $\mathcal{Q}_n$ soit vraie pour un certain rang n . Alors :

$$B_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} B_n = \frac{2(n+1)}{2n+3} \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2^n n!)^2 \times 2(n+1) \times 2(n+1)}{(2n+1)! \times (2n+2) \times (2n+3)}$$

Finalement :

$$B_{n+1} = \frac{(2^{n+1} (n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

L'hérédité est alors vérifiée ; la propriété $\mathcal{Q}_n$ est alors vraie pour tout entier naturel n .

3. (a) On a : $P_n = n W_n W_{n-1} = n \frac{n-1}{n} W_{n-2} \times \frac{n-2}{n-1} W_{n-3} = (n-2) W_{n-2} W_{n-3} = P_{n-2}$.
De plus, $P_0 = 0$ et $P_1 = W_1 W_0 = 0$. Ainsi, la suite (P_n) est constante et vaut 0.

- (b) D'après la question 2, on a :

$$A_n B_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)! \times (2^n n!)^2}{4^n (n!)^2 (2n+1)!} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2n+1} = \boxed{\frac{\pi}{4n+2}}$$

- (c) On a :

$$(n B_n^2) \frac{A_n}{B_n} = n A_n B_n = \frac{n\pi}{4n+2} \quad \text{d'après la question précédente}$$

(d) De la question (c), on déduit :

$$\sqrt{(nB_n^2) \frac{A_n}{B_n}} = \sqrt{\frac{n\pi}{4n+2}}$$

Soit :

$$\boxed{\sqrt{n}B_n = \sqrt{\frac{B_n}{A_n} \times \frac{n\pi}{4n+2}}}$$

4. (a) Posons $\sigma_p(x) = (\cos x)^p(1 - \cos x)$ sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 Sur I , $0 \leq \cos x \leq 1$ donc $0 \leq (\cos x)^p \leq 1$ et $0 \leq 1 - \cos x \leq 1$ pour tout entier naturel p .
 Ainsi, $(\cos x)^{p+1} \leq (\cos x)^p$ pour tout entier naturel p d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], (\cos x)^{2n+2} \leq (\cos x)^{2n+1} \leq (\cos x)^{2n}}$$

(b) Des inégalités précédentes, on peut déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+2} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} dx$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}}$$

On en déduit alors que pour tout entier naturel n :

$$\frac{W_{2n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{2n+1}}{W_n} \leq 1 \quad \text{car } W_n > 0$$

Or, $W_{2n+2} = W_{2(n+1)} = A_{n+1}$ et $W_{2n+1} = B_n$ d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{A_{n+1}}{A_n} \leq \frac{B_n}{A_n} \leq 1}$$

5. (a) D'après la question 2, on a :

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(2(n+1))! \times 4^n (n!)^2}{4^{n+1} ((n+1)!)^2 \times (2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 \quad \text{rapport des termes de plus haut degré}$$

Par conséquent, d'après la question 4.(b), en utilisant le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{A_n} = 1}$$

(b) D'après la question 3.(d), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} B_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{B_n}{A_n} \times \frac{n\pi}{4n+2}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} B_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'après la question 2 de la partie C et la question 2.(b) de la partie B, $B_n = J_n$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(c) D'après la question 1.(b) de la partie A, pour $n \geq 2$:

$$\left| \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx - \sqrt{n} J_n \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx - \sqrt{n} J_n \right| = 0$$

Soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{d'après la question précédente}$$

Finalement, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Remarque. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est une *intégrale de Gauss*. Elle est notamment utilisée en statistiques (loi normale centrée réduite).

A l'aide du résultat obtenu ici, on peut déterminer la fonction de densité f de sorte à ce que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

En effet, on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1$ et donc, en posant $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$, on a : $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du$ et on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$.

