

Exercice 1. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f_n(x) = x^n \ln(x) - x.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer que f_n admet un minimum pour une même valeur de x , quel que soit l'entier n .

1. Montrer que $f'_n(x) = x^{n-1}(n \ln(x) + 1) - 1$.
2. On admet que la dérivée de $f'_n(x)$ est :

$$f''_n(x) = x^{n-2}[n(n-1) \ln(x) + 2n - 1].$$

- (a) Étudier le signe de $f''_n(x)$ sur $]0; +\infty[$ en fonction de n , puis en déduire les variations de f'_n sur $]0; +\infty[$.
- (b) Calculer $f'_n(1)$, puis en déduire les variations de $f_n(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- (c) En déduire que $f_n(x)$ admet un minimum pour une unique valeur de x , quelle que soit la valeur de n .
Que vaut ce minimum ?

Exercice 2. Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A_n d'affixe z_n où, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} z_0 &= 1 + i \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}iz_n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer z_1 , puis $|z_1|$ et $\arg(z_1)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = \frac{1}{5} \left[4 + 2i + (1 + 3i) \left(\frac{1}{2}i \right)^n \right].$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$|z_n| \leq \frac{1}{5} (2\sqrt{5} + \sqrt{10}).$$

Comment peut-on interpréter ce dernier résultat géométriquement ?

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ par:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 2}.$$

1. Montrer que $f(x) = e^x + 2 + \frac{3}{e^x - 2}$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow \ln 2 \\ x < \ln 2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \ln 2 \\ x > \ln 2}} f(x)$.
4. Montrer que $f'(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 4e^x + 1)}{(e^x - 2)^2}$.
5. En déduire les variations de f .
6. Déterminer une valeur approchée au millième du réel a telle la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a soit parallèle à la droite d'équation $y = 5x$.

Vous expliquerez votre démarche.