

Mathématiques.

Épreuve orale du second groupe.

L'épreuve orale est constituée d'une préparation d'une vingtaines de minutes suivie d'un entretien de même durée.

Les questions proposées constituent une base d'argumentation pour l'entretien :

- sauf indication contraire, la calculatrice est autorisée ;
- pendant la préparation, il est souhaitable d'aborder toutes les questions du sujet ;
- vous préparerez des réponses que vous devez être capable de justifier oralement (il est inutile de les rédiger complètement par écrit) ;
- la pertinence des réponses et l'évaluation des connaissances lors du questionnement oral seront prises en compte ;
- des questions complémentaires peuvent vous être posées au cours de l'entretien.

Sujet 1

Exercice 1

- 1) Faire apparaître à l'écran d'une calculatrice les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$.
- 2) Que peut-on conjecturer sur la position de ces deux courbes ?
- 3) Étudier le sens de variation de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - x$. Justifier la conjecture précédente.
- 4) A-t-on, pour tout réel x , $e^x \geq 3x$?

Exercice 2

On lance une pièce de monnaie équilibrée 10 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement six fois « pile ».

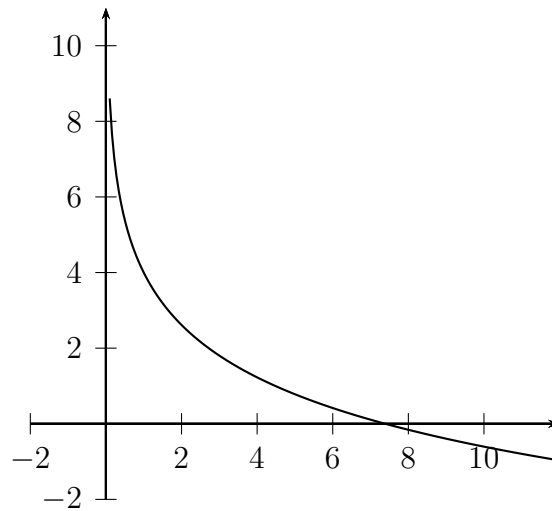
Sujet 2

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 4 - 2 \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f tracée ci-dessous.



- 1) Calculer la valeur exacte de chacune des images : $f(1)$, $f(e)$ et $f(e^2)$.
- 2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -2x \ln(x) + 6x.$$

- a. Montrer que g est une primitive de f .
- b. Calculer l'intégrale :

$$\int_1^{e^2} f(x) dx.$$

Exercice 2

On considère le nombre complexe $a = 1 + i\sqrt{3}$. Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes a^2 , a^3 et a^{1789} .

Sujet 3

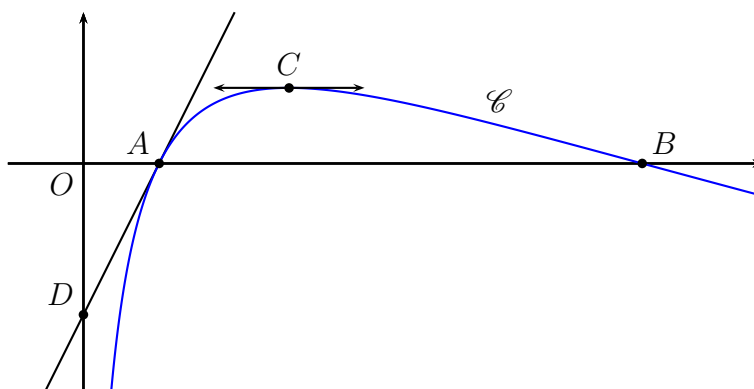
Exercice 1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x) \ln x.$$

La figure ci-dessous donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en A et en B .

La tangente en C à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en D .

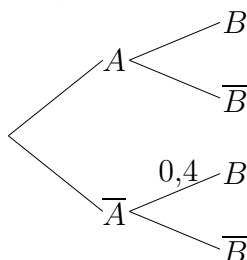


- 1) Déterminer les abscisses des points A et B (les valeurs exactes sont demandées).
- 2) On note f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$.
 - a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$.
 - b. Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).

Exercice 2

On admet que si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

- 1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous, sachant que les événements A et B sont indépendants et que $p(A \cap B) = 0,28$.



- 2) Calculer $p(A \cup B)$.

Sujet 4

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

- 1) Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a $1 \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{2}$.
- 2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

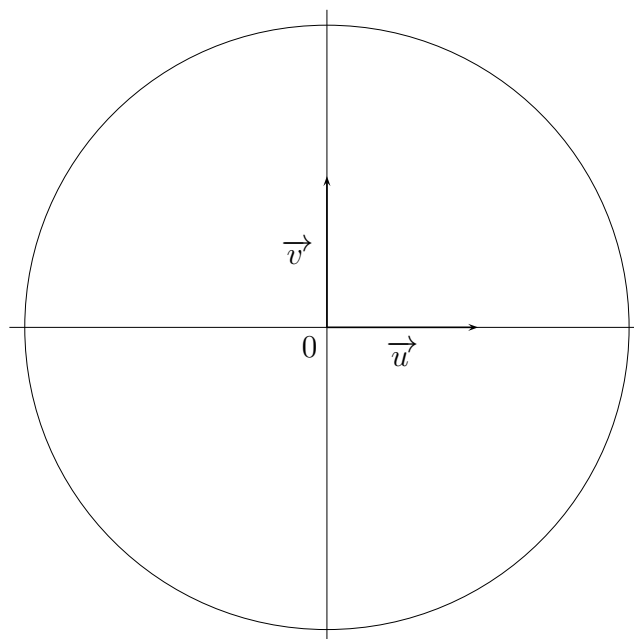
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

- 3) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ci-dessous, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

- 1) **a.** Démontrer que les points A , B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.
b. Placer les points A , B et C .
- 2) Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.
- 3) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan tels que $|z| = |z - 2|$.



Sujet 5

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite Δ passant par le point $A(2; -3; 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 2; 3)$.

- 1) Donner une représentation paramétrique de cette droite.
- 2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite Δ avec chacun des plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux courbes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'équations respectives

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}.$$

Justifier que les courbes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont la même tangente au point d'abscisse 1.

Sujet 6

Exercice 1

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle) de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

- 1) Sachant que $p(X \leq 10) = 0,714$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

- 2) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné deux années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à douze ans ?

Rappel.

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors pour $0 \leq a \leq b$, on a :

$$p(X \in [a; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

- 1) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
 - 2) La suite (u_n) est-elle convergente ?
-

Sujet 7

Exercice 1

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.

On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

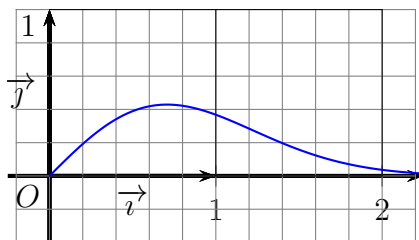
- 1) Quelle est la probabilité qu'exactly cinq des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-3} près.
- 2) Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-3} près.
- 3) Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-dessous.



- 1) Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.
- 2) Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a , l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Sujet 8

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

Exercice 2

Dans une classe, on a relevé les renseignements suivants :

	Porte des lunettes	Ne porte pas de lunettes
Garçon	6	4
Fille	6	14

On choisit au hasard un élève dans la classe. On note G l'événement : « l'élève est un garçon » et L l'événement : « l'élève porte des lunettes ».

- 1) Calculer $P(G)$, $P(G \cap L)$, $P(G \cup L)$ et $P_L(G)$.
 - 2) Les événements G et L sont-ils indépendants ?
-

Sujet 9

Exercice 1

- 1) On considère un réel x différent de 1 et un entier positif n .
Que vaut la somme : $1 + x + x^2 + \dots + x^n$?
- 2) Utiliser la formule précédente pour justifier que le nombre $a = 112^{31} - 1$ n'est pas premier.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	0,2	a	0,3	b	0,1

- 1) Sachant que $E(X) = -0,1$, calculer a et b .
 - 2) Calculer $p(X > 0)$.
-

Sujet 10

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

- 1) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe sur l'intervalle $] -1; +\infty[$.
- 2) Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$0,2$	a	$0,3$	b	$0,1$

- 1) Calculer a et b sachant que l'espérance de X est $E(X) = -0,1$.
 - 2) Calculer la variance de X .
-

Sujet 11

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x (e^x - 2).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

- 1) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
- 2) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer le point A où la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .

Exercice 2

Trois faces d'un dé cubique équilibré sont peintes en rouge, deux sont peintes en vert et la dernière est peintes en bleu. On lance successivement ce dé 3 fois.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir exactement :
 - a. aucune face verte ;
 - b. une fois une face verte ; deux fois une face verte ; trois fois une face verte.
- 2) On vous propose le jeu de hasard suivant utilisant le dé précédent. Les règles sont les suivantes :
 - vous payez 1,50 euro pour lancer le dé trois fois ;
 - vous gagnez 1 euro à chaque apparition d'une face verte.

Ce jeu vous est-il favorable ?

Sujet 12

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x (e^x - 2).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

- 1) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
- 2) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer le point A où la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation

$$u_{n+1} = au_n + 1 \quad (a \text{ réel non nul tel que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{1}{1-a}$.

- 1) Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a .
 - 2) En déduire que si a appartient à $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{1}{1-a}$.
-

Sujet 13

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = -2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)$.
- 2) On note R le point d'affixe 3, S le point d'affixe $4i$ et T le point d'affixe $3 - 4i$. L'ensemble des points M , dont l'affixe z vérifie $|z - 3| = |3 - 4i|$ est :

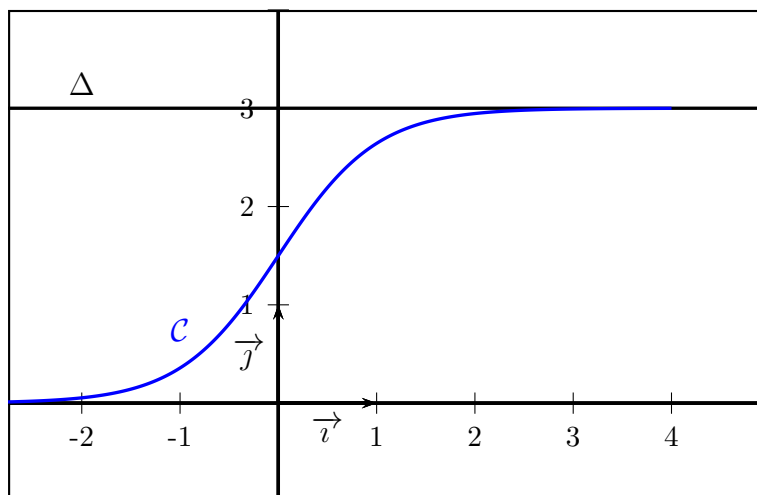
☐ La médiatrice du segment $[RT]$ ☐ La droite (RS) ☐ Le cercle de centre R et de rayon 3.		☐ Le cercle de centre T et de rayon 5. ☐ Le cercle de centre R passant par S . ☐ Le cercle de centre T passant par R .
--	--	---

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



- 1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
- 3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Sujet 14

Exercice 1

On considère les trois nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

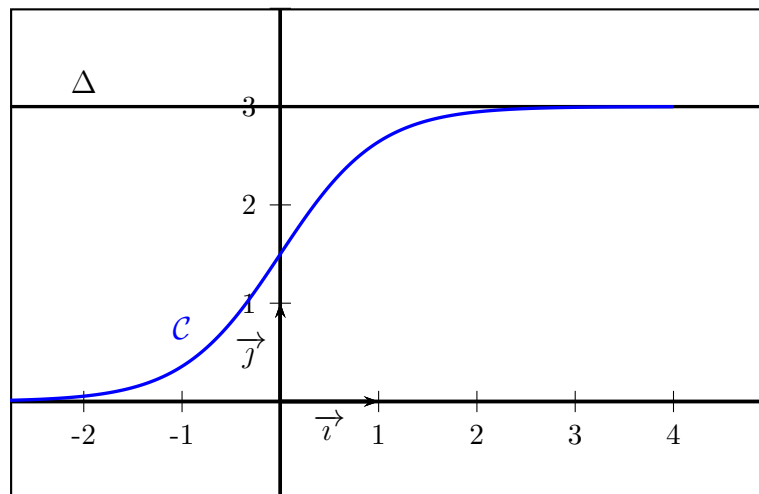
- 1) Écrire z_3 sous forme exponentielle.
- 2) Écrire z_3 sous forme algébrique.
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



- 1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
- 3) Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Sujet 15

Exercice 1

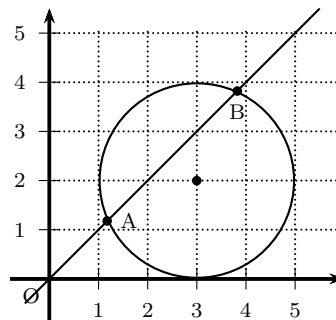
Pour chacune des deux assertions qui sont indépendantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z - 1| = |z - i| \quad \text{et} \quad |z - 3 - 2i| \leq 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3; 2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.

Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.

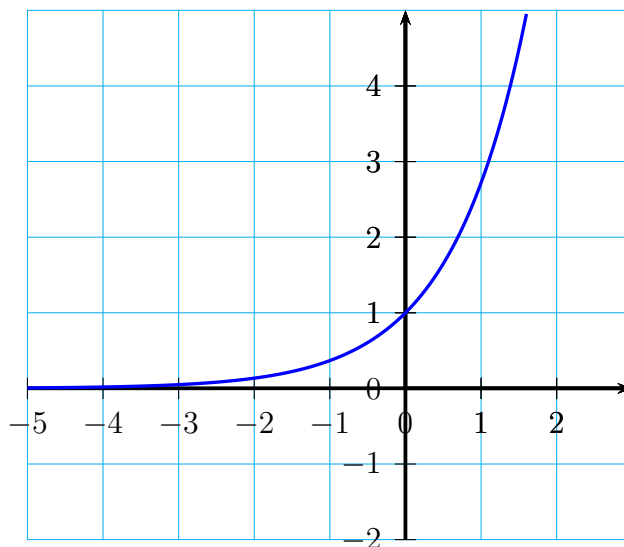


1. **Vrai ou faux ?** « l'ensemble S est le segment $[AB]$. »

2. **Vrai ou faux ?** « Le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ est un réel. »

Exercice 2

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1) Dans cette question, on choisit $m = e$.

Démontrer que la droite $\mathcal{D}_e$, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

2) Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.

3) Démontrer cette conjecture.

Sujet 16

Exercice 1

- 1) Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - i$.
- 2) Déterminer, pour tout réel θ , la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta}(1 - i)$.
- 3) Dédire des questions précédentes que, pour tout réel θ ,
 $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes. Toute réponse doit être justifiée.

- 1) On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

La suite (u_n) est-elle géométrique ?

- 2) Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.

On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n , $w_n = 1 - \ln(v_n)$.

La proposition $(\mathcal{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ?

$(\mathcal{P})$: si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.

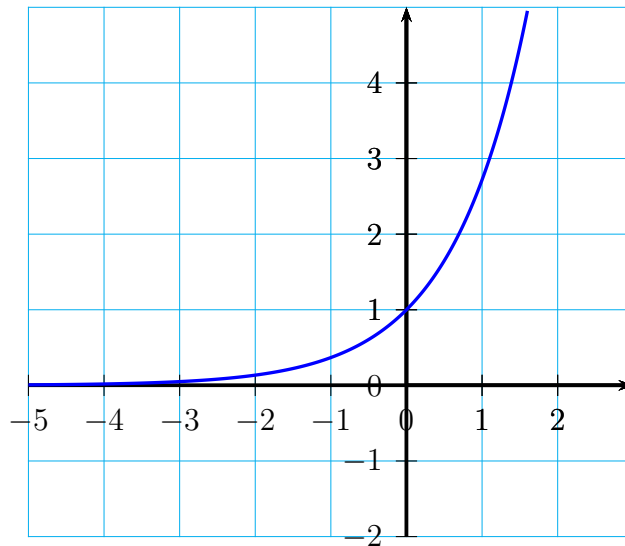
Sujet 17

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
Mettre ses solutions sous forme exponentielle.

Exercice 2

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

- 1) Dans cette question, on choisit $m = e$.
Démontrer que la droite $\mathcal{D}_e$, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.
- 2) Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.
- 3) Démontrer cette conjecture.

Sujet 18

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x (e^x - 2).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

- 1) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
- 2) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3) Déterminer le point A où la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses, puis une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A .

Exercice 2

On considère la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer D^2 , D^3 et D^4 . En déduire D^{-1} .

Sujet 19

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = -2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)$.
- 2) On note R le point d'affixe 3, S le point d'affixe $4i$ et T le point d'affixe $3 - 4i$. L'ensemble des points M , dont l'affixe z vérifie $|z - 3| = |3 - 4i|$ est :
- | | | |
|---|--|--|
| ☐ La médiatrice du segment $[RT]$ | | ☐ Le cercle de centre T et de rayon 5. |
| ☐ La droite (RS) | | ☐ Le cercle de centre R passant par S . |
| ☐ Le cercle de centre R et de rayon 3. | | ☐ Le cercle de centre T passant par R . |

Exercice 2

- 1) Donner la matrice carrée d'ordre 2 dont tous les termes $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ vérifient $a_{ij} = i + j$.
- 2) On considère la matrice $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer (si possible sans calculatrice) les entiers a et b tels que $E^{-1} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & b \end{pmatrix}$.

- 3) Traduire matriciellement le système d'équations linéaires ci-dessous et le résoudre à l'aide de la question précédente.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

Sujet 20

Exercice 1

On considère les trois nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- 1) Écrire z_3 sous forme exponentielle.
- 2) Écrire z_3 sous forme algébrique.
- 3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2

Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

- 1) « Quelles que soient deux matrices carrées A et B d'ordre 2, on a toujours $AB = BA$. »
- 2) « Si A est une matrice carrée, on a toujours l'identité remarquable :

$$(A + I)^2 = A^2 + 2A + I. \gg$$

- 3) « Quelle que soit une matrice réelle carrée F , son carré F^2 ne contient que des termes positifs ou nuls. »
-

Sujet 21

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = -2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \right)$.
- 2) On note R le point d'affixe 3, S le point d'affixe $4i$ et T le point d'affixe $3 - 4i$. L'ensemble des points M , dont l'affixe z vérifie $|z - 3| = |3 - 4i|$ est :
- | | |
|---|--|
| ☐ La médiatrice du segment $[RT]$ | ☐ Le cercle de centre T et de rayon 5. |
| ☐ La droite (RS) | ☐ Le cercle de centre R passant par S . |
| ☐ Le cercle de centre R et de rayon 3. | ☐ Le cercle de centre T passant par R . |

Exercice 2

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Calculez tous les produits possibles de deux de ces matrices.

Sujet 22

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
Mettre ses solutions sous forme exponentielle.

Exercice 2

- 1) Déterminer le plus petit entier naturel non nul p tel que $2^p \equiv 1 \pmod{5}$
 - 2) Démontrer alors que $1707^{1783} \equiv 3 \pmod{5}$.
 - 3) Démontrer que l'équation (E) : $19x^2 + 5y^7 = 1707^{1783}$ n'admet aucun couple d'entiers $(x; y)$ solution.
-