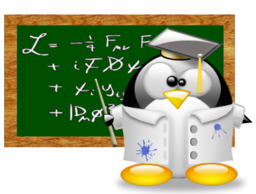
Généralités sur les fonctions

Stéphane PASQUET, 14 octobre 2016

Sommaire



Prérequis

- Dérivation (classe de 1re)
- Suites numériques

Propriété

Limites aux infinis

La notion de limite aux infinis pour les fonctions est la même que pour les suites numériques.

Propriété

La limite aux infinis d'une fraction rationnelle est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Démonstration

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P est un polynôme de degré n et Q, un polynôme de degré m.
Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \\ &= \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right)}{b_m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{x} + \frac{b_{m-2}}{x^2} + \cdots + \frac{b_0}{x^m}\right)} \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-2}}{x^2} = \cdots = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{b_{m-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{b_{m-2}}{x^2} = \cdots = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{b_0}{x^m} = 0.$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

■

Exemple

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 3}{-8x + 7}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2}{-8x}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{-4}\right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Définitions *Limite en un nombre fini, limite à droite, limite à gauche d'un nombre fini*

Soit a un nombre réel et soit f une fonction.

- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x très proche de a.
  On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x très proche de a.
  On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- On appelle `limite de` f `à droite de` a la limite de f lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a.
  On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.
- On appelle `limite de` f `à gauche de` a la limite de f lorsque x tend vers a par valeurs inférieures à a.
  On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

Remarques

- Lorsque a est une valeur interdite de f, il se peut que la limite à droite de a soit différente de celle à gauche. Par exemple, pour la fonction inverse :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

- Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, on écrira : $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

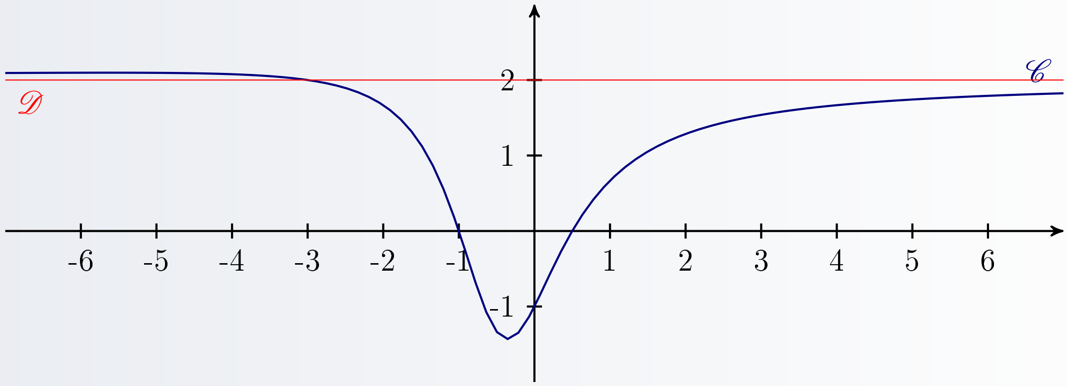
Propriété *Limites de fonctions usuelles en un nombre fini*

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n}}\right) = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x^{n}}\right) = +\infty,\ n \in \mathbb{N}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x^{2n+1}}\right) = -\infty,\ n \in \mathbb{N}$.

Définition *Asymptote horizontale*

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
Alors, la droite d'équation $y = L$ est appelée une `asymptote horizontale` à la courbe représentative de f en $\pm\infty$.

Exemple



Nous avons ici l'illustration du fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$: la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f se rapproche de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2$.

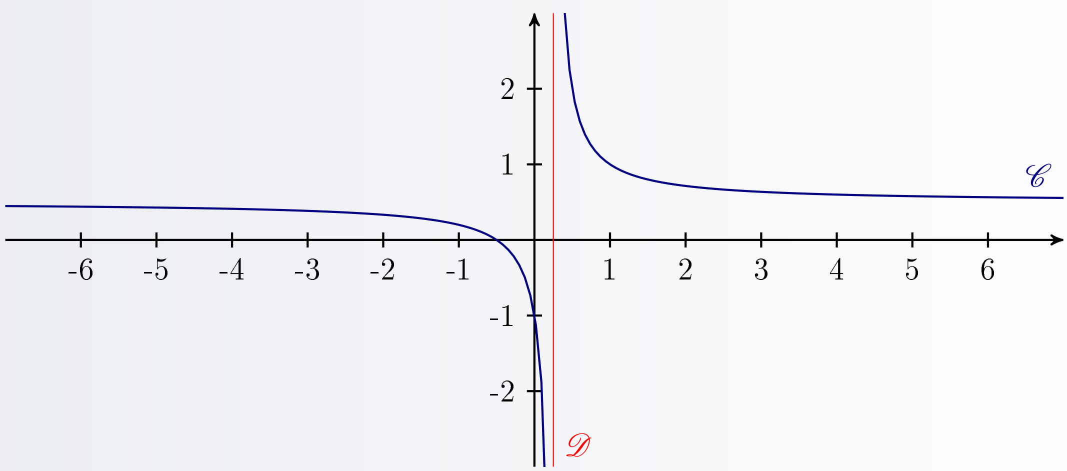
Remarquez que la courbe peut couper l'asymptote !

Définition *Asymptote verticale*

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$.

Alors, la droite d'équation $x = a$ est appelée une `asymptote verticale` à la courbe représentative de f en a.

Exemple



Nous avons ici l'illustration du fait que $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{4}}} f(x) = +\infty$. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ est donc une asymptote verticale à $\mathscr{C}$ en $\dfrac{1}{4}$.

Propriété — *Règles sur les limites*

Les règles sur les limites sont les mêmes que celles vues pour les suites.

Théorème — *Limite d'une fonction composée*

Soient f et g deux fonctions. On définit la fonction h par :

$$h(x) = g\left(f(x)\right).$$

Alors,

$$\lim_{x\to\alpha} h(x) = \lim_{X\to y} g(X) \quad , \quad \text{où } y = \lim_{x\to\alpha} f(x),$$

α pouvant représenter un nombre fini ou un infini.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Propriété

Soit f une fonction et soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n = f\left(v_n\right)$ pour tout entier naturel n.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ (limite finie ou infinie), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to\ell} f(x)$.

Exemple

On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{1+v_n}$, où $v_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

Définition — *Fonction continue*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in$ I.
Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \ell$, on dit que f est `continue en` $\boldsymbol{a}$.
Si f est continue en tout point a de I, on dit alors que f est continue sur I.

Remarque

Dire qu'une fonction est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe représentative en un seul morceau sur I (sans lever le crayon).

Propriété

Fonctions usuelles continues

On admet que les fonctions polynômiales, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue sont continues sur leur domaine de définition.
On admet aussi que :

- le produit de deux fonctions continues sur I est une fonction continue sur I ;
- Le quotient de deux fonctions continues sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I est une fonction continue sur I.

Exemples

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$. On n'écrira pas qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En effet, la seule valeur interdite est $x=-1$ et sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$, cette fonction est continue comme quotient de deux fonctions continues (deux polynômes).
Or, pour $x \neq -1$, $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1} = \dfrac{x-2}{x-1}$, donc $\lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}\right) = \dfrac{-1-2}{-1-1} = \dfrac{3}{2}$.
Finalement, la fonction est continue en -1 et donc sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Toute fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue sur I.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur I, et soit $a \in \mathrm{I}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h \quad \text{en posant } h = x-a \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h\right) \\ &= \lim_{h \to 0}(f'(a) \times h) \qquad \text{car } f \text{ ets dérivable en } a \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui signifie que f est continue en a. ■

La réciproque est fausse : il existe des fonctions continues sur un intervalle qui ne sont pas dérivables. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, mais elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit (u_n) une suite de réels définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que, pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ (limite finie), alors $f(\ell) = \ell$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 10 \qquad ; \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

On peut démontrer par récurrence que : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$ et ensuite en déduire la convergence de la suite (suite décroissante majorée). Ainsi, sa limite ℓ est telle que $f(\ell) = \ell$, soit $\ell = \sqrt{\ell}$. On en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or, $\ell > 0$ donc $\ell = 1$.

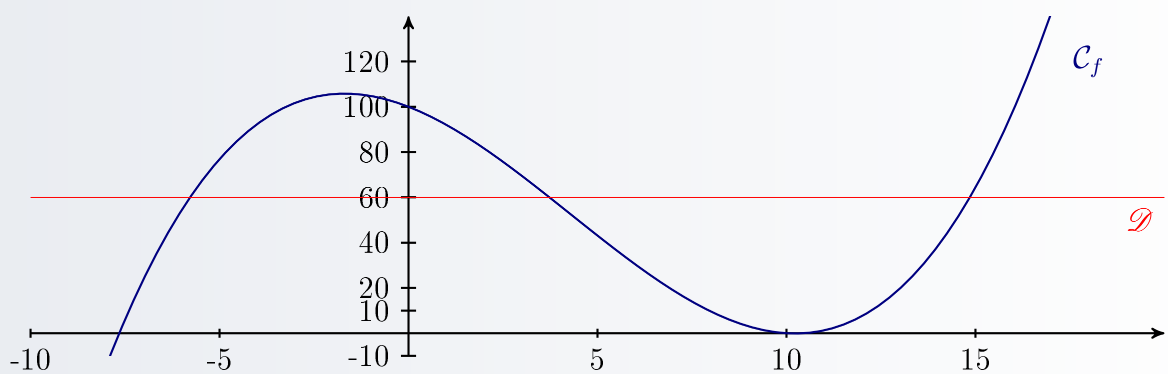
Théorème

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$. On note respectivement m et M le minimum et le maximum de $f(x)$ sur $[a\,;b]$.
Pour tout réel k tel que $m \leqslant k \leqslant M$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = 0,125x^3 - 1,6x^2 - 6,5x + 100$:



Exemple (suite)

L'équation $f(x) = 60$ admet une unique solution sur $[-10\,;20]$ car :

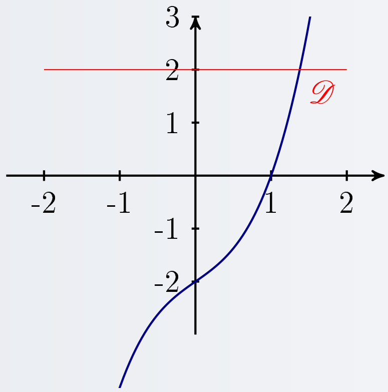
- f est continue sur cet intervalle ;
- $m = f(-10)$ et $M = f(20)$;
- $60 \in [m\,;M]$.

Théorème *Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 2$:



L'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[1\,;2]$ car :

- f est continue et strictement croissante sur cet intervalle ;
- $f(1) = 0$ et $f(2) = 8$, donc $2 \in [f(1)\,;f(2)]$.

Définitions *Fonctions sinus et cosinus*

La fonction `sinus` est la fonction :

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1\,;1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

La fonction `cosinus` est la fonction :

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1\,;1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

Propriété *Parité et périodicité*

1. La fonction sinus est **impaire** et 2π-périodique.
2. La fonction cosinus est **paire** et 2π-périodique.

Démonstration

1 Pour tout réel x, on a :

$$\sin(-x) = \sin x$$

donc la fonction sinus est impaire. De plus,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

ce qui signifie que la fonction sinus est 2π-périodique.

2 Pour tout réel x, on a :

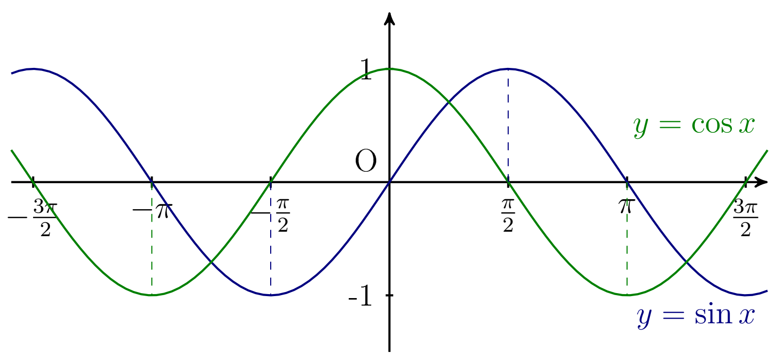
$$\cos(-x) = \cos x$$

donc la fonction cosinus est impaire. De plus,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

ce qui signifie que la fonction cosinus est 2π-périodique. ■

Les courbes représentatives des deux fonctions sont :



Propriétés

Limites particulières

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

On admettra ces deux limites.

Propriétés

Dérivée des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x,

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad ; \qquad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Démonstration

- Le nombre dérivé de la fonction sinus en a s'écrit :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} &= \frac{\sin a\cos h+\cos a\sin h-\sin a}{h}\\ &= \sin a\frac{\cos h-1}{h}+\cos a\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

Donc, d'après la propriété précédente,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\sin a\times 0+\cos a\times 1=\cos a.$$

D'où la première formule en remplaçant a par x.

- Le nombre dérivé de la fonction cosinus en a s'écrit :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} &= \frac{\cos a\cos h-\sin a\sin h-\cos a}{h}\\ &= \cos a\frac{\cos h-1}{h}-\sin a\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=\cos a\times 0-\sin a\times 1.$$

D'où la seconde formule. ■

Théorème *Dérivée d'une fonction $f(ax+b)$*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors, pour tout $x\in \mathrm{J}$ tel que $ax+b\in \mathrm{I}$,

$$f'(ax+b)=af'(ax+b).$$

Démonstration

On pose $g(x) = f(ax+b)$. Pour tout réel h strictement positif et pour tout réel a non nul, on a :

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}\\ &= \frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{h}\\ &= a\frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}\\ &= a\frac{f(ax+b+H)-f(ax+b)}{H} \quad \text{avec } H = ah\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) &= a\lim_{H\to 0}\left(\frac{f(ax+b+H)-f(ax+b)}{H}\right)\\ &= af'(ax+b).\end{aligned}$$

■

Exemples

1 Soit $g(x) = \sqrt{2x-1}$ définie que $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

On pose alors $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = f(2x-1)$. Or, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc, $g'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

2 Soit $g(x) = \cos(-3x+4)$. En posant $f(x) = \cos x$, on a $g(x) = f(-3x+4)$ et $f'(x) = -\sin x$.
Ainsi, $g'(x) = -3\times(-\sin(-3x+4))$, soit $g'(x) = 3\sin(-3x+4)$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété *Dérivées usuelles*

On désigne par u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée	Remarques éventuelles
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
u^n, $n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$	u ne s'annule pas sur I si $n < 0$
d'où : u^2	$2u'u$	
et : $\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
et : $\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$	u ne s'annule pas sur I

Exemples

1 $f(x) = (2x^2 - 3x + 5)^2$. On pose : $u(x) = 2x^2 - 3x + 5$, d'où $u'(x) = 4x - 3$ et donc $f'(x) = 2(4x - 3)(2x^2 - 3x + 5)$.

2 $f(x) = \sqrt{\cos(5x + 1)}$. On pose $u(x) = \cos(5x + 1)$, soit $u'(x) = -5\sin(5x + 1)$ et donc $f'(x) = \dfrac{-5\sin(5x + 1)}{2\sqrt{\cos(5x + 1)}}$.