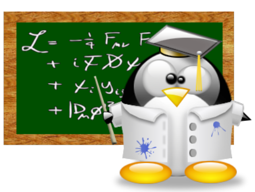
Sommaire



Prérequis

- Suites arithmétiques et géométriques (1re S)

Propriété

Principe de récurrence faible

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un paramètre entier n. $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, si :

1. $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie ; cette étape s'appelle l'*initialisation*.
2. $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ pour un entier naturel k quelconque ; cette étape s'appelle *démontrer l'hérédité à l'aide de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_k$.*

Exemple

Nous allons démontrer que pour tout entier naturel non nul n, la propriété suivante est vraie :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad 1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. **Initialisation.**
   Nous avons :
   $$\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$$
   donc l'initialisation est faite : $\mathcal{P}_1$ est vraie.

2. **Hérédité.** On suppose que pour un entier quelconque k, $\mathcal{P}_k$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence, que nous abrègerons par « HR ») :
   $$1+2+\cdots+(k-1)+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$
   Regardons ce qui se passe au rang suivant (donc pour $k+1$) :
   $$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \qquad \text{par HR} \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) \\ &= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) \\ &= \frac{(\boldsymbol{k+1})(\boldsymbol{k+1}+1)}{2} \end{aligned}$$
   L'hérédité est alors vérifiée : $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.
   La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Propriété

Principe de récurrence forte

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant d'un paramètre entier n. $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, si :

1. $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie ;
2. $[\forall\, i \in [\![n_0\,;k]\!]\,,\ \mathcal{P}_i]$ est vraie $\Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Exemple

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que la propriété suivante est vraie :

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad u_n \leqslant 2^n.$$

1 Initialisation.
$u_0 = 1 et 2^0 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. L'initialisation est alors faite.

2 Hérédité.
Supposons que :

$$\forall\ i \in [\![0\,;k]\!]\ ,\ \mathcal{P}_i \text{ est vraie.}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= u_0 + u_1 + \cdots + u_k \\
u_{k+1} &\leqslant 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k \quad \text{par HR} \\
u_{k+1} &\leqslant \frac{2^{k+1}-1}{2-1} \quad \text{somme des } k \text{ premiers termes d'une suite géométrique de raison 2} \\
u_{k+1} &\leqslant 2^{k+1} - 1 \\
u_{k+1} &\leqslant 2^{k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie. L'hérédité est alors démontrée et la propriété $\mathcal{P}_n$ est ainsi vraie pour tout entier naturel n.

Remarque

Dans un cas comme dans l'autre, on dit que l'on démontre le résultat par récurrence.

Le raisonnement par récurrence va nous servir tout au long de l'année de Terminale (et même plus tard !).

Définitions *Suites convergentes*

Soit (u_n) une suite numérique.
On dit qu'elle `converge` vers un nombre ℓ lorsque :

$$\forall\ (\varepsilon\,;\varepsilon') \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in \left]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon'\right[.$$

En d'autres termes, (u_n) converge vers ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient u_n à partir d'un certain rang.
Si (u_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est `divergente`.

Remarque

Dans la définitionn purement mathématique, on prend très souvent un intervalle centré en ℓ, ce qui revient à écrire :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in \left]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon\right[.$$

Propriété *Limites finies de suites usuelles*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Démonstration

1 Démontrons d'abord que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
Soit un réel strictement positif ε.

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Il existe donc bien un rang ($n_0 = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right) + 1$, partie entière de $\dfrac{1}{\varepsilon^2} + 1$) à partir duquel $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est dans l'intervalle $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, d'où le résultat.

2 Démontrons maintenant que pour tout entier naturel k non nul, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.
Soit ε un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{n^k} < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n^k \\ &\Leftrightarrow n > \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Il existe donc bien un rang $n_0 = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right) + 1$ à partir duquel $\dfrac{1}{n^k}$ est contenu dans l'intervalle $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, d'où le résultat. ■

Propriété *Unicité de la limite finie*

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Démonstration

Nous allons faire ce que l'on appelle un *raisonnement par l'absurde*.
Supposons que la suite converge vers deux limites différentes, que nous noterons ℓ et ℓ', en convenant de prendre $\ell < \ell'$.
On peut donc trouver deux intervalles ouverts disjoints I et J, l'un contenant ℓ, l'autre ℓ', tels qu'à partir d'un certain rang, tous les u_n sont contenus dans I et J, ce qui est impossible car I et J sont disjoints et donc, si $u_n \in \mathrm{I}$, alors il est impossible que $u_n \in \mathrm{J}$.
Notre hypothèse de départ est donc fausse. Par conséquent, $\ell = \ell'$. ■

Propriété

Opérations sur les limites finies (admis)

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$. Alors,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (ku_n) = k\ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell\ell'$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$, si $\ell' \neq 0$

Propriété

Compatibilité avec l'ordre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ'.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

Supposons que $\ell > \ell'$.
Il existe deux intervalles I et J ouverts disjoints tels que $\ell \in \mathrm{I}$ et $\ell' \in \mathrm{J}$, où I se trouve à droite de J sur la droite des réels.

(u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ' donc il existe un rang à partir duquel tous les u_n sont contenus dans I et tous les v_n dans J, ce qui sous-entend que $u_n > v_n$, ce qui est contradictoire avec le critère : $u_n \leqslant v_n$.
L'hypothèse selon laquelle $\ell > \ell'$ est donc fausse ; donc $\ell < \ell'$. ■

Théorème

Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

Ce théorème est admis.

Exemple

On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.
on sait que pour tout entier naturel n,

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$

donc :

$$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

Définition *Suites divergentes vers un infini*

- On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ s'il existe un réel positif A tel que, à partir d'un certain rang n_0, $u_n > A$.

$$\forall\ A \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A.$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- On dit qu'une suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ s'il existe un réel négatif A tel que, à partir d'un certain rang n_0, $u_n < A$.

$$\forall\ A \in \mathbb{R}_-^*,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < A.$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Dans les deux cas, on dit que la suite (u_n) est `divergente`.

Ce n'est pas parce qu'une suite est divergente que sa limite est nécessairement un infini.
Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite, donc elle est divergente.

Propriété *Limites infinies de suites usuelles*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n \to +\infty} n^k = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

La démonstration se fait comme celles de la propriété concernant les limites finies de suites usuelles.

Propriété *Opérations sur les limites infinies et finies*

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$+\infty$	F.I.	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$+\infty$

Table : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	F.I.	F.I.

Table : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	0	$\ell > 0$	$\ell < 0$
$-\infty$	F.I.	F.I.	0	0	0
$+\infty$	F.I.	F.I.	0	0	0
0^+	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$
$\ell' > 0$	$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$

Table : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

où « F.I. » (Forme Indéterminée) signifie que l'on doit étudier au cas par cas la limite.

Méthode

- Pour lever l'indétermination « $\frac{\infty}{\infty}$ », on est souvent amener à factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme dominant (terme de plus haut degré pour les polynômes).
- L'indétermination « $0 \times \infty$ » est équivalente à l'indétermination « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ » (on peut s'en souvenir en se disant que « $0 \times \infty = 0 \times \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$ » et « $0 \times \infty = \frac{1}{\infty} \times \infty = \frac{\infty}{\infty}$ ».

Propriété *Comparaison à l'infini*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$;
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

- Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $A > 0$, $u_n > A$.
  Or, à partir d'un certain rang N, $v_n \geqslant u_n$.
  Donc, pour $n \geqslant \max(N\,; n_0)$, $v_n > A$. ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

- Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $A < 0$, $v_n < A$.
  Or, à partir d'un certain rang N, $u_n \leqslant v_n$.
  Donc, pour $n \geqslant \max(N\,; n_0)$, $u_n < A$. ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. ■

Propriété *Inégalité de Bernoulli*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Démonstration

Raisonnons par récurrence.

- **Initialisation.**
  $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$.
  La propriété est donc vraie pour $n = 0$. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.**
  Supposons que pour un certain entier k,

$$(1+x)^k \geqslant 1 + kx. \qquad \text{(HR)}$$

Alors,

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geqslant (1+kx)(1+x) \quad \text{(HR)}\\ &\geqslant 1 + (k+1)x + x^2\\ &\geqslant 1 + (k+1)x.\end{aligned}$$

L'hérédité est alors montrée ; la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

■

Propriété *Cas des suites géométriques*

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$;
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
- Si $q \leqslant -1$, alors (u_n) diverge.

Démonstration

- **Si $q > 1$**, en posant $x = q - 1$ et en appliquant l'inégalité de Bernoulli, on a :

$$q^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty \qquad (x > 0),$$

donc, par comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$

Or, $u_n = u_o \times q^n$ donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$$

- **Si $|q| < 1$**, le résultat est évident si $q = 0$; donc, supposons que $q \neq 0$ et posons $Q = \dfrac{1}{|q|}$.

Alors, $Q > 1$ et la suite géométrique de raison Q a pour limite $\pm\infty$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|q|^n} = \pm\infty,$$

soit :

$$\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0.$$

- **Si $q \leqslant -1$**, le résultat est évident pour $q = -1$ car la suite prendra pour valeurs u_0 et $-u_0$.

Supposons donc que $q < -1$; alors, $-q > 1$ et donc, la suite géométrique de raison $(-q)$ a pour limite $\pm\infty$. Il existe donc un réel positif A et un rang à partir duquel $u_0(-q)^n > A$.
Si n est pair, cela signifie que $u_0 q^n > A$;
Si n est impaire, cela signifie que $-u_0 q^n > A$, soit $u_0 q^n < -A$.
Ainsi, (u_n) n'est ni majorée, ni minorée, d'où la divergence. ■

Théorème *Convergence monotone*

- Si une suite est croissante et majorée, alors elle converge.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors elle converge.

Démonstration

- Supposons que la suite (u_n) est croissante ; alors,

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Si elle est majorée, alors,

$$\exists\ M \in \mathbb{R} \mid \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n < M.$$

Il existe donc un intervalle ouvert contenant M : $]M - \varepsilon\,; M + \varepsilon[$, où $\varepsilon > 0$.
M étant un majorant, $M - \varepsilon$ n'en est pas un, donc il existe un certain rang n_0 tel que $u_{n_0} > M - \varepsilon$. Comme (u_n) est croissante,

$$\forall\ n > n_0,\ M - \varepsilon < u_{n_0} < u_n < M.$$

Il existe donc un intervalle ouvert contenant tous les termes à partir d'un certain rang ; (u_n) converge donc.

- Le raisonnement est identique dans le cas où la suite est décroissante et minorée. ∎

Complément 1: Vitesse de divergence de deux suites

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = n\,! \qquad ; \qquad v_n = n^n.$$

On souhaite savoir laquelle des deux tend vers $+\infty$ le plus vite.
pour cela, on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{n\,!}{n^n}.$$

1 Conjecture.
À l'aide de XCAS, on obtient les valeurs suivantes :

$$q_1 = 1 \quad ; \quad q_2 = 0,5 \quad ; \quad q_3 \approx 0,222 \quad ; \quad q_{10} \approx 0{,}000\,362\,88 \quad ; \quad q_{100} \approx 9,33 \times 10^{-43}$$

On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$, ce qui signifierait que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ tendrait plus vite vers l'infinie que $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2 Démonstration mathématiques.
Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{q_n}{q_{n+1}} &= \frac{n\,!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,!} \\
&= \frac{n\,!}{(n+1)\,!} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\
&= \frac{1}{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (1+n) \\
&\geqslant \frac{1}{n+1} \times \left(1 + n \times \frac{1}{n}\right) \times (1+n) \quad \text{(Inégalité de Bernoulli)} \\
&\geqslant 2
\end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit $n > 0$,

$$q_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} q_n$$

et donc,

$$q_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n} q_1 = \frac{1}{2^n}\ ,$$

soit :

$$q_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$q_n > 0$. On en déduit alors, par comparaison, :

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Ce résultat nous dit alors que le dénominateur de q_n tend plus vite vers l'infini que son numérateur. La conjecture est alors prouvée.

Complément 2: Détermination d'une somme infinie

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On souhaite savoir si elle possède une limite.

Voici un algorithme (sous ALGOBOX) permettant de calculer u_N, N étant un nombre entier à entrer.

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  u PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u+1/sqrt(k)
    FIN_POUR
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

On obtient :

- $u_{1\,000} \approx 61,8$.
- $u_{10\,000} \approx 198,54$.
- $u_{100\,000} \approx 631$.
- $u_{500\,000} \approx 1\,412{,}75$.

Il semblerait que la suite tende vers l'infini.

Pour démontrer notre conjecture, nous allons utiliser une astuce :

$$\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right) = 1.$$

On en déduit alors :

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}.$$

Or,

$$\forall\ k > 0,\ \ \sqrt{k+1} > \sqrt{k}.$$

Donc,

$$\forall\ k > 0,\ 2\sqrt{k} < \sqrt{k+1}+\sqrt{k} < 2\sqrt{k+1},$$

soit :

$$\forall\ k > 0,\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Ainsi,

$$\forall\ k > 0,\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

On en déduit alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}\ ,$$

soit :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sqrt{n+1}-1 < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\ ,$$

ou encore :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n+1}-1 < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

(on a changé les bornes de la première somme)
Et donc :

$$\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-1\right)<\sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}u_n.$$

On en déduit alors :

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-1\right)<\sqrt{n+1}-1\\ \sqrt{n+1}-1<\frac{1}{2}u_n\end{array}\right. \qquad \text{soit} \qquad \left\{\begin{array}{ll}u_n<2\sqrt{n}-1 & (1)\\ u_n>2\sqrt{n+1}-2 & (2)\end{array}\right.$$

À l'aide de l'inégalité (2), par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt{n+1}-2\right)=+\infty$).
On peut écrire :

$$2\sqrt{n+1}-2<u_n<2\sqrt{n}-1.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{2\sqrt{n+1}-2}{2\sqrt{n}}<\frac{u_n}{2\sqrt{n}}<\frac{2\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}}$$

ou encore :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{u_n}{2\sqrt{n}}<1-\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)=1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{2\sqrt{n}}\right)=1.$$

Ce résultat signifie que, pour n assez grand, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ se comporte comme la suite $(2\sqrt{n})$.
On dit alors que u_n est équivalent à $2\sqrt{n}$ à l'infini, et on note :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Souvenez-vous ... Nous avions trouvé $u_{500\,000}\approx 1412,75$. Et $2\sqrt{500\,000}\approx 1\,414{,}21$. On voit bien ici que les deux valeurs sont très proches.
Avec ALGOBOX, on ne peut pas calculer $u10^6$ (cela dépasse ses capacités). Avec l'équivalent que nous venons de trouver, nous pouvons dire que $u_{10^6}\approx 2\sqrt{10^6}$, soit $u_{10^6}\approx 2\,000$.

Complément 3: La suite de Héron

Héron d'Alexandrie était un mathématicien de la fin du 1^{er} siècle après J.-C.
Il introduisit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \qquad , \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right)$$

où A est un réel positif.
Pour ce qui suite, on prendra $u_0 = \mathrm{E}\left(\sqrt{A}\right) + 1$ (pourquoi pas ? ...) et on considèrera la fonction f, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right).$$

La fonction dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{x^2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{A}{x^2} > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{A}{x^2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{A} > 1 \\
&\Leftrightarrow x^2 > A \\
&\Leftrightarrow x > \sqrt{A} \quad \text{car } A > 0.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{A}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	$\sqrt{A}$	↗	$+\infty$

la suite (u_n) est définie par : $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

- **Démontrons que $\boldsymbol{u_n \geqslant \sqrt{A}}$ par récurrence.**
  - $\rightarrow$ $u_0 \geqslant \sqrt{A}$ (initialisation)
  - $\rightarrow$ On suppose que pour un entier naturel k quelconque, $u_k \geqslant \sqrt{A}$.
    Alors, $f\left(u_k\right) \geqslant f\left(\sqrt{A}\right)$ car f est croissante sur $\left[\sqrt{A}\,; +\infty\right[$.
    Or, $f\left(u_k\right) = u_{k+1}$ et $f\left(\sqrt{A}\right) = \sqrt{A}$.
    Donc $u_{k+1} \geqslant \sqrt{A}$. L'hérédité est alors vérifiée. La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.
- **Démontrons maintenant que $\boldsymbol{u_n \leqslant u_0}$.**
  - $\rightarrow$ $u_0 \leqslant u_0$ (ça, c'est bon ...)

→ On suppose que $u_k \leqslant u_0$ pour un entier k quelconque.
Alors, comme $u_n \geqslant \sqrt{A}$ et que f est croissante sur $\left[\sqrt{A}\,;+\infty\right[$, $f\left(u_k\right) \leqslant f\left(u_0\right)$, soit $u_{k+1} \leqslant f\left(u_0\right)$.
Or,

$$\sqrt{A} < u_0 \Rightarrow A < u_0^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{A}{u_0}\right) \\ u_1 &< \frac{1}{2}(u_0 + u_0) \\ u_1 &< u_0. \end{aligned}$$

Donc, $u_{k+1} < u_0$. L'hérédité est alors prouvée. La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

- **Démontrons que la suite est décroissante.**
  → Nous avons vu que $u1 < u_0$ (initialisation faite).
  → Supposons que $u_{k+1} < u_k$.
  Nous venons de voir que $u_n \in \left[\sqrt{A}\,; u_0\right]$ pour tout n. La fonction f est croissante sur cet intervalle donc :

$$u_{k+1} < u_k \Leftrightarrow f(u_{k+1}) < f(u_k) \Leftrightarrow u_{k+2} < u_{k+1}.$$

L'hérédité est alors prouvée, ce qui démontre la décroissance de la suite.

Pour résumer, on a démontré que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sqrt{A} \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant u_0.$$

La suite est donc minorée et décroissante : elle converge donc.

On a de plus :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{A} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right) - \sqrt{A} \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{A}{2u_n} - \sqrt{A} \end{aligned}$$

Or, d'après ce qui a été dit précédemment, on sait que $\sqrt{A} < u_n$ donc que $\dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{A} &< \frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{A}}{2} - \sqrt{A} \\ &< \frac{1}{2}u_n - \frac{\sqrt{A}}{2} \\ &< \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{A}\right). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n - \sqrt{A} \leqslant \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{A}\right).$$

- **Initialisation.**
  Pour $n = 0$, on a :

$$\frac{1}{2^0}\left(u_0 - \sqrt{A}\right) = u_0 - \sqrt{A}.$$

  Donc l'initialisation est réalisée.

- **Hérédité.**
  Supposons vraie la formule pour un certain rang n. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{A} &< \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{A}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(u_0 - \sqrt{A}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

  De plus, d'après la question 3,

$$u_{n+1} - \sqrt{A} > 0.$$

  Finalement, on a :

$$0 < u_{n+1} - \sqrt{A} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\left(u_0 - \sqrt{A}\right)$$

  L'hérédité est donc démontrée, ce qui signifie que la formule est vraie pour tout entier naturel n.

  D'après le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), on a alors :

$$0 < \lim_{n\to+\infty}\left(u_n - \sqrt{A}\right) \leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{A}\right).$$

  Or,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{A}\right) = 0.$$

  Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n - \sqrt{A}\right) = 0.$$

  Ce qui signifie :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{A}.}$$

Voici un algorithme sous ALGOBOX permettant de trouver une valeur approchée de n'importe quelle racine carrée à l'aide de cette suite.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  u PREND_LA_VALEUR a
  TANT_QUE (abs(u-0.5*(u+a/u))>0.000001) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR 0.5*(u+a/u)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

Il suffit de rentrer a pour trouver une valeur approchée à 10^{-6} près de $\sqrt{a}$.