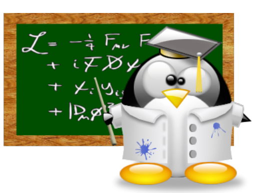
Stéphane PASQUET, 22 mars 2015

Sommaire



Prérequis

- Raisonnement par récurrence
- Fonction exponentielle

Définition *Logarithme népérien*

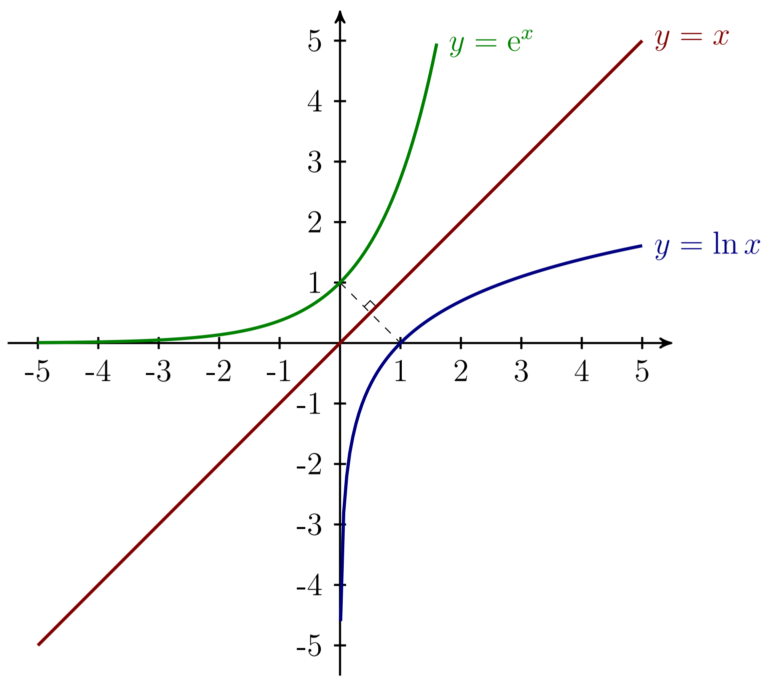
On définit la fonction `logarithme népérien` comme étant la fonction ln définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\ x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x \\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x \end{cases}$$

Remarque

On dit que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Graphiquement, cela se traduit par une symétrie de la courbe représentative de la fonction exponentielle par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) :



Propriété

$$\forall\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ b \in \mathbb{R},\ \ln a = b \Longleftrightarrow a = \mathrm{e}^b.$$

Démonstration

La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante, on a :

$$\ln a = b \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\ln a} = \mathrm{e}^b.$$

Or, par définition, $\mathrm{e}^{\ln a} = a$. D'où le résultat. ■

Remarque *Valeurs remarquables*

- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln e^0 = \ln 1 \Leftrightarrow 0 = \ln 1$).
- $\ln e = 1$ (car $e^1 = e \Leftrightarrow \ln e^1 = \ln e \Leftrightarrow 1 = \ln e$).

Propriété *Sens de variation*

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\ln a < \ln b$.
Alors,

$$\begin{aligned} \ln a < \ln b &\iff e^{\ln a} < e^{\ln b} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff a < b \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Propriété *Relation fonctionnelle de la fonction logarithme népérien*

$$\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Démonstration

D'une part, nous avons :

$$e^{\ln(ab)} = ab,$$

et d'autre part, nous avons :

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab.$$

Ainsi,

$$e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$$

et donc, parce que $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$ ■

Propriété *Propriétés algébriques*

Soit a un nombre réel strictement positif et n un entier relatif. Alors :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$

Démonstration

1. $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$.

   On en déduit alors que $\ln a + \ln \dfrac{1}{a} = 0$, soit $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.

2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$ d'après le point précédent.

3. La démonstration se fait par récurrence sur n à l'aide de la propriété : $\ln\left(a^2\right) = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$.

4. $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\sqrt{a}$. D'où le résultat, en divisant par deux.

■

Exemples

1. $\ln \dfrac{1}{3} = -\ln 3$
2. $\ln \dfrac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$
3. $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2$
4. $\ln \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\ln 7$

Propriétés

Équations

1. $\forall\,(a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ln a = \ln b \iff a = b$.
2. $\forall\ k \in \mathbb{R},\ \ln x = k \iff x = \mathrm{e}^k$.
3. $\forall\ k \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^x = k \iff x = \ln k$.

Démonstrations

1. $$\begin{aligned} \ln a = \ln b &\iff \mathrm{e}^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b} \\ &\iff a = b. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \ln x = k &\iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^k \\ &\iff x = \mathrm{e}^k. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \mathrm{e}^x = k &\iff \ln \mathrm{e}^x = \ln k \\ &\iff x = \ln k. \end{aligned}$$

■

Propriétés

Inéquations

1. $\forall\,(a\,;b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \ln a < \ln b \iff a < b$.
2. $\forall\ k \in \mathbb{R},\ \ln x < k \iff x < \mathrm{e}^k$.
3. $\forall\ k \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{e}^x < k \iff x < \ln k$.

Ces propriétés se démontrent de la même façon que les précédentes.

Théorème — *Dérivée de la fonction logarithme népérien (admis)*

Sur $]0\,;+\infty[$, la dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction inverse.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Par ce théorème, on retrouve la stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ car sur cet ensemble, $\dfrac{1}{x} > 0$.

Propriétés — *Limites aux bornes du domaine de définition*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Nous avions pu constater cela dès le début de ce chapitre en regardant les courbes tracées. Cette propriété résulte du fait que la courbe représentative de la fonction ln est symétrique à celle de la fonction exponentielle par rapport à la 1[re] bissectrice.

Propriété — *Croissance comparée à l'infini*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Démonstration

Nous savons que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$.

En posant $X = \ln x$, on a bien $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{\ln x}} = 0$, d'où le résultat. ■

Remarque

Cela signifie que la fonction ln croît moins vite que la fonction $x \mapsto x$.

Propriété — *Une limite en 0*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0.$$

Démonstration

On peut écrire :

$$x \ln x = -x \ln \frac{1}{x} = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln X}{X}, \qquad \text{en posant } X = \frac{1}{x}.$$

Or, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$. D'où :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{\ln X}{X} \right) = 0 \qquad \text{(d'après la propriété précédente.}$$

■

Propriété

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Démonstration

Posons $f(x) = \ln x$. Alors, $f'(x) = \frac{1}{x}$.
De plus,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 1.$$

Or, $f(1) = 0$. D'où le résultat. ■

Théorème *Conservation du sens de variation par composition*

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I.
Alors, la fonction définie par $\ln u$ possède les mêmes variations que u sur I.

Ce théorème résulte de la propriété $a < b \Longleftrightarrow \ln a < \ln b$.

Théorème *Dérivée de $\ln u$*

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I.
Alors,

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Démonstration

On sait que :

$$(\mathrm{e}^v)' = v'\mathrm{e}^v$$

donc en posant $v = \ln u$, on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\ln u}\right)' = (\ln u)'\,\mathrm{e}^{\ln u}$$

soit :

$$u' = (\ln u)' \times u$$

ou encore :

$$\frac{u'}{u} = (\ln u)'\,.$$

■

Définition

Logarithme décimal

La fonction `logarithme décimal`, notée `log`, est la fonction définie par :

$$\begin{aligned}\log : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{\ln x}{\ln 10}\end{aligned}$$

Cette fonction a été proposée à Néper par Henry Briggs pendant les étés 1615 et 1616 dans le but de rendre plus pratiques les logarithmes pour les personnes utilisant souvent le nombre 10.

Les propriétés du logarithme décimal sont les mêmes que celle du logarithme népérien, ceux-ci étant proportionnels.

Propriété

Nombre de chiffres

Soit x un nombre réel positif.
Le nombre de chiffres de l'écriture décimale de x est égal à $\mathrm{E}(\log x) + 1$.

Démonstration

Posons : $x = p \times 10^k$, $1 \leqslant p < 10$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}1 \leqslant p < 10 &\iff 0 \leqslant \log p < 1\\ &\iff k \leqslant \log p + k < 1 + k\\ &\iff k \leqslant \log p + k \log 10 < 1 + k\\ &\iff k \leqslant \log\left(p \times 10^k\right) < 1 + k\\ &\iff k \leqslant \log x < 1 + k.\end{aligned}$$

On en déduit alors que $k = \mathrm{E}(\log x)$ (partie entière de $\log x$) et donc :

$$x = p \times 10^k = p \times 10^{\mathrm{E}(\log x)}.$$

…

Or, $1 \leqslant p < 10$, donc :

$$10^{\mathrm{E}(\log x)} \leqslant x < 10^{\mathrm{E}(\log x)+1}.$$

L'écriture décimale de x comporte donc autant de chiffres que $10^{\mathrm{E}(\log x)}$; autrement dit, l'écriture décimale de x comporte $\mathrm{E}(\log x)+1$ chiffres. ■

Exemple

Prenons $x = 2\,013^{2\,013}$.
Alors, l'écriture décimale de x comporte $\mathrm{E}(\log x)+1$ chiffres.
Or, $\log x = 2\,013 \log 2\,013 \approx 6\,650{,}64$. Donc, il y a $6\,651$ chiffres dans l'écriture décimale de $2\,013^{2\,013}$.

Propriété

Soit n un entier naturel non nul à p chiffres.
Alors,

$$p - 1 \leqslant \log n < p.$$

Démonstration

Posons n un nombre entier à p chiffres. On a alors :

$$10^{p-1} \leqslant n < 10^{p},$$

d'où :

$$\log\left(10^{p-1}\right) \leqslant \log n < \log\left(10^{p}\right),$$

soit :

$$p - 1 \leqslant \log n < p.$$ ■

Exemple

Prenons $n = 2\,013$. Alors, $3 \leqslant \log 2\,013 < 4$ car $2\,013$ comporte 4 chiffres.

Cette dernière propriété peut servir en chimie, lors d'un calcul de pH.
En effet, le pH d'une solution aqueuse est définie comme étant :

$$\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right] ,$$

où $\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$ représente la concentration de la solution en ions $\mathrm{H_3O^+}$ (exprimée en $\mathrm{mol} \cdot \ell^{-1}$).
On se sert aussi du logarithme décimal pour mesurer certaines intensités, comme celle d'un séisme ou d'un son (en décibel), ou encore la luminosité d'une étoile (en erg/s, ou 1 reg/s$=10^{-7}$ W).