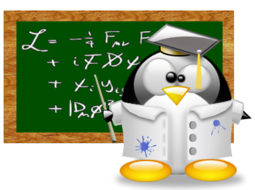
Stéphane PASQUET, 22 mars 2015

Sommaire



Prérequis

- Puissances (notions de collège)
- Raisonnement par récurrence
- Étude de fonctions (continuité et dérivabilité)

Définition *Fonction exponentielle*

La `fonction exponentielle` est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions :

- $f' = f$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est notée `exp`.

L'existence d'une telle fonction est admise.
Quant à son unicité, on la démontre en considérant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) \times f(-x)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f'(x)f'(-x) - f'(x)f'(-x) \quad \text{car } f'(x) = f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = f(0)^2 = 1$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$ donc ce produit ne s'annule jamais : f ne s'annule donc jamais sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, supposons qu'il existe deux fonctions, f et g, vérifiant les deux conditions. Posons alors sur $\mathbb{R}$:

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)},$$

ce qui est possible car f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

$$k'(x) = \frac{g'f - f'g}{f^2} = 0 \qquad \text{car } f' = f \text{ et } g' = g.$$

Ainsi, k est constante sur $\mathbb{R}$ et $k(x) = k(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$. D'où : $f(x) = g(x)$.
On est donc assurés que la fonction vérifiant les conditions est unique.

Propriété *Relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle*

Pour tous nombres réels x et y,

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Démonstration

Fixons y et considérons la fonction :

$$f(x) = \frac{\exp(x + y)}{\exp(y)}.$$

Alors,

$$f'(x) = \frac{\exp'(x + y)}{\exp(y)}.$$

Or, par définition, $\exp'(x + y) = \exp(x + y)$. Donc, $f'(x) = f(x)$.

…

De plus,

$$f(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1.$$

Ainsi, f vérifie les deux conditions : $f' = f$ et $f(0) = 1$; c'est donc la fonction exponentielle :

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x).$$

D'où :

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

■

Exemples

1. $\exp(3+x) = \exp(3)\exp(x)$.
2. $\exp(9+7) = \exp(9)\exp(7)$.

Propriétés

Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y,

1. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
2. $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
3. $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ (\exp(x))^n = \exp(nx)$

Démonstration

1. $\exp(x)\exp(-x) = 1$ (voir explications sous la définition de la fonction exponentielle). On en déduit donc la formule.
2. $$\begin{aligned} \exp(x-y) &= \exp(x+(-y)) \\ &= \exp(x)\exp(-y) \\ &= \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} \\ &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \end{aligned}$$
3. Considérons que $n \in \mathbb{N}$. La démonstration se fait par récurrence.
   a. $n = 0$: $(\exp(x))^0 = 1$ et $\exp(0 \times x) = \exp(0) = 1$.
   L'initialisation est donc faite.
   b. On suppose que pour un entier naturel k quelconque, la relation est vraie.
   $$\begin{aligned} (\exp(x))^{k+1} &= (\exp(x))^k \exp(x) \\ &= exp(kx)\exp(x) \text{ (HR)} \\ &= \exp(kx+x) \\ &= \exp((k+1)x) \end{aligned}$$
   L'hérédité est donc vraie. La formule est alors vraie pour tout entier naturel n.

...

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{(\exp(x))^n} = (\exp(x))^{-n}$.
La formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$. ■

Notation *Nouvelle notation*

Afin d'alléger les notations, on notera :

- $\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2,718$
- $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

Propriété *Signe de la fonction exponentielle*

Pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^x > 0.$$

Démonstration

En effet,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{2\times\frac{x}{2}} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

Un carré étant toujours positif, $\mathrm{e}^x > 0$ car l'exponentielle ne s'annule pas. ■

Remarque

Nous venons de voir que :

$$\mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

On en déduit alors :

$$\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Propriété *Sens de variation*

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

On sait que la fonction exponentielle est égale à sa dérivée. Or, elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

Propriété

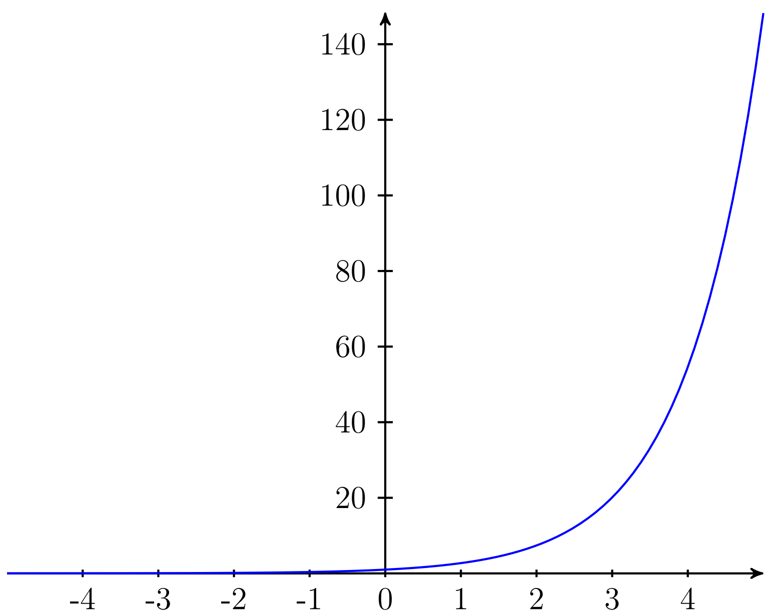
Limites

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Démonstration

- Posons, pour $x \in [0\,;+\infty[$:
$$d(x) = e^x - x.$$
Alors,
$$d'(x) = e^x - 1 = e^x - e^0.$$
La fonction exponentielle étant strictement croissante, $e^x > e^0$ sur $[0\,;+\infty[$. On en déduit alors que $d'(x) > 0$, donc que d est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Ainsi, sur $[0\,;+\infty[$, $d(x) > d(0) > 0$. Donc, $e^x > x$.
Par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ d'après ce qui précède. ■

La courbe représentative de la fonction exponentielle est la suivante :



On peut remarquer que la fonction croît très rapidement, d'où l'expression « croître de façon exponentielle » lorsque l'on parle d'une forte croissance.

Propriétés

Croissances comparées

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty.$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0.$

Démonstration

1 En posant $f(x) = \mathrm{e}^x$, on sait que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f'(0),$$

soit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1,$$

d'où la formule.

2 On pose $d(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ pour $x \in [1\,;+\infty[$.
Ainsi,

$$d'(x) = \mathrm{e}^x - 2x \qquad \text{et} \qquad d''(x) = \mathrm{e}^x - 2.$$

$\mathrm{e}^1 \approx 2,718 > 2$ et la fonction exponentielle est strictement croissante donc sur $[1\,;+\infty[$, $d''(x) > 0$.
On en déduit que d' est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. De plus, $d'(1) \approx 0,718 > 0$ donc $d'(x) > 0$ sur $[1\,;+\infty[$. Ce qui implique que d est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$. Or, $d(1) \approx 1,718 > 0$ donc $d(x) > 0$ sur $[1\,;+\infty[$. On a alors, sur $[1\,;+\infty[$:

$$\mathrm{e}^x > x^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{e}^x}{x} > x.$$

Ainsi, par comparaison, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

3 De ce qui précède, on peut en déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

De plus, on a :

$$x\mathrm{e}^x = \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{-x}{\mathrm{e}^{-x}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{X}{\mathrm{e}^X}\right) = 0.$$

■

Propriété

Équations et inéquations

Pour tous réels x et y,

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = y \qquad ; \qquad \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x < y.$$

Démonstration

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc si deux nombres ont la même image par cette fonction, nécessairement, ils sont égaux : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftarrow x = y$. Réciproquement, si $x = y$, il est immédiat d'écrire que leur image sont égales : $x = y \Leftarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$. D'où la première équivalence.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $x < y \Leftarrow \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$. On peut aussi en déduire que $x \geqslant y \Leftarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^y$. En prenant la contraposée de cette dernière implication, on obtient : $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \Leftarrow x < y$. D'où la seconde équivalence. ■

Exemple

1 Résoudre l'équation : $\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{2x-1} = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{2x-1} = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{2x-1} \\
&\Leftrightarrow x^2 = 2x - 1 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1.
\end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution : $x = 1$.

2 Résoudre l'inéquation : $\mathrm{e}^{2x} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x} \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x} &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} \geqslant \mathrm{e}^1 \\
&\Leftrightarrow 3x \geqslant 1 \\
&\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

L'inéquation admet donc comme ensemble solution l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Propriété *Dérivée de e^u*

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La dérivée de la fonction e^u est :

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u.$$

Démonstration

Soit $a \in \mathrm{I}$. Posons $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.
Alors,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^{u(a+h)} - \mathrm{e}^{u(a)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{u(a+h)} - \mathrm{e}^{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \right)
\end{aligned}$$

…

Or,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{u(a+h)} - \mathrm{e}^{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} = \lim_{H\to 0} \frac{\mathrm{e}^{u(a)+H} - \mathrm{e}^{u(a)}}{H}$$

en posant $H(h) = u(a+h) - u(a)$. En effet, H tend vers 0 quand h tend vers 0.
Ainsi, $\lim\limits_{H\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{u(a)+H} - \mathrm{e}^{u(a)}}{H}$ représente le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en $u(a)$. On en déduit donc que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{u(a+h)} - \mathrm{e}^{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} = \mathrm{e}^{u(a)}.$$

D'où :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{u(a)} \times u'(a).$$

■

Exemple

On pose : $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Donc, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = -x^2$.
$u'(x) = -2x$ donc :

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Propriété

Variation de e^u

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction e^u admet les mêmes variations que la fonction u.

Démonstration

Nous avons vu que $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
Ainsi, la dérivée est du même signe que u' (car $\mathrm{e}^u > 0$).
Les variations de e^u sont donc les mêmes que celles de u. ■