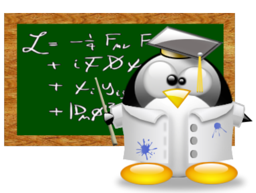
Probabilités conditionnelles

Stéphane PASQUET, 22 mars 2015

Sommaire



Prérequis

- Probabilités élémentaires
- Loi de probabilités
- Variable aléatoire
- Loi binomiale

Définition *Probabilités conditionnelles*

Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$.
On appelle probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé le nombre noté $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ défini par :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Propriété *Probabilité d'une intersection*

Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$. Alors,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}).$$

Démonstration

Elle découle de la définition : l'égalité des produits en croix mène à la propriété. ■

Exemple

Dans une urne, on place 10 boules, 3 noires et 7 rouges. On tire au hasard 3 boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

En notant :

- N_1 l'événement « la boule tirée est noire au 1^{er} tirage »,
- N_2 l'événement « la boule tirée est noire au 2^{e} tirage »,

la probabilité demandée est $\mathrm{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2)$.

- $\mathrm{P}(\mathrm{N}_1) = \dfrac{3}{10}$ car il y a 3 boules noires sur 10 lors du 1^{er} tirage ;
- $\mathrm{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{2}{9}$ car il ne reste plus que 2 boules noires sur 9 au 2^{e} tirage si l'on sait que l'on a déjà tiré une boule noire au 1^{er} tirage.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2) &= \mathrm{P}(\mathrm{N}_1) \times \mathrm{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{N}_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Propriété *Probabilité conditionnelle d'un événement contraire*

Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$. Alors,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 1 - \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}).$$

Démonstration

Par définition,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Or,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right),$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) &= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\\ &= 1 - \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}\\ &= 1 - \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}).\end{aligned}$$

■

Définition

Partition

On dit que les n événements A_1, ... , A_n `forment une partition de` Ω si :

- tous les événements sont incompatibles deux à deux : $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$, pour tout $i \neq j$;
- $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n = \Omega$.

Remarque

Quel que soit l'événement A, A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition de l'univers.

Propriété

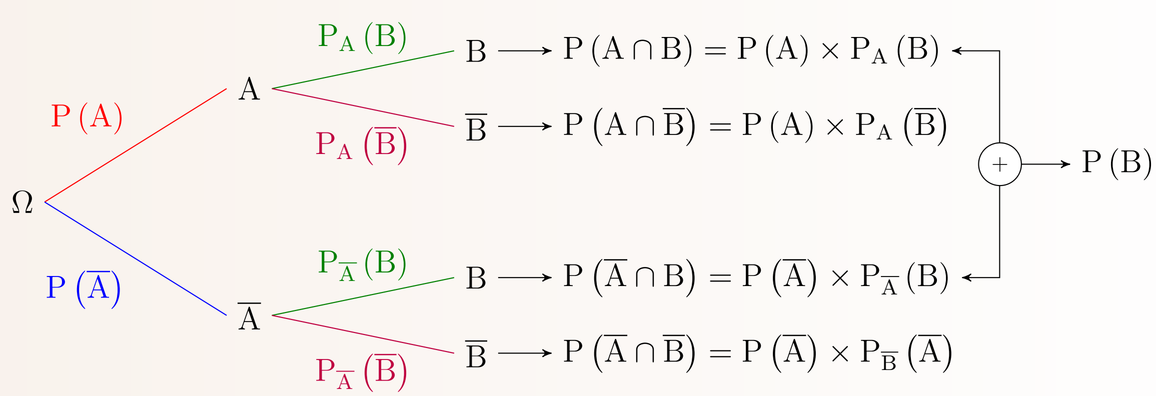
Formule des probabilités totales (version light)

Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$. Alors,

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right).$$

Méthode

Arbre pondéré : représentation des probabilités conditionnelles



Propriété

Formule des probabilités totales (version complète)

Soient A_1, A_2, ..., A_n n événements formant une partition de l'univers, avec $P(A_k) \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, pour tout événement B,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Démonstration

Les événements $A_k \cap B$ sont incompatibles deux à deux.
De plus,

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B).$$

Donc,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

■

Exemple

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

N° de la machine utilisée	1	2	3
Pourcentage de pièces produites	50	35	15
Fréquence des défauts par machine	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.
Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

On convient de noter :

- M_k l'événement : « La pièce provient de la machine n° k » ;
- D l'événement : « La pièce est défectueuse ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3) \\ &= P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D) \\ &= 0,5 \times 0,01 + 0,35 \times 0,02 + 0,15 \times 0,06 \\ &= 0{,}021\,2. \end{aligned}$$

Propriété

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors,

$$P_B(A) = P(A) \Longleftrightarrow P_A(B) = P(B).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) &\iff \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \\ &\iff \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \mathrm{P}(\mathrm{B}) \\ &\iff \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\end{aligned}$$

■

Définition *Événements indépendants*

Soient A et B deux événements tels que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$.
On dits que A et B sont `indépendants` quand $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre.

Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) &\iff \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \\ &\iff \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}).\end{aligned}$$

■

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements :

- A : « Tirer un cœur » ;
- B : « Tirer un roi ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On a :

- $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{4}$ car il y a 8 cœurs sur les 32 cartes en tout ;
- $\mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{4}$ car, sachant que la carte est un roi, il n'y a qu'une seule carte portant un cœur sur les 4 rois.

On a alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$, ce qui signifie que A et B sont indépendants.

Propriété

Soient A et B deux événements indépendants.
Alors, A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration

On sait que :

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B).$$

Or,

$$P_A(B) = P(B)$$

car les événements A et B sont indépendants.
D'où :

$$P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = P\left(\overline{B}\right),$$

ce qui signifie que A et $\overline{B}$ sont indépendants. ■

Remarque

Deux événements A et B incompatibles tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ ne sont pas indépendants.
En effet, A et B incompatibles signifie d'une part que $P(A) \times P(B) \neq 0$, d'autre part que $P(A \cap B) = 0$.
Ainsi, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$; les événements ne sont donc pas indépendants.