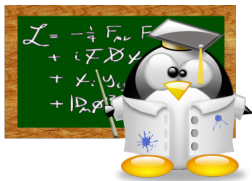


Sommaire

Primitives d'une fonction continue	2
Existence	2
Primitives des fonctions usuelles	3



Prérequis

- Généralités sur les fonctions
- Fonction exponentielle
- Fonction logarithme

Définition

Primitives d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que F est **une primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout réel x de I , $F'(x) = f(x)$.

Exemples

- $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ est une primitive de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$;
- $F(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x + 5) - 7$ est une primitive de $f(x) = \cos(3x + 5)$ sur $\mathbb{R}$.
- $F(x) = -\frac{1}{x}$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$.

Théorème

Existence

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.

Remarque

Une fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives.

En effet, si F est une primitive de f sur I , alors, pour $k \in \mathbb{R}$, $F + k$ l'est aussi car, sur I :

$$(F(x) + k)' = F'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x).$$

On dit que les primitives sont définies à une constante près.

Propriété

Soit f une fonction continue sur I , et soient F et G deux primitives de f .

Alors, $F - G$ est une fonction constante sur I .

Démonstration

Si F et G sont deux primitives de f sur I , $F' = G' = f$.

Donc, $F' - G' = 0$, soit $(F - G)' = 0$. Ce qui signifie que la fonction $F - G$ est constante sur I .

■

Propriété

Soit f une fonction continue sur I . Soient x_0 et y_0 deux réels, $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit F une des primitives de f sur I . On sait que toutes les primitives de f sont de la forme $F + k$; il suffit donc de chercher k pour que $F(x_0) + k = y_0$. On trouve une solution unique pour k , $k = -F(x_0) + y_0$, donc il existe une et une seule primitive vérifiant la condition imposée. Cette solution G est telle que $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$. ■

Exemple

Trouvons la primitive de la fonction carré qui prend la valeur 1 en 2.

L'ensemble des primitives de la fonction carré est l'ensemble des fonctions $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$, $k \in \mathbb{R}$.

On veut que $F(2) = 1$, donc $\frac{1}{3}2^3 + k = 1$, soit $k = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$.

On trouve alors que la primitive cherchée est la fonction $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux nombres de I . Soit F une primitive de f .

La différence $F(a) - F(b)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

Démonstration

Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I .

Alors, il existe un réel k tel que $F_2(x) = F_1(x) + k$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_2(a) - F_2(b) &= F_1(a) + k - (F_1(b) + k) \\ &= F_1(a) + k - F_1(b) - k \\ &= F_1(a) - F_1(b) \end{aligned}$$

Nous voyons alors que les deux différences sont égales. ■

Propriété

Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$	I
0	$k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
1	$x + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$

...

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$

Remarque

Il existe des fonctions dont on ne connaît pas de primitives ; par exemple, $x \mapsto e^{-x^2}$.

Propriétés

- Si $f(x) = e^{ax+b}$ alors $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$, avec $a \neq 0$ et b quelconque.
- Si $f(x) = \frac{u'}{u}(x)$ alors $F(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) > 0$.