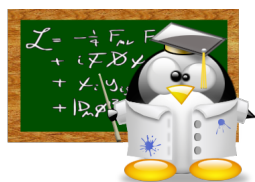


Sommaire

Intégrale	2
Lien avec les primitives	2
Propriétés élémentaires	4
Comparaison de deux intégrales	4
Relation de Chasles	5
Valeur moyenne d'une fonction	5
Inégalité de la moyenne	5
Linéarité de l'intégrale	6
Complément 1 : La méthode des rectangles	8
Complément 2 : Vers une primitive du logarithme naturel	10
Complément 3 : Calcul d'un volume	11



Prérequis

- Raisonnement par récurrence et suites numériques
- Continuité et théorème des valeurs intermédiaires
- Dérivées
- Primitives
- Logarithme népérien

Définition

Intégrale

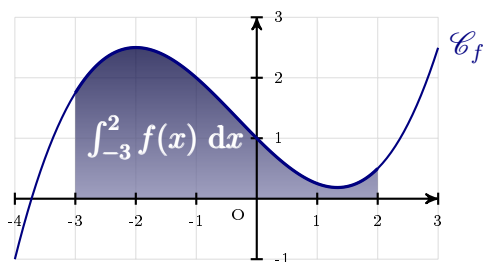
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a; b]$.

On appelle **intégrale de f sur I** l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et celle d'équation $x = b$.

On note alors cette intégrale :

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

On peut visualiser $\int_a^b f(x) \, dx$ de la façon suivante :



Propriété

Lien avec les primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$, et soit F une primitive de f sur I . Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Notation

On note aussi :

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Démonstration

Considérons le cas où f est strictement monotone sur I et notons :

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x) \, dx$$

l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = t$, $t > 0$.

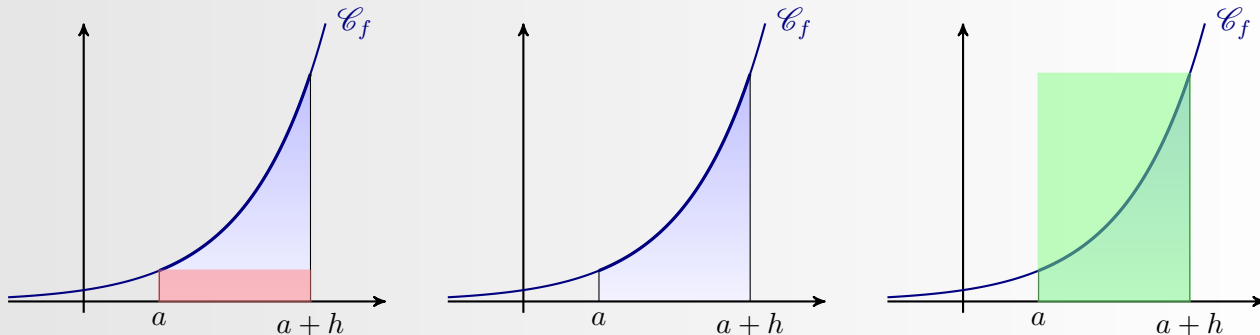
Ainsi,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a),$$

ou encore, si on pose $b = a + h$, $h \geq 0$,

$$\int_a^{a+h} f(x) \, dx = \mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a).$$

On a alors :



L'aire représentée par $\int_a^{a+h} f(x) \, dx$ est comprise entre celle des deux rectangles rouge et vert :

$$h \times \min(f(a); f(a+h)) \leq \int_a^{a+h} f(x) \, dx \leq h \times \max(f(a); f(a+h)).$$

Ainsi,

$$\min(f(a); f(a+h)) \leq \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) \, dx \leq \max(f(a); f(a+h)),$$

ou encore :

$$\min(f(a); f(a+h)) \leq \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} \leq \max(f(a); f(a+h)).$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(a+h) - \mathcal{A}(a)}{h} = f(a),$$

ce qui signifie que $\mathcal{A}(t)$ est une primitive de f sur I .

On prouve donc que sur tout intervalle où f est strictement monotone, $\int_a^t f(x) \, dx$ est une primitive de f .

Considérons maintenant que f n'est pas strictement monotone sur I . Notons alors :

$$I = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$$

où les C_i sont des intervalles où f est croissante et D_i des intervalles où f est décroissante.

On peut utiliser ce que l'on vient de prouver afin de démontrer que sur I , $\int_a^t f(x) \, dx$ est la somme des primitives de f sur les C_i et D_i donc sur I . ■

Remarques

1 « $\int_a^b f(x) dx$ » si lit : « intégrale de a à b de $f(x) dx$. »

2 Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, le « dx » représente la largeur des rectangles que l'on utilise dans la *méthode des rectangles* (voir le bonus 1 de ce cours) pour approximer l'intégrale (c'est ainsi que l'on écrivait l'intégrale à l'origine, et cela est resté ainsi jusqu'à aujourd'hui).

3 Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, « x » est ce que l'on appelle une *variable muette*, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre dans la mesure où il n'y a aucune ambiguïté. Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

4 Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, a et b sont appelés les *bornes de l'intégrale*.

5 $\int_a^b f(x) dx$ est toujours exprimée en *unités d'aire* (u.a.) (où 1 u.a. représente l'aire du rectangle (ou carré) de côtés 1 (en abscisses) et 1 (en ordonnées).
Par exemple, si l'on prend 1,5 cm pour 1 unité en abscisses et 2 cm pour unité en ordonnées, 1 u.a. = 3 cm².

Propriétés

Propriétés élémentaires

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

Alors,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

En considérant l'intégrale comme une aire, ces propriétés sont évidentes.

Propriété

Comparaison de deux intégrales

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a; b]$ telles que :

$$\forall x \in [a; b], f(x) \leq g(x).$$

Alors,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration

Une fois de plus, en considérant les deux intégrales comme deux aires, celle relative à g est supérieure à celle relative à f car $f(x) \leq g(x)$. D'où le résultat. ■

Propriété

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Soit $c \in [a; b]$.

Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Démonstration

Il suffit une fois de plus de considérer l'aire représentée par $\int_a^b f(x) \, dx$ et de la couper en deux à l'aide de la droite d'équation $x = c$.

Les deux aires s'ajoutent d'où le résultat. ■

Définition

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, $a \neq b$.

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a; b]$** le nombre défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Remarque

Notons que :

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x) \, dx,$$

ce qui signifie que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est identique à celle du rectangle de base $(b-a)$ et de hauteur μ .

La valeur moyenne correspond donc à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ qui a la même aire que $\mathcal{D}$.

Propriété

Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, $a \neq b$, et soit μ la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

Si il existe deux nombres m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m \leq \mu \leq M$.

Démonstration

D'après la propriété de comparaison,

$$\begin{aligned} m \leq f(x) \leq M &\iff \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx \\ &\iff m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a) \\ &\iff m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $I = [a; b]$.

La fonction définie sur I par :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

est la fonction dérivable sur I qui s'annule en a et dont la fonction dérivée est f .

Ce théorème est la conséquence de la première démonstration faite dans ce cours.

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $I = [a; b]$.

Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

Démonstration

La relation de Chasles nous donne :

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^a f(x) \, dx = \int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

D'où le résultat. ■

Propriété

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a; b]$. Soit α un réel quelconque. Alors,

$$\int_a^b (\alpha f + g)(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Démonstration

Posons F et G deux primitives respectives de f et g . On a alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + g)(x) \, dx &= [\alpha F(x) + G(x)]_a^b \\ &= \alpha F(b) + G(b) - \alpha F(a) - G(a) \\ &= \alpha(F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.\end{aligned}$$

■

Remarque

De cette propriété, on peut déduire, en prenant $\alpha = -1$ et $g(x) = 0$:

$$\int_a^b (-f(x)) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

Cela signifie que si une fonction est négative sur $[a; b]$, son intégrale est négative. On parlera alors d'*aire algébrique* (avec un signe).

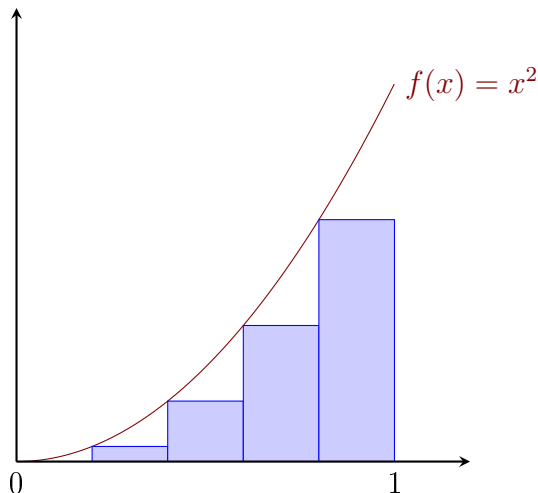
Ainsi, tout ce qui a été dit pour les fonctions positives reste valable pour les autres fonctions.

Complément 1: La méthode des rectangles

Intéressons-nous à $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$ dans le cas où $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x^2$.

Dans un premier temps, nous subdivisons $[a; b]$ en n segments de même longueur (pour l'exemple, on prendra $n = 5$).

Ensuite, construisons n rectangles comme représentés ci-dessous :



Notons r_k le k^{e} rectangle, k variant de 0 à $n - 1$.

Chaque rectangle aura une base de longueur $\frac{b-a}{n}$ et une hauteur égale à $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

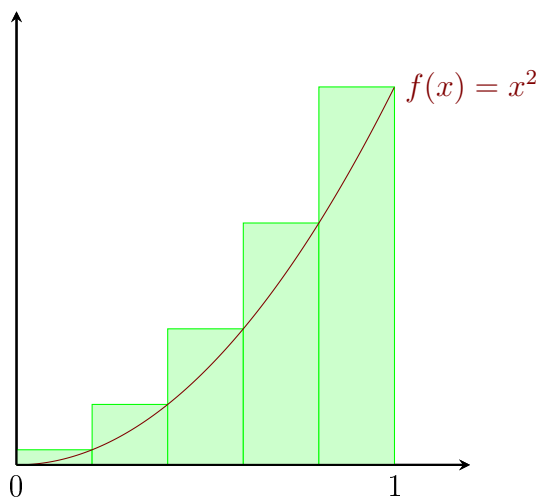
Ainsi, r_k aura une aire égale à :

$$\mathcal{A}(r_k) = \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Dans notre exemple, on a :

$$\mathcal{A}(r_k) = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^3}.$$

Construisons maintenant n rectangles comme suit :



Notons R_k le k^{e} rectangle, k variant de 0 à $n - 1$.

Chaque rectangle aura une base de longueur $\frac{b-a}{n}$ et une hauteur égale à $f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)$.

Ainsi, r_k aura une aire égale à :

$$\mathcal{A}(R_k) = \frac{b-a}{n} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right).$$

Dans notre exemple, on a :

$$\mathcal{A}(R_k) = \frac{1}{n} \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 = \frac{(k+1)^2}{n^3}.$$

Remarquons maintenant que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}(r_k) \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}(R_k).$$

Remarquons aussi que plus n tend vers l'infini, plus il y a de rectangles qui se rapprochent de la courbe et donc plus la somme des aires se rapproche de $\mathcal{A}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}(r_k) = \mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{A}(R_k).$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ce dernier résultat aura pu être démontré par récurrence dans le chapitre des suites numériques)

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(r_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit alors que :

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Nous venons de voir sur un exemple simple en quoi consiste la *méthode des rectangles*.

Bien entendu, la fonction à intégrer est simple et à l'aide du cours, nous pouvons calculer $\int_0^1 f(x) dx$ à l'aide d'une primitive de f , mais toutes les fonctions à intégrer n'auront pas une primitive connue. C'est en cela que cette méthode pourra nous aider (bien qu'elle ne soit pas la meilleure des méthodes d'approximation d'aire par algorithme).

Prenons par exemple : $I = \int_1^2 \ln x dx$. Nous ne connaissons pas de primitives de $f : x \mapsto \ln x$ donc nous allons utiliser un algorithme qui s'appuie sur la méthode des rectangles pour trouver la valeur de I .

Nous allons donc considérer la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right),$$

qui correspond à la somme des aires des r_k .

Algorithme 1

Entrées

$n \leftarrow 2000$
 U : liste
 k, i : variables entières

Traitement

Pour i allant de 1 à n

$U[i] \leftarrow 0$

Pour k allant de 0 à $i-1$ par pas de 1

$U[i] \leftarrow U[i] + \ln(1+k/i)/i$

Fin du Pour Afficher $U[i]$

Fin du Pour

Cet algorithme permet d'obtenir une valeur approchée de u_{2000} . Il retourne la valeur $u_{2000} \approx 0,386\,121\,063\,908\,08$. Nous allons vérifier cette valeur dans le complément suivant.

Complément 2: Vers une primitive du logarithme naturel

Nous ne connaissons pas de primitives du logarithme naturel. Nous allons en trouver une à l'aide de l'intégration par parties.

Théorème

Intégration par parties (hors programme)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$.

Alors,

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [uv(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Démonstration

Nous savons que :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

D'où :

$$\underbrace{\int_a^b (uv)'(x) \, dx}_{=[uv(x)]_a^b} = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx,$$

soit :

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [uv(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

■

Considérons : $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = \int_1^x \ln t \, dt$.

Posons alors :

$$\begin{array}{ll} u(t) = \ln t & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{array}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$f(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} \, dt,$$

soit : $f(x) = x \ln x - 1 \ln 1 - [t]_1^x$, ou encore : $f(x) = x \ln x - x + 1$.

D'après le cours, $\int_a^x u(t) \, dt$ est la primitive de u qui s'annule en a .

On en déduit qu'une primitive de $\ln x$ est $x \ln x - x$.

Dans le complément précédent, nous avons trouvé qu'une valeur approchée de $\int_1^2 \ln x \, dx$ était 0,3844.

La calculatrice nous donne : $f(2) = 2 \ln 2 - 2 \approx 0,386294361$.

On constate alors que l'algorithme précédent semble converger vers cette valeur, mais de façon très lente.

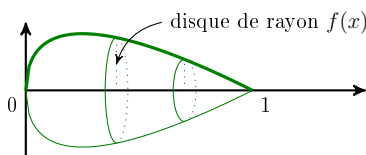
À titre d'information, il retourne $u_{5000} \approx 0,38622504473517$.

Complément 3: Calcul d'un volume

On considère, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - x.$$

À partir de sa courbe représentative (en trait épais ci-dessous), on engendre un volume en la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, comme indiqué sur le graphique suivant :



On peut voir ce volume comme la somme des aires des disques de rayon $f(x)$, pour x variant de 0 à 1. Un de ces disques a pour aire : $\pi (f(x))^2$.

Ainsi, le volume peut se calculer par :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi (f(x))^2 \, dx &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^1 (x - 2x\sqrt{x} + x^2) \, dx \\ &= \pi \int_0^1 x \, dx - 2\pi \int_0^1 x\sqrt{x} \, dx + \pi \int_0^1 x^2 \, dx \end{aligned}$$

Posons :

$$I = \int_0^1 x\sqrt{x} \, dx$$

et calculons-là à l'aide d'une intégration par parties.

On pose alors : $u(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = x$ et donc $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$. D'où :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{4} \frac{x^2}{\sqrt{x}} \, dx \\ I &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^1 x\sqrt{x} \, dx \\ I &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}I \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}$, soit : $I = \frac{2}{5}$.

Le volume cherché est donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi (f(x))^2 \, dx &= \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 - \frac{4\pi}{5} + \pi \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{30}. \end{aligned}$$