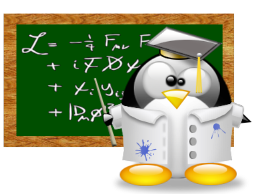
Sommaire



Prérequis

- Raisonnement par récurrence et suites géométriques (pour le Complément 1)
- Fonction exponentielle

Définitions *Ensemble des nombres complexes, forme algébrique*

L'`ensemble des nombres complexes` est un ensemble, noté $\mathbb{C}$, de dimension 2 (contrairement à $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1) dont une base est l'ensemble $\{1; \mathrm{i}\}$, c'est-à-dire que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists (a\,;b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid z = a + \mathrm{i}b.$$

où i est un nombre imaginaire tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
a est appelée la `partie réelle` de z et b, sa `partie imaginaire`.
L'écriture « $a + \mathrm{i}b$ » ou « $a + b\mathrm{i}$ » est appelée la `forme algébrique` du nombre complexe z.
Si $a = 0$, on dira que z est un `imaginaire pur`.
Si $b = 0$, on dira que z est un `réel pur`.

Remarque

Tout nombre réel est aussi complexe.

Notations

Si $z = a + \mathrm{i}b$, alors on notera $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$.

Exemples

1. $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ est un nombre complexe de partie réelle $\mathrm{Re}(z) = 3$ et de partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) = 2$.
2. $z_2 = -5 - 6\mathrm{i}$ est un nombre complexe de partie réelle $\mathrm{Re}(z) = -5$ et de partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) = -6$.
3. $z_3 = 4\mathrm{i}$ est un nombre complexe de partie réelle $\mathrm{Re}(z) = 0$ et de partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) = 4$.
4. $z_4 = -5$ est un nombre complexe de partie réelle $\mathrm{Re}(z) = -5$ et de partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Propriétés *Somme et différence de deux nombres complexes*

Soient $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes.
Alors,

$$z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b') \qquad z - z' = (a - a') + \mathrm{i}(b - b')$$

$$z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

Exemples

1. $(3 + 2\mathrm{i}) + (5 - 4\mathrm{i}) = (3 + 5) + \mathrm{i}(2 - 4) = 8 - 2\mathrm{i}.$
2. $(3 + 2\mathrm{i}) - (5 - 4\mathrm{i}) = (3 - 5) + \mathrm{i}(2 + 4) = -2 + 6\mathrm{i}.$

Propriété *Produit de deux nombres complexes*

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
Alors,
$$zz' = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + ba').$$

Démonstration

En appliquant la double distributivité, on a :

$$\begin{aligned} zz' &= (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') \\ &= aa' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' + \mathrm{i}^2 bb' \\ &= (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba') \end{aligned}$$

■

Définition *Conjugué d'un nombre complexe*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle `conjugué` de z le nombre :
$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Exemples

1. Le conjugué de $z_1 = -3 + 5\mathrm{i}$ est $\overline{z_1} = -3 - 5\mathrm{i}$.
2. Le conjugué de $z_2 = 2 - 3\mathrm{i}$ est $\overline{z_2} = 2 + 3\mathrm{i}$.

Propriété

Soit z un nombre complexe. Alors,
$$z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2.$$

Démonstration

Posons $z = a + ib$. Alors,
$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) \\ &= a^2 - \mathrm{i}ab + \mathrm{i}ab - \mathrm{i}^2 b \\ &= a^2 + b^2 \qquad \text{car } \mathrm{i}^2 = -1 \end{aligned}$$

Donc, $z\overline{z} = a^2 + b^2$. ■

Méthode *Quotient de deux nombres complexes*

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, $z' \neq 0$.
Alors, pour déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\overline{z'}$.

Exemple

$$\begin{aligned}\frac{3-2\mathrm{i}}{5-3\mathrm{i}} &= \frac{(3-2\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})}{(5-3\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})}\\ &= \frac{15+9\mathrm{i}-10\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{5^2-(3\mathrm{i})^2}\\ &= \frac{15-1\mathrm{i}-6\times(-1)}{25-9\times(-1)}\\ &= \frac{21-\mathrm{i}}{25+9}\\ &= \frac{21}{34}-\frac{1}{34}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Remarque

On est assuré d'avoir la forme algébrique à l'aide de cette méthode car $z'\overline{z'} \in \mathbb{R}$ d'après la propriété précédente.

Propriétés

Propriétés sur les conjugués

Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
3. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
4. $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$
5. $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
6. $\overline{zz'} = \overline{z}\times\overline{z'}$
7. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$

Démonstration

Posons $z = a+\mathrm{i}b$ et $z' = a'+\mathrm{i}b'$.

1. $\overline{z} = a-\mathrm{i}b$ donc $\overline{\overline{z}} = a+\mathrm{i}b = z$.
2. $\overline{z}-z = a-\mathrm{i}b-(a+\mathrm{i}b) = -2\mathrm{i}b$. Donc $\overline{z}-z = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Ainsi, $z \in \mathbb{R}$.
3. $z+\overline{z} = 2a$ donc $\mathrm{Re}(z) = a = \dfrac{\overline{z}+z}{2}$.
4. $z-\overline{z} = 2\mathrm{i}b$ donc $\mathrm{Im}(z) = b = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
5. $\overline{z+z'} = \overline{(a+a')+\mathrm{i}(b+b')} = a+a'-\mathrm{i}(b+b') = a-\mathrm{i}b+a'-\mathrm{i}b' = \overline{z}+\overline{z'}$.
6. $\overline{zz'} = \overline{(aa'-bb')+\mathrm{i}(a'b+ba')} = (aa'-bb')-\mathrm{i}(a'b+ba')$.
   $\overline{z}\times\overline{z'} = (a-\mathrm{i}b)(a'-\mathrm{i}b') = aa'-\mathrm{i}ab'-\mathrm{i}ba'+\mathrm{i}^2bb' = (aa'-bb')-\mathrm{i}(ab'+ba')$.
   Donc $\overline{zz'} = \overline{z}\times\overline{z'}$.
7. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \dfrac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$ donc $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{1}{|z'|^2}\overline{z\overline{z'}} = \dfrac{1}{|z'|^2}\overline{z}z'$ et $\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \dfrac{\overline{z}z'}{\overline{z'}z'} = \dfrac{\overline{z}z'}{|z'|^2} = \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$.
8. On démontre cette propriété par récurrence à l'aide de la propriété 1. ∎

Propriétés

1 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$.

2 $\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Les démonstrations sont évidentes.

Propriété

Équation du second degré à coefficients réels

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ un polynôme de degré 2, avec a, b et c trois réels. On pose alors $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.
Si $\Delta \geqslant 0$, les solutions (réelles) de l'équation $P(z) = 0$ sont données par les formules vues en classe de 1^re^.
Si $\Delta < 0$, alors les solutions (complexes) de l'équation $P(z) = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
P\left(z_1\right) &= a\left(\frac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2 + b\frac{-b-\sqrt{|\Delta|}}{2a} + c \\
&= \frac{b^2 + 2b\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|} - |\Delta|}{4a} + \frac{-b^2 - b\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} + c \\
&= \frac{b^2 + 2b\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|} - |\Delta| - 2b^2 - 2b\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|} + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac - |\Delta|}{4a} \\
&= \frac{-\Delta - |\Delta|}{4a} \\
&= \frac{-\Delta + \Delta}{4a} \qquad \text{car } \Delta < 0 \text{ donc } |\Delta| = -\Delta \\
&= 0
\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que $P(z_2) = 0$, ce qui prouve que z_1 et z_2 sont deux solutions de l'équation $P(z) = 0$.
Il ne peut y avoir d'autres solutions car cela supposerait que $P(z)$ se factorise sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)(z - \alpha)$, où α serait une troisième solution. Or, en développant cette forme factorisée, on arrive à un polynôme de degré 3, ce qui contredit notre hypothèse.
Ainsi, il n'existe que deux solutions à l'équation $P(z) = 0$ qui sont z_1 et z_2. ■

Remarque

Les deux racines complexes d'une équation de degré 2 sont deux nombres complexes conjugués.

Exemple

Soit l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

Les deux solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Dans le monde des complexes, on notera $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On vient alors de voir que $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$, d'où la relation :

$$-\mathrm{j}^2 = 1 + \mathrm{j}.$$

On pourrait aussi montrer que $\frac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$.

En électronique, on utilise la lettre j à la place de la lettre i.
On notera par exemple en électronique : $R + \mathrm{j}L\omega$ et $R - \frac{\mathrm{j}}{C\omega}$.

Définition — *Affixe d'un point (représentation graphique d'un nombre complexe)*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. z est appelé l'`affixe` du point M ou du vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;b)$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ (que l'on nommera `plan d'Argand-Cauchy`).
On notera alors $\mathrm{M}(z)$ et $\vec{w}(z)$.

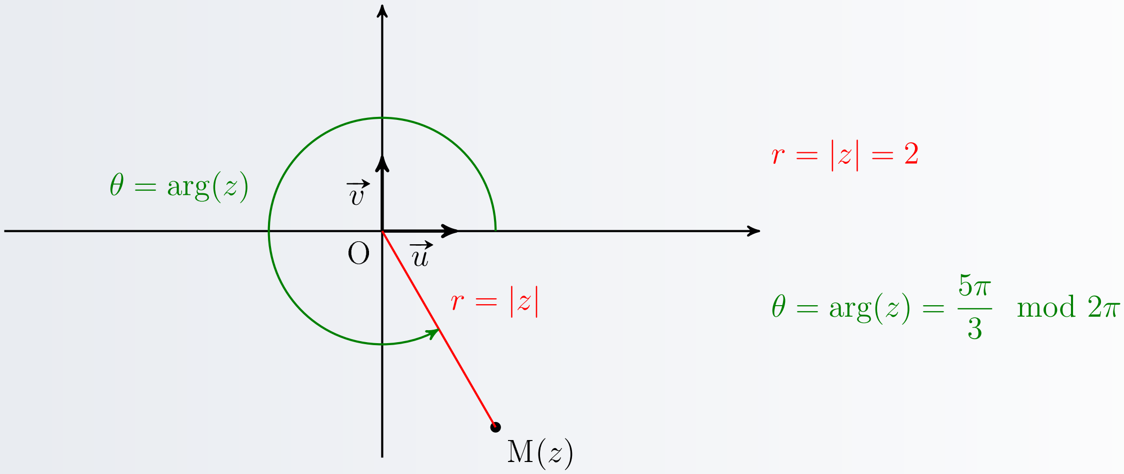
Définitions — *Module et argument*

Dans le plan d'Argand-Cauchy, soit $\mathrm{M}(z)$.
On définit le `module` de z comme étant la longueur du segment OM, et on le note $|z|$.
On définit un `argument` de z comme étant une mesure de l'angle que fait $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ avec $\vec{u}$. On le note $\arg(z)$.

$$|z| = \mathrm{OM} \qquad ; \qquad \arg(z) = \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \mod 2\pi.$$

On note souvent $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Exemple



Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
Alors,

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

Démonstration

En considérant le point H, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, on applique les formules de trigonométrie vues en 3e dans le triangle rectangle OMH, quitte à utiliser les formules de trigonométrie de 1re dans le cas où $\theta > \pi$. ■

Définition *Forme trigonométrique d'un nombre complexe*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, d'après la propriété précédente, on peut aussi écrire z sous la forme :

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

où r et θ représentent respectivement le module et un argument de z.
Cette écriture est appelée la `forme trigonométrique` de z.

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Démonstration

Si H est le projeté orthogonal de $M(z)$ sur l'axe des abscisses, alors d'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle OHM,

$$\mathrm{OM}^2 = a^2 + b^2,$$

d'où la propriété (car $\mathrm{OM} \geqslant 0$). ■

Méthode

Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle

Soit $z = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.

1 On calcule le module.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{12+4} \\ &= \sqrt{16} \\ |z| &= 4. \end{aligned}$$

2 On factorise z par son module.

$$z = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

3 On détermine alors un argument.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{6} \mod 2\pi.$$

4 On en déduit la forme algébrique de z.

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Propriété

Soit z un nombre complexe. Alors,

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

Démonstration

Posons $z = a + ib$.
D'une part, on a :

$$z\overline{z} = a^2 + b^2 \qquad \text{(vu précédemment).}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. ∎

Propriétés

Propriétés sur les modules et les arguments

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors,

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
2. $|z^n| = |z|^n$ et $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z)$.
3. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
4. $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z)$.

Démonstration

On pose $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$.

1. $$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\ &= rr'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')] \\ &= rr'[\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')] \\ &= R(\cos\Theta + \mathrm{i}\sin\Theta) \quad \text{avec } R = rr' \text{ et } \Theta = \theta + \theta' \end{aligned}$$
   Ainsi, $|zz'| = rr' = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.
2. Cette propriété se démontre par récurrence à l'aide de la propriété précédente.
3. $$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' - \mathrm{i}\sin\theta')}{r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')(\cos\theta' - \mathrm{i}\sin\theta')} \\ &= \frac{r}{r'} \times \frac{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta')}{1} \\ &= \frac{r}{r'}\left[\cos(\theta-\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta-\theta')\right]. \end{aligned}$$
   Ainsi, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg(z) - \arg(z')$.
4. $\overline{z} = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)]$.
   Ainsi, $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z)$ et $|\overline{z}| = r = |z|$.

∎

Propriété *Inégalité triangulaire*

Pour tous nombres complexes z et z',

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|.$$

Démonstration

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Alors,

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= (a+a')^2 + (b+b')^2 && (1)\\ &= a^2+b^2+(a')^2+(b'^2)+2(aa'+bb') && (2)\\ &= |z|^2+|z'|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) && (3) \end{aligned}$$

Posons $z\overline{z'} = x + \mathrm{i}y$. On a :

$$\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant \left|\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)\right| = \sqrt{x^2}. \qquad (4)$$

De plus,

$$x^2 \leqslant x^2 + y^2.$$

Donc, par croissance de la fonction racine carrée,

$$\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = |z\overline{z'}|. \qquad (5)$$

De (4) et (5), on déduit :

$$\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z\overline{z'}|.$$

Ainsi, l'égalité (3) devient :

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2+|z'|^2+2|zz'|,$$

soit :

$$|z+z'|^2 \leqslant \left(|z|+|z'|\right)^2.$$

On en déduit alors (par la positivité des modules) :

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|.$$

■

Propriété

La fonction $f : \theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle :

$$\forall\,(\theta\,;\theta') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta') \qquad , \qquad f(0)=1.$$

Démonstration

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta\cos\theta'). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' + \mathrm{i}\cos\theta\sin\theta' + \mathrm{i}\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ &= f(\theta+\theta'). \end{aligned}$$

De plus,

$$f(0) = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1 + \mathrm{i}\times 0 = 1.$$

■

Définition *Forme exponentielle d'un nombre complexe*

Soit $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.
La `forme exponentielle` de z est :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Cette relation est aussi appelée la *formule d'Euler*.

Théorème *Formule de Moivre*

$$\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

La démonstration de ce théorème a déjà été évoquée précédemment car nous avons vu que $\arg(z^n) = n\arg(z)$ et que $|z^n| = |z|^n$.

Théorème *Formules d'Euler*

$$\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Démonstration

D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} &= \frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)}{2} \\ &= \frac{2\cos\theta}{2} \text{ car } \cos(-\theta) = \cos\theta \text{ et } \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ &= \cos\theta. \end{aligned}$$

...

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta)}{2i} \\ &= \frac{2i\sin\theta}{2i} \\ &= \sin\theta.\end{aligned}$$

■

Les formules d'Euler sont très utiles pour mémoriser (ou découvrir) les formules d'addition/de linéarisation en trigonométrie, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2i\theta} + 2\overbrace{e^{i\theta}e^{-i\theta}}^{=1} + e^{-2i\theta}}{4} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Propriétés

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes.

1. $\overline{z} = e^{-i\theta}$
2. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
3. $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
4. $z^n = r^ne^{ni\theta}$

Toutes ces propriétés sont celles déjà vues précédemment, mais écrites de façons différentes.

Complément 1: Calculer la somme $1 + \cos x + \cdots + \cos(nx)$

On note :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx).$$

Une façon de déterminer une expression « simple » de cette somme est de considérer la somme :

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

En effet, $C_n(x) = \mathrm{Re}(\sigma_n(x))$ et $\sigma_n(x)$ est une progression géométrique, c'est-à-dire la somme des premiers termes d'une suite (complexe) géométrique (de premier terme 1 et de raison e^{ix}).
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \\
&= \frac{\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+1} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{2-2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{2-2\cos x} \\
&= \frac{1-\cos(-x)-\cos(n+1)x+\cos(nx)+\mathrm{i}(-\sin(-x)-\sin(n+1)x+\sin(nx))}{2-2\cos x}
\end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$C_n(x) = \frac{1-\cos(x)-\cos(n+1)x+\cos(nx)}{2-2\cos x}.$$

On peut même écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(x)-\sin(n+1)x+\sin(nx)}{2-2\cos x}.$$

Complément 2: Interprétation géométrique de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Dans le plan d'Argand-Cauchy, soient $\mathrm{A}(z_A)$, $\mathrm{B}(z_B)$ et $\mathrm{C}(z_C)$ trois points quelconques.

- $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$.
- $\arg(z_C - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ et $\arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$.
  Donc, $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$
  $= \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$
  $= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

On peut se servir de ces résultats pour discuter de la nature d'un triangle par exemple.
Soient $\mathrm{A}(2\mathrm{i})$, $\mathrm{B}(1+5\mathrm{i})$ et $\mathrm{C}(-3+3\mathrm{i})$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

- $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{|-3+\mathrm{i}|}{|1+3\mathrm{i}|} = 1$.
  Donc $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$.
- De plus, $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{(-3+\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})} = \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.
  Donc, $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod 2\pi = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

On en déduit alors que le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Complément 3: Calcul de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Les nombres complexes permettent de calculer n'importe quelle ligne trigonométrique de n'importe quel angle de la forme $\dfrac{\pi}{q}$ tant que l'on connaît les lignes trigonométriques des angles $\dfrac{\pi}{n}$ et $\dfrac{\pi}{m}$ tels que $\dfrac{\pi}{n} \pm \dfrac{\pi}{m} = \dfrac{\pi}{q}$.

Voyons un exemple :

Posons :

$$z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right).$$

Alors, on peut aussi écrire :

$$z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}.$$

En développant z avec la première écriture, on a :

$$z = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Comme $|z| = 1$, on en déduit alors :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \mathrm{Re}(z) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$